A. 丹容 著

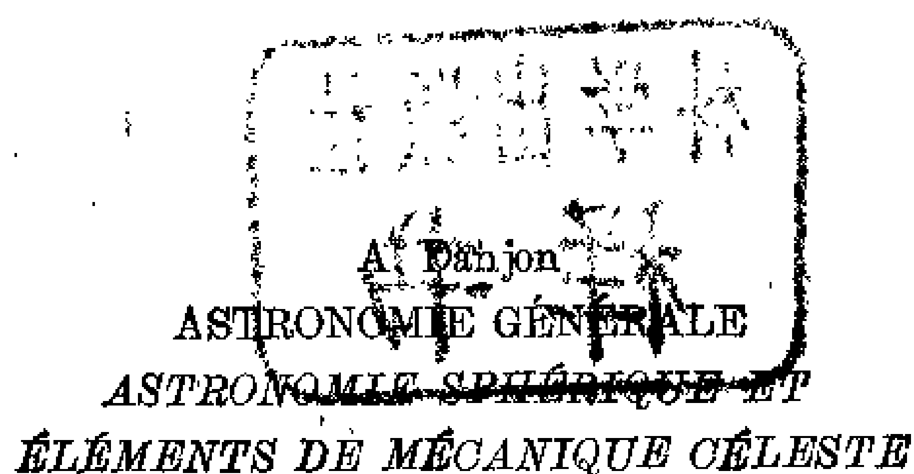


球面天文学和天体力学引论

科学出版社

内 容 简 介

本书系天体测量方面的一部基础论著．本书共分上、下篇．上篇为“球面天文学”，主要内容有：周日运动、太阳的视运动、岁差、章动等；下篇为“天体力学引论”，主要内容有：行星和彗星的运动、轨道的计算、摄动理论等．本书可供天文和大地测量工作者以及高等院校有关专业的师生使用．



A. Danjon

ASTRONOMIE GÉNÉRALE

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE ET

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE CÉLESTE

J. & R. Sennac, 1959

球面天文学和天体力学引论

A. 丹容 著

李 珩 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年Ⅱ月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1980年11月第一次印刷 印张：31 1/4

印数：0001—7,230 字数：722,000

统一书号：13031·1362

本社书号：1886·13—5

定价：4.75元

译 者 的 话

本书作者前巴黎天文台台长、巴黎大学天文学教授 A. 丹容院士，是当代著名的天体测量学家. 他根据四十余年教学与研究的经验写成此书. 据作者自述，这是为他本人提供一本整理观测的手册，因而书中对于数据处理与数字计算占有相当重要的地位与不少的篇幅. 至于本书内容与其特点，作者在第一版的"序言"中已有相当详细的介绍，这里不再赘述了. 本书出版后得到世界各国天文学界的推崇，译者特将此书译成中文，以期为我国天体测量学与大地测量学工作者提供一本值得学习与参考的好书. 在这里需要注意的是：本书原名为《普通天文学》，副题为《球面天文学和天体力学引论》，根据书的内容，中译本采用《球面天文学和天体力学引论》作为书名. 此外，本书内的计算例子，多是外国天文台所见的天象；为了增进对于书中内容的了解，并弥补本书没有练习题的缺陷，读者应取我国出版的天文年历里的数据，对于近年来我国境内看见的天文现象加以计算.

本译稿承天体测量学工作者叶叔华、金文敬、须同祺、刘宝琳、阎林山等同志过目，他们提了不少有益的意见，陈晓中同志为此书做了细致的校订工作，改正了译稿中不妥之处，译者在此向他们致以诚挚的感谢. 更望读者指出还未能发现的缺点，以便再版时加以改正.

序　言

本书是根据作者自1929年以来先后在斯特拉斯堡与巴黎两大学的讲稿加以发展而写成的．课堂口授的教材只限于纲要与原则，绝不能将全部内容讲解无遗，这是因为由于时间的限制，教师只好将细节与许多实际问题省略不谈．可是，听讲的人须在一本书里去寻找他们所需要的补充材料，用来补足他们在课堂里仓卒抄写的记录，以便学习或对已听过的部分加以进一步的了解．

本书的内容，作者从来没有于一年内讲授完毕过，这些都是高等天文学课程中有关基础天文学的内容．事实上，书中所叙述的超过了这个范围，因为本书的读者对象不只是大学生，而且包括了天文工作者．我写这本书更是为自已在工作上的需要提供一本手册，以便分析、整理、计算从观测中得到的天象资料．书里引用的公式，大部分是我自已经常使用而认为是最方便的形式．例如，第十五章有关月球、太阳、行星自转和卫星现象等问题，是我从来没有讲授过的．那里的公式对于观测者相当有用，都是根据我自已的经验推导得来，因而有些是新颖的；有些散见于文献、经我第一次汇集在这里的．

由于篇幅的限制，本书不能讨论天文仪器（我与古德尔合作，已经写了另外一本书[1]）与实用天文学，可是我在本书内却没有忽略应用．读者可从这里了解天文学不是数学的一个分支，而是一种观测的科学；虽然数学的解释占有相当重要的地位，但不以数学推理为最终目的，也不作烦琐的数学推导．

基础天文学的内容是对天体视运动的研究；它的两个主要目标是参照系的决定与时刻的测定．这两个重要课题于前几章内加以阐述，一方而我应用了经典力学的原则，另一方面我也不迟疑地抛弃了陈旧繁复的理论；如对光行差，我便从比较简单而直观的相对理论去叙述．至于和地球自转联系的现象，经典力学的表达方式已能满足球面天文学的需要．必须在此说明，本书所说的均匀时和绝对参照系与牛顿所指的绝对时间与空间没有丝毫联系；原来牛顿所提出的是“与外界事物没有关系”的（这是牛顿《原理》中的话）一种形而上学的概念．可是我们所应参照的是相对时间与空间；牛顿也说过，只有这种时间和空间，“由于我们与事物的关系，才接触到我们的感官”．

为了说明本书的计划，我必须对书中的数据与数字例题所占的地位作一点解释．天文学不是文字公式的游戏，初学的人应该认识数字计算不是一件容易的工作；而且文字的公式不经过数字解或编制成为数字表，便不能算是完成了它的作用．由于学生不能都购置《法国天文年历》，我特别在本书内为他们提供一些常用的数字表．本书后面附表三十七幅，都是与书中讨论的问题有关联的．这些表大部分都经我用两个方法计算过的，有些还是以前没有发表过的．附录一章简略地讨论了数字表的使用法．

本书的数字计算，真数与对数兼用．今天的职业计算者有计算机，但是学生和个别的计算者还需使用对数表．一度的60分制与十进小数制亦同时并用，这是由于后一种分角法我国现在还有人使用，虽然在别的国家已经是过时了．

1) A. Danjon et A. Couder: Lunettes et Télescopes, 1935（折射与反射望远镜）．

球面天文学是天文学的基础，在它上面先后建立起行星天文学与恒星天文学．近三十年来的重要发现打破了均匀地球时的概念，因而摧毁了这个既经典而又有深刻变化的学科的传统叙述方式．

下篇的七章讨论行星、彗星、月球、其他卫星与双星的运动．我们特为行星与彗星轨道的决定保留一个重要的地位，特别举出数字计算的详细过程，这主要是为了帮助读者对于方法的了解，而不是为天文工作者作出范例；因而这不能当做是计算指南．每个人应该在从计算过程以至得到結果的程序有深切了解之后，为自己建立一个准则．所以我在本书里力求意义明晰，而故意放弃了规范化．

读者可能诧异本书没有任何参考文献，这是由于这方面的古书和专著，只在天文台图书室里才能找到，读者在那里不难发现很好的书目，因此我感觉没有必要举出许多书名了．反之，本书中叙述到重要发现之时，我总是写了一些历史小注，这是为了提醒读者，天文学是从观测发展起来的，理论是以后的产品．自古希腊的喜帕卡斯以来两千多年，天文学的方法并没有什么改变．

A. 丹容

1952 年 8 月于巴黎天文台

第二版序言

本书第二版基本上保持了第一版的内容．自然，我们已将细心的读者所指出的和我们仔细校对时所发现的错误之处加以改正．第一版里叙述含糊不清的语句也修改了，但为了不增加重新排版的费用，我们尽量维持原来的版型．

可是有些篇幅势必加以改写．例如因遵循国际天文协会 1952 和 1955 年两次大会有关时间与地球自转的变化的决议案，作者将本书第七章，除《历法》一节外，不得不重新写过．

当我们将理论推到数字的应用时，便不能不只满足于简明扼要的解答．不管我们所用的方法与符号怎样，終需写出冗长繁复的代数展开式，可是在这一工作上，现今的学生远不如其前辈之有训练．为了照顾起见，我将十一章（轨道的决定）与十三章（月亮的运动）里某些地方加以简化．

自 1952 年本书发行以后，电子计算机的使用日益普遍，数字计算机构所用的技术亦日趋完善．从前认为不能计算的问题，现在已经成为日常的工作．在专业天文工作者的眼里，使用对数表的计算好象已成过去；但大多数初学计算的人，甚至没有计算机，如果不用对数表，他们将无法作任何的计算了．

书末附表 XXIX 所载的行星轨道的根数，在第一版里是以 1900 年 1 月 1 日 12 时（世界时）为历元计算，第二版已经改为 1900 年 1 月 0 日 12 时（历书时）为历元计算，因为这些根数的表达式里的时间 t 皆是历书时．

丹　容

1958 年 7 月于巴黎天文台

目　录

下篇　天体力学引论

数　字　表

上篇 球面天文学

第一章 导 论

§1 参照系的选择

球面天文学的主要目的是研究天体的视位置，因而它也是研究天体运动的学科.

研究宇宙的运动学，便是研究天体对于一种参照系的运动关系，只需这参照系是确定的. 如果我们改变了参照系，便有必要将原来从运动学的观点描述世界的数字项加以修改. 所以，新的参照系亦如旧的参照系一样有效；只需此两参照系的关系是确定的.

如果从动力学的观点去研究宇宙，参照系的选择便不会是任意的. 经典动力学的照则只是对于所谓"绝对参照系"方才有效. 更确切地说，如果运动物体对于某一确定参照系的加速度和作用的力的关系服从动力学基本原则，那么，这系统便可称为是绝对的. 容易证明，两个绝对参照系只在等速直线运动的情形方才没有差异，换句话说，运动物体的加速度对于这两个参照系具有相同的数值.

许多世纪以来，天文学的目标只是对宇宙作运动学的描述. 参照系的选择完全是任意的，特别是选择一种与地球相联系的参照系，并没有什么困难. 行星的地心运动(完全从运动学的观点面取的一种相对运动)可以用托勒密体系正确地表达出来. 在这一点上，托勒密体系(只须以开普勒的椭圆去代替本轮和均轮等正圆)是和哥白尼的体系有相同的效用的.

但是，当天文学成为牛顿动力学的一章之时，人们才感觉到有使用绝对参照系的必要. 事实上，只有对于这种参照系，我们才能写出联系加速度 $\boldsymbol{\gamma}$、质量 m 和力 $\boldsymbol{f}$ 之间的向量等式: $m\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{f}$. 虽然动力学的目标与哥白尼的体系毫无关系，可是我们把对于绝对参照系的追求叫做哥白尼问题，恐怕还是恰当的；早已证明，在牛顿的«原理»刊布以前一个半世纪，一种特殊参照系，即以太阳为原点面坐标轴的方向指着明亮的恒星这样的参照系，可以大大地简化行星运动的描述. 我们今天已经了解这种简化背景的原因：将哥白尼所选择的参照系作为绝对参照系是一个很好的近似. 事实上，将坐标原点由太阳中心移到太阳附近的太阳系的质量中心，便成为牛顿力学的绝对参照系. 可见，照来由直觉选出的哥白尼体系，事后得到证实，其根据不必在«天体运行论»中去寻找，而应在牛顿与其继承人的著作里去寻找[1].

可是我们今天已经明白，天体力学所习用的参照系，严格地说，还不能算是绝对参照系. 现代的研究[奥尔特(Oort)，林德布拉德(Lindblad)]证明，银河系有普遍的自转，一切可见的恒星和太阳都参加这种运动. 因此，认为太阳系的质量中心在作等速直线运动

1) 动力学常采用一个任意的参照系，只要所用的参照系的运动是相对于另一个绝对参照系而决定的；否则，便不能计算附加的或惯性的加速度.

(即没有加速度),并且指向恒星的坐标轴方向不变,这种看法是不合理的. 如果我们要建立一个新的绝对参照系,也许可以将其原点放在银河系的质量中心,并将其坐标轴指向最远的河外星系.

这样的向远方推移的参照系是否会被肯定下来,现在还不能保证,迟早也许会有新的发现推翻这一参照系的绝对性. 在数学家和哲学家的眼里,哥白尼的问题显然没有得到确定的解答. 可是在实际应用上却得到充分的验证: 天文学和这种近似绝对参照系相处得很好,天文学的定律和一切观测科学的定律一样,是在一定程度的近似之下而建立与证明的. 因此,我们可以满意地总结说,将力学的基本原则应用于天体,对于修改后的哥白尼参照系的运动迄至现在是与观测所能达到的精确度相合的,因而这种坐标系可以看做是一种绝对参照系. 虽然观测表明这一参照系也参加银河系的普遍自转,但是我们并不以为应该抛弃它,因为银河系的自转是一种很缓慢的运动,自转中心很远,由是而来的附加加速度,在观测方法还没有新的进展时,是可以略而不计的;而且即使考虑进去,也是很容易计算的.

总之,我们在这本书里所采用的绝对参照系是与太阳系的质量中心和明亮的恒星相联系的,只在不合用的情形(例如讨论到岁差常数时),我们才将银河系的自转效应计算进去,而改变了我们常用的参照系.

但是在我们经常讨论的相对运动里,可以采用任何坐标系;为方便计,我们使用地心坐标系.

§2 时　　间

时间和长度与质量是力学和物理学的三个基本量. 我们对于这三个量分别给与一个单位,例如时间的单位是用以测量现象持续之久暂的. 为测定一个实验经历的久暂,我们可以采用一种物理的标准,例如稳定的振子的振荡周期,只需这个标准在实验的过程里保证其作有规则的振荡.

但对于天文学而言,这问题却有另外一种意义. 我们常将一个事件发生的时刻表示为距离某一确定原点的"相对位置",换句话说,即将时刻放在时间尺度上的某个"地位". 这样,在短时间内运行的钟表便不能解决问题,而必须使用一种永久运转的时计,它可以量度不管怎样长的时间. 这便是给与天文学家的问题,而须我们在此加以讨论.

时间的概念和上节所讨论的参照系,同为运动学的两个基本概念. 动力学更介入质量与力两个概念,我们暂不在此加以分析.

当我们研究一个质点的运动时,我们将其坐标、速度、加速度等表示为某一参数 t 的函数,这个参数,我们叫它做"时间",但却没有赋与它以任何的天文意义(有时被人误解),所以它的测定就逻辑说来,并不一定要和天文观测发生联系. 事实上,这个参数的定义,只表现在我们所写出的时间 t 与坐标之间的关系式上. 如果一种运动的历程表(即与 t 的各个数值对应的、为动点的坐标所规定的位置的表)可以计算出来之时,则在某一瞬间由动点的坐标的测定,便可在这历程表上作反方向的内插,而求得相当于这一瞬间的 t. 于是,这个动点便可作为一种时计.

如果两个独立的时计(即在独立的力的效应下两个运动的点)对于同一瞬间给出两个

不同的 t 的数值，这样决定的时刻便没有丝毫的实际用途. 这样的事是否可能呢？在动力学的基本原则上，对于一个在已知力的作用下的结构已知的物体，我们可以将其运动的理论表达为一种严格的形式. 如果基本原则是有效的，则一切时计，当其理论是正确地建立，而其运行表又是正确地编成（我们还要表明这是不同的两件事）之时，那么，对于相同的一个瞬时应给出相同的一个 t 值（在实验的误差范围之内）.

假使观测给我们表现的两个独立的时计所提供的时刻有一种系统的差异，我们是否须放弃基本原则呢？自然是应当放弃的. 可是事先我们必须检查几个重要的关键问题：保证可以使用这个原则的各种条件是否得到满足？究竟这是些什么条件？首先，理论须是正确的，这里包含的运动的参照系是不是绝对的？运动物体的力学性质是否确切地了解了？它所受的力的规律是否明白？还有，动点的运行表是否计算正确？计算所需要的理论中的积分常数（其数值只能根据观测而求得），是否达到所需要的精确度. 现在试对以上这些问题加以讨论.

(1) 人手所造的时计，是机械零件的组合，受牵引力和摩擦力的作用而作相对的移动. 这些力的规律一般不太清楚，而这些运动的零件又受弹性的变形与使用的摩损. 因而，我们对于这一类的时计（钟、表）便不能建立起严格的理论. 机械的钟表最好也只能在短期里作为时间的内插的工具，单靠它所确定与保持的时间没有足够的保证.

在这一点上，天体的运动提供了很大的优点. 太阳系运动的理论可以将系内成员的相互引力一并加以考虑[1]，并可以将此运动归算到一种可以看做是绝对的参照系而得着发展. 行星和卫星在其轨道上的运动是不受摩擦力的，而且基本上与这些天体的物质结构无关.

许久以来，人们相信地球的自转是得着这种保证的；但是某些观测表明，事实上并不是这样的. 原来，地球不能当做是一个不变形的刚体，潮汐和地质与地球物理的许多现象都表明地球的惯性椭球的大小是有变化的. 而且事实表明，这些变化有其可以测量的效应. 从此，在不变形的地球的假设下所规定的恒星时 T，只能当做是力学时 t 的函数，用它去表达星历表，不能是严格有效的. 如果保留对应于同一瞬时的两个 t 的数值，即一方面由地球自转而来的恒星时，另一方面由某一天体（例如月球）的公转而来的另一种时刻，让其一并存在，则违背了力学的基本原则，而不能算是合理的. 为着区别这两个数值，第一种时可以由其来源称为地球时，第二种时为牛顿时. 地球时与牛顿时之差，在近三个世纪里的数值可于事后加以测定，以后我们还要谈到. 这一差异有时超过半分钟，但这数字不能认为纯粹是由于这期间里地球变形所产生的效果.

如果两个行星，或一个行星与一个卫星所提供的牛顿时，在数值上有可以觉察的系统差，便成了一个更加严重的问题. 因为天体的公转运动理论比自转建立在更加可靠的假设上，所以是更可信的. 勒威耶(Le Verrier)在水星的公转上，即在其计算的与观测的黄经上，发现了一种系统差，而这是牛顿力学所不能解释的. 这一分歧引起长期的争论，使人认为由水星公转运动而定的牛顿时与由月球运动而来的牛顿时发生一种系统差. 爱因斯坦终于解决了这个困难，他用他的相对论的引力理论说明了水星运动不规则的原因. 于是，我们可以总结说：在观测所能达到的精确范围内，天体力学的基本原则是有效的；不

1) 我们可以承认，对于太阳系里主要成员施加可觉察到的引力的任何质量，没有什么逃出了人们的观测，至少在太阳附近是这样.

过，一方面须将广义相对论所给与天体力学的改进，以及另一方面须将银河系自转在参照系上所生的影响(即上节所指出的)，一并计算进去而已.

从此以后，我们将假设牛顿时能以最好的近似值表达力学时 t，它以足够的精确度和连续性而被测定，能在一个无限而且均匀的时间尺度上记录一切观测.

可是，只要所测的时间相当短，用地球时代替牛顿时是没有什么错误的. 换句话说，我们将假定地球的自转提供了一种可于短期使用的时间尺度，不过须将太阳、月球和行星的摄动计算进去而已. 但是，对于某些问题，时间超过几月甚至几年，这假设便不是严格地合理了.

由此可见，力学时是一个难于达到和测定的数量. 将来或许有一天，人手所造的时计能够提供一种均匀时间尺度，其精确度之高至少等于现时所用的天然时计*. 把一片截割合适的石英晶片放在自身可以调节的交变电场里，石英晶片的厚度会发生变化，这样便形成一种异常稳定的振荡，这样制成的石英钟已经为许多天文台所使用. 但是，石英的摄荡周期也不是严格地不变的，石英缓慢地老化，因而还不能保持稳定. 这种新的摄荡技术还发明不久. 将来，人们可能用纯粹物理的方法去测定很长的时间. 但是，我们怎样去保证时间尺度的连续性呢？这便是下面所要讨论的问题了.

(2) 星历表的编制是将行星或其卫星运动的恒星时与其所在的黄经度表示为力学时 t 的函数. 要完成这一工作，须假定所要表达的数量其各项的数字系数是已知的. 但是这些系数是积分常数的函数，而积分常数的数值只能根据观测而确定.

换句话说，为着预推天体的运动，须先对它们作长期的观测. 这句话和我们熟悉的一个定理并无矛盾. 这定理便是：在已知的力场里，质点的运动只与其初始条件有关；所谓初始条件，就是对应于某一给定时刻的质点的位置与速度. 虽然对于某一瞬间质点的位置可以测定，但其速度却不能测定.

在一定时期里，不管观测的方法和理论怎样进步，利用天文观测去决定力学时 t，总须使用凭借昔日观测所作成的星历表，而昔日的观测总不会象今天的观测那样精确. 这些星历表的近似程度只反映技术在昔日的情况，而不是今日的情况. 周期项里的数字系数的变化是不大的，因而相应的误差也是不大的；但长期项(即含有 t 及其整数幂的项)则不是这样的，这些项的计算值上的误差随 t 的增长而增大，以至于无限. 因此，天文学里的基本常数值应该随时加以修订，以便在误差已不能容许时去缩小计算值与观测位置之间的差距.

可是，当常数有改动时，在星历表上便出现不连续的情况，于是，在天文观测和星历表的基础上所测定的 t 的尺度，也出现了不连续现象. 这种不连续性必然会引起平太阳日长度的改变，换句话说，即引起我们采用为标准时间的间隔 t 的变化. 由此可见，平太阳日亦如米尺一样是有变化的. 如果我们保存这个长度与地球有关的原始定义**，那么，当大地测量有改进时，也须对长度的标准给与修订. 更简单、更聪明的办法是将它一劳永逸地规定下来，即将标准长度当作仔细保存的一根金属尺子的长度. 可是，我们对于时间标准还不能这样做，因而只好希望能建立起一种与天文常数的体系无关的物理标准. 现今使用的石英钟已经能够比较几天内的时间间隔，而相对精确度达到 10^{-9}；而一个平太阳日

* 利用原子内部能级跃迁所发出的频率很稳定的电磁波而作成的原子钟，似已达到这个要求——译者注

** 原来规定以通过巴黎的经线的四千万分之一作为长度的单位，定名米突(米)——译者注

只能测定到10^{-7}. 这个问题的解决已经是不远的事了*.

无变化的时间的物理标准的采用，必然会打破人们对于两种时间尺度的一致性的看法:一方面是由不断的昼夜交替所规定的时间尺度,另一方面是化归到天文观测的均匀的时间尺度. 换句话说,太阳中天的平均时刻逐渐与时钟所标示的正午发生差异. 可是,这两种尺度的细小面持续的差异,须经历若干世纪始能表现出来.

(3) 为着照顾初学的人，我们在结束这一节时加上一个申明. 天文学家有一个不大好的习惯,常在"时"这个字前面加上一个形容词,如恒星时、太阳时之类,但这些量和力学时 t 实在有根本的差别. 这些量的性质虽有差别,但却有一个共同的特征,即它们差不多都是时间 t 的线性函数，它们的数值也都可以由观测求得，而且可用它们去编制星历表,因面可由这些量去求得力学时 t. 但是,一旦给与它们以"时"的称号,便容易引起混淆.所谓恒星时、真太阳时,甚至如现今所规定的平太阳时,就"时"这个字的本来意义说,其实都不能叫做"时",面只能称为力学时 t 的线性函数. 不幸,这一名词因习用长久而产生了某种权威，即使在严肃的著作里，也认为恒星时是均匀时，而恒星日是时间的标准. 事实上这是十分错误的见解. 如果我们要把一年星的时间测量到几秒的精确程度，近代天文学是有这种能力的.

读者应当记住,恒星时和真太阳时基本上是些二面角,因面是可以由直接观面求得的几何量,它们只可以作为去确定均匀的力学时的某种媒介,唯有力学时这一种时才配称为"时".

数学家，物理学家与化学家，当科学的进步使他们觉察到习用的语言不恰当之时，常会对它们作出修改，面天文学家却循规蹈矩，常常安于旧日的名词，尽管事实已经表明它们是不恰当的. 所以，我们在这里指出缺点与不当之处以后，还应提出一种修改的办法. 这是本书作者一有机会便要提出呼吁的.

§3 角的测量

假想有一架仪器(例如瞄准天体或远处物体的望远镜)可以围绕一个旋转轴运动，这旋转轴是由放在固定轴承上的两个支枢所支持. 为决定仪器的位置，我们装上一个刻度圆环(图1)，其平面与旋转轴正交，面环的中心应和旋转轴非常接近. 装置在仪器支架上的两个固定的标记 A 和 B，放在环的一直径的两端. 观测者便在这标记所指处读出圆环上的刻度数. 例如我们要测量

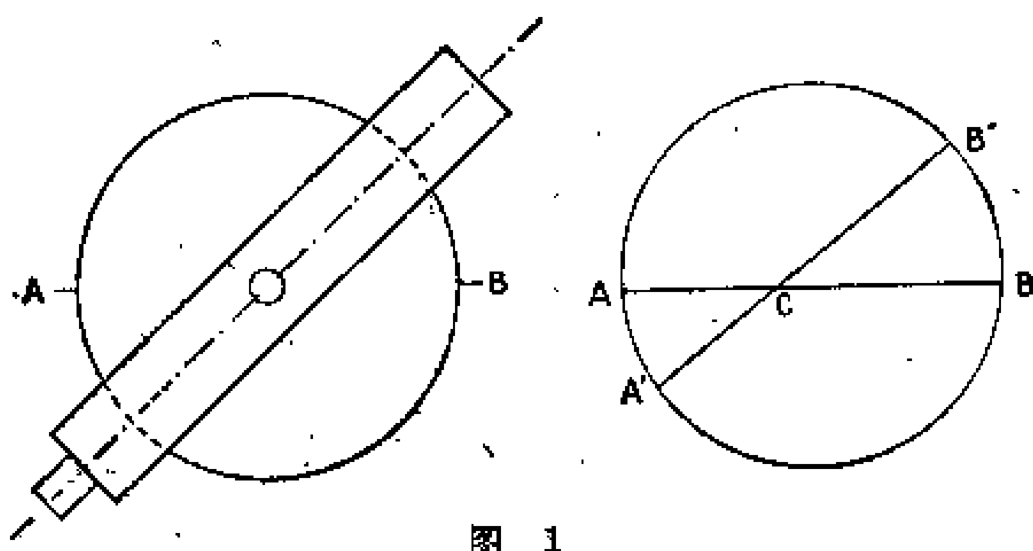


图 1

仪器由一个位置转到另一个位置所转过的角度. 设 A 和 B 是仪器在第一位置时圆环上 A 和 B 点的读数，而 A' 和 B' 是在第二位置时圆环上的读数. 根据几何学的一个定理，AB 和 $A'B'$ 两直线之间的夹角便是要测量的角度，换言之，即 AA' 和 BB' 两弧之和的一半.

* 1964 年 10 月在巴黎举行的十二届国际度量衡会议，决定以铯原子(^{133}Cs)的振荡频率来确定一秒的时间长度,其精确度达 6×10^{-12},即 5000 年只差一秒——译者注

由此可见，角度的测量便是刻度圆周上两段弧的测量[1]．现在叙述一下测量弧度的各种单位．

弳或弧度(radian)，是与半径相等的弧长．一圆周内有

$$2\pi = 6.2831853072 \text{ 弳}$$

数学公式里所含的弧或角，一概表示为这种单位．为了特殊的用途，编有一种三角函数表，其自变量是表示为弳的，这就是给出 α 这个数的正弦、余弦和正切的那种表．但是，由于弳不是圆周的一个整分数，为了在圆周上刻划度数，便须采用其他单位．

象限制是将一直角分为 90 部分，每一部分称为一度，一度分为 60 分，一分再分为 60 秒，至于秒的小数则表示为十进位的小数[2]．有充分的理由，用十进位法将度表示为十进位小数而废弃 60 等分制是比较方便的．天文学家之所以未作这种修改，是由于将现有的仪器改装，并将长时期的观测结果进行换算，会有很大的困难．但在测量上，由于游标尺的使用，人们将度的分数的读数记为十进位的小数，计算者便可取用十进位编制的三角函数表去归算这样的观测记录．

现在将象限制的单位换算为弧度的数值：

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弳} = 0.01745\ 32925 \text{ 弳}$$

$$1' = \frac{\pi}{10800} \text{ 弳} = 0.00029\ 08882\ 09 \text{ 弳}$$

$$1'' = \frac{\pi}{648000} \text{ 弳} = 0.00000\ 48481\ 3681 \text{ 弳}$$

为便于记忆，可注意一度约为千分之十七弳，一分约为万分之三弳，一秒约为百万分之五弳．反之，

$$1 \text{ 弳} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\!.29577\ 95131 = 57^\circ 17' 44''\!.80625$$

$$= \frac{10800'}{\pi} = 3437'\!.74677\ 078 = \frac{648000''}{\pi} = 206264''\!.80625$$

这些数的约数经常为人使用．例如，已知一个角的弳数，欲将其换算为度、分、秒，则可将这个数分别乘以 $57^\circ\!.30$，$3437'\!.7$ 或 $206265''$．

我们也将圆周分为 24 等分，每一分叫做"时"，这里"时"这个字是指角度而不是时间．一时复经过两次 80 等分，分别分为时分与时秒，而时秒的分数则表示为十进位小数．我们习惯于将这三个角度单位表示为 h(时)、m (时分)与 s(时秒)，而区别于 ∘ (角度)、′ (角分)与 ″ (角秒)[3]．下表明白地表示出这三种角度单位的关系：

---

1) 高精度的仪器上有时装有几对标记，例如在正方形的四角装上四个标记，或在正六边形的顶点装上六个标记．用这种方法增加读数的目的主要在消除由刻度线纹的误差而来的偶然差．在直径 1 米的圆周上(例如子午环)，$1''$ 的角占 2.4 微米的弧，如果观测者要读至秒的分数，便须使用测微显微镜．

2) 十八世纪的天文工作者尚用 tierce(三分之一)、quartes(四分之一)等名词来表示一个直角的三分之一(30°)和四分之一($22^\circ\!.5$)等．

度的划分，昔日叫做 minute prime(第一小份)、minute seconde (第二小份)、minute tierce (第三小份)等．minute 这个字的意义是"小的部分"．现在以 minute 代替 minute prime，以 seconde 代替 minute seconde，这些词所表达的意义便会产生混乱．我们将指出，有关三角学的名词还有一些是欠妥当的．

3) 法国教科书里将度和时的 60 划分法区别为弧分、弧秒与时分、时秒是不久以前的事．但时 (heure) 这个字既表示时间又表示角度，容易使人混淆，初学的人便容易相信用时 (h) 量度的一切变量都是按时间的线性函数变化的，这便引起原则性的错误．从前航海的人常分别记为角分、角秒与时分、时秒，是应当取法的好习惯．

$$\left.\begin{aligned}1^{h}&=\frac{360^\circ}{24}=15^\circ=0.26179\ 93878\ \text{弳}\\1^{m}&=\frac{15^\circ}{60}=15'=0.00436\ 33231\ \text{弳}\\1^{s}&=\frac{15'}{60}=15''=0.00007\ 27221\ \text{弳}\end{aligned}\right\}$$

反之，

$$\left.\begin{aligned}1^\circ&=\frac{1^{h}}{15}=4^{m}\quad 0^\circ\!.01=2^{s}\!.4\\1'&=\frac{4^{m}}{60}=4^{s}\\1''&=\frac{4^{s}}{60}=0^{s}\!.0667\end{aligned}\right\}$$

度、分、秒和时、分、秒之间的相互换算，编有对照表，可供实际计算时使用．本书末尾处就附有这样的表(表 VI 与 VII)．

至于象限的百分制，即将圆周分为 400 度，因天文学家从未使用，我们便不在此叙述了．

§4　三角函数和三角函数表

这里不再叙述三角函数的定义及其基本性质．我们只将正割与余割两个函数提一下，因为在有些初等三角学书中没有谈到过，而在天文学算式里又常使用到它们．它们是

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}\quad \text{和}\quad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$$

专业计算者因使用计算机而放弃了对数，这节省不少时间[1]．现在出版得比较多的是三角函数真数表，有些在真数旁边附有其对数．还有些表载有如上节所说的圆周上的 360°，并载有时、分、秒．

由于使用了计算机，从前为使用对数计算而设计的加减对数表已很少人使用，同样，为使用对数而设计的公式也已失掉了意义，至少对于专业计算者是如此．我们将两角和的积转化为其积的和的机会比较多些，而下列公式：

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\sin(a+b)+\frac{1}{2}\sin(a-b)$$

$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}\sin(a+b)-\frac{1}{2}\sin(a-b)$$

并不比下面这些公式少用：

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

1) 我们将要表明，如果取相同的位数，真数的计算有时不如对数精确(有时又会恰得其反)、但使用机器作 7 位真数的计算，比起用 5 位对数计算来要更迅速些，这表现出三角真数表的价值．

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

我们知道，可将 a 角的正弦、余弦和正切展开为 a（表为弳）的整数幂级数：

$$\sin a=a-\frac{a^3}{3!}+\frac{a^5}{5!}-\cdots \quad (a\text{ 为任何数})$$

$$\cos a=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\cdots \quad (a\text{ 为任何数})$$

$$\tan a=a+\frac{1}{3}a^3+\frac{2}{15}a^5+\cdots \quad \left(a^2<\frac{\pi^2}{4}\right)$$

由此可见，$\sin a/a$ 和 $\tan a/a$ 的比值与1的差别是二阶小量；当 a 很小时，$\cos a$ 也是这样的．同样，$a-\sin a$ 与 $\tan a-a$ 是三阶小量．所以，当弧很小时，可将它和它的正弦或正切当做是相同的．我们也可以将它的余弦当做是1，不过近似的程度较差而已．

当我们以弧代替它的正弦时，所引起的误差小于其展开式里略去的第一项，即 $a^3/3!$．在正切的情形，误差稍微超过正弦时的误差的两倍，而且符号是相反的．现在试求 a 的数值应该多大，它的弧和它的正弦才能被认为是相同时，而所引起的误差不超过某一限度，例如 $1''$．这就是说，应使

$$\frac{a^3}{6}<\frac{1}{206265} \quad \text{或} \quad a<\frac{1}{32.5}$$

这个角的极限值为

$$\frac{57^\circ.3}{32.5}=1^\circ.76=1^\circ.46'$$

以相同的方法，可以推出下表中的一些极限角[1]：

$a-\sin a<0''.001$	若 $a<0^\circ10'34''.3$
$0''.01$	$0^\circ22'46''.7$
$0''.1$	$0^\circ49'\ 4''.4$
$1''$	$1^\circ45'43''.7$
$10''$	$3^\circ47'47''.8$
$100''$	$8^\circ10'54''.3$
$\tan a-a<0''.001$	若 $a<0^\circ\ 8'23''.5$
$0''.01$	$0^\circ18'\ 4''.7$
$0''.1$	$0^\circ38'57''.0$
$1''$	$1^\circ23'54''.5$
$10''$	$3^\circ\ 0'43''.4$
$100''$	$6^\circ28'50''.0$
$1-\cos a<10^{-6}$	若 $a<0^\circ\ 4'51''.7$
10^{-5}	$0^\circ15'22''.4$
10^{-4}	$0^\circ48'37''.0$
10^{-3}	$2^\circ33'43''.2$
10^{-2}	$8^\circ\ 6'34''.6$

1) 正弦展开式里含 a^5 的一项，当 a 不超过 5° 时，不会超过 $0''.01$．

对于本书以后的某些计算，我们常要回来看这张表，以说明简化计算是否合适.

如果我们把弧认为和它的正弦相同，则正弦这个函数便将这段弧表示为弳的数值. 例如，将正弦的数值乘以 206265″，便得到这个角度的秒数：

即若
$$\sin a = 0.0013917$$
则
$$a = 0.0013917 \times 206265'' = 287''.06$$
这正是 7 位三角真数表所给出的数值，但这是未用内插法而求得的. 我们将常用这种换算的方法.

在相同的概念下，有时我们将一段小弧或任何小数量的正弦或正切表示为度、分、秒. 例如月球的平均视差：
$$\varpi = 57'2''.70 = 3422''.70$$
它的正弦是
$$\sin\varpi = 0.0165929$$
这个数以 206265 去乘，得 3422″.54. 于是，我们按规定写为
$$\sin\varpi = 3422''.54 = \varpi - 0''.16$$
本书末尾有一个表(表 III)给出了 $x-\sin x$ 的数值，我们可以用它立刻求得小弧的正弦，并将其表示为上面那样的形式. 同样，还有一个表(表 IV)给出了 $x-\tan x$ 的数值，可用以求小弧的正切. 在第八章讨论视差时便要用到这两个表.

为使读者了解这种写法，我们在此作一重要的说明. 当我们使用表达某一数量的展开式时，例如把 $\sin a$ 展开为 a 的整乘幂函数，如果 a 表示为角秒或时秒，而且要将结果也表示为秒，我们应该怎样去计算这些含有乘幂的数量呢？为明确起见，设将 a 表示为角秒 (a'')，则
$$a = \frac{(a'')}{206265}\text{弳}$$
因此
$$a^n = \frac{(a'')^n}{(206265)^n}$$
为使 a^n 合于以上的规定，即将其数值表示为角秒，于是须将这个数乘以 206265，便得
$$(a^n)'' = (a'')\left(\frac{(a'')}{206265}\right)^{n-1} = (a'')a^{n-1}$$
因此，欲求表示为秒数的 a 的立方，只须将表示为秒数的 a 乘以表示为弳数的 a 的平方.

例　求以角秒表示出正弦为 0.0165929 或 3422″.70 的 a 角.

因
$$\sin a = a - \frac{a^3}{6} + \cdots = a\left(1 - \frac{a^2}{6} + \cdots\right)$$
$$\sin 3422''.70 = 3422''.70\left(1 - \frac{(0.01659\cdots)^2}{6}\right)$$
$$= 3422''.70(1 - 0.000046)$$
$$= 3422''.70 - 0''.16 = 3422''.54$$

我们不在这里叙述三角函数表的使用法. 读者只须记住，求小角的正弦或正切的对数时，须采用一种特殊的设计，但其真数值是容易由内插法求得的. 反之，对于接近于 90° 的正切或正割的真数，也只能用特殊方法去求得，而不能使用一般的内插法.

表内的真数或对数的末位数常有其 1/2 的误差[1]. 假设已知一段小弧 x 的正弦或正切和 x 有相同的近似值, 下列的公式便提供了测定弧的误差的上限 ε(对于余弦或余切的公式,亦可同样推得):

$$\varepsilon=$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{正弦的真数} & 0''.103\sec x\\ \text{正弦的对数} & 0''.237\tan x\\ \text{正切的真数} & 0''.103\cos^2 x\\ \text{正切的对数} & 0''.119\sin 2x\end{array}\right\}\text{6 位表}$$

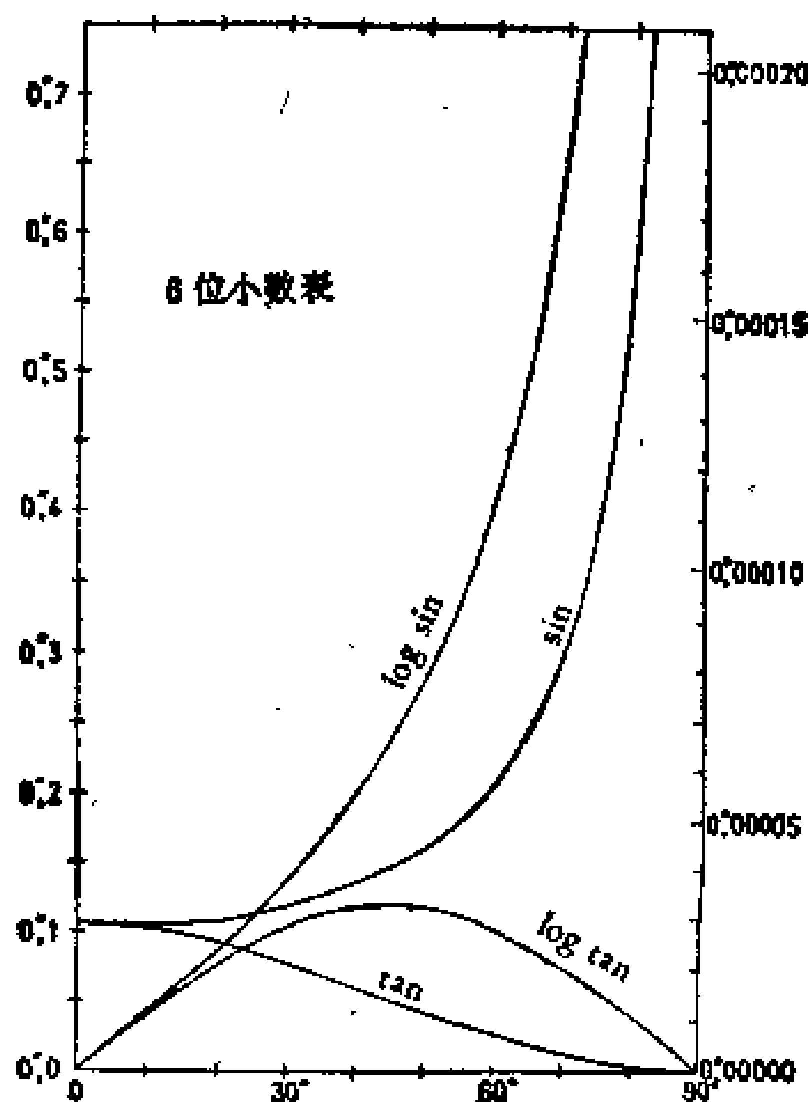


图 2 6 位小数三角表的近似值

(若所用的表是 4 位或 8 位的, 则分别以 100 乘或除以上各式的系数.) 图 2 里的曲线表示 ε 的变化. 由图可见,对于小角,对数表要精确得多, 这是不奇怪的, 因为在其整个范围内,其相对精密度差不多是相同的,至于表内所载的数字的绝对精密度, 对于真数表而言则是无变化的. 例如对数表给出

$$\log\sin 1'=\bar{4}.36373$$

这等于以 5 位有效数字去表示

$$\sin 1'=0.00029089$$

而 5 位真数表只给出

$$\sin 1'=0.00029$$

但是, 若注意到从对数表查出的精确到 8 位小数的 1′ 的正弦,恰好等于 1′ 的弧表示为弪的数值,由此便可以了解,怎样去避免由于真数表精度不足在少数情形下引起的困难.

如果一段弧小于 25°44′(arc sin M), 宁肯将其正弦取为对数而不取为真数(在相同位数的情形下); 但在 25°44′ 与 90° 之间时, 则适得其反, 即将这段弧的正弦取为真数而不取为对数. 对于正切,这极限弧是 23°28′(arc tan M). 在一般情形里,为正切所定的弧比为正弦或余弦所定的都要好些,先决条件自然是这些函数都准确到相同的几位小数,而不是几位有效数.

1) 有不少的例外情形. 我们可在印刷上加以设计,将最后一位数的误差缩减到 1/5. 如果最后一位数是强进的,即这个数的小数部分在 0.5 与 0.8333… 之间时, 我们在最后一位数字下面加上一点。对于这一情形, 我们应当减去最后一位数的 0.3. 如果最后那位数不是强进的, 即由于其后面的小数在 0.1666… 与 0.5 之间而被略去的时候, 我们在最后一位数的顶上放上一点。对于这一情形, 我们可在这个数上加入最后一位数的 0.3. 这样的表有 Milne-Thomson & Comrie, Standard Four-figure Mathematical Tables.

如果最后一位数是强进的,可在它下面加一横划,而使误差缩减到最后一位数的1/4,也就是在真数或对数表里看最后一位数下而有无横划的而相应地减去或加上末一位数的 0.25. 这样的表有 Schrön, Tables de Logarithmes à 7 décimales.

还有另外一个办法,亦可取得同样的效果. 只当略去的数超过末位数的 0.75 单位时,才进入一个单位;如果略去之数是在末位数的 0.25 与 0.75 之间,则在它后面附上一个十字符号. 这种设计可和上面的方法达到相同的精密度,而且在实际上更便于使用. 不方便的地方是,表中四分之一的数都须加上符号,而这种进位法与公认的进位法不同,总比一般的数字要少末位数的一个单位. 这样的表有 Andoyer, Nourelles Tables Fondamentales.

如果使用表去计算角，要准确到1角分(即误差不超过30″)，一般使用4位小数表；如要准确到角秒，便须使用6位小数表；而要保证准确到百分之一角秒，则须用8位小数表．如所要的精度是0°.01，0°.001，0°.0001，则我们应使用以上所说的4，6，8位小数表．十九世纪所编制的表常是5位或7位的，显然不很合理，这种因袭已久的传统也许是由于开本合宜，印刷便利或内插容易等原故．

§5　方向的极坐标

假设一个参照系为三个正交坐标轴 $Oxyz$ 所规定(图3)．为定出一个特指的方向，从 O 点引 $\boldsymbol{OA}=+1$ 与这方向相平行，且指向相同的一边，则 A 点的坐标不含糊地就决定了这个方向．我们叫这一点为那个方向的方向点．它的三个坐标满足关系

$$x^2+y^2+z^2=1$$

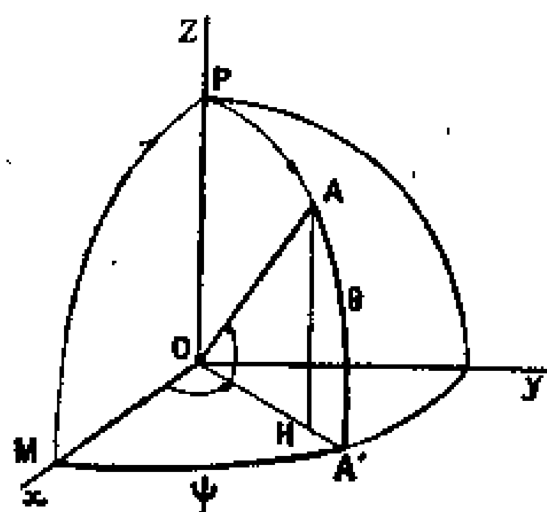


图　3

我们还可以用极坐标来规定这个方向．将 A 点投射在 xOy 面上的 H 点．设 ψ 等于 OH 与 Ox 所成之角，这个角的计算自0至360°，其转向由 Ox 到 Oy．设 θ 表示 OA 与 OH 之间的角，自0至90°计算，由 OH 转到 Oz 为正，反之为负．ψ 与 θ 就足以规定方向 OA，即

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos\theta\cos\psi \\ y&=\cos\theta\sin\psi \\ z&=\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

我们容易明白，方向点的直角坐标便是 OA 与三个坐标轴所成之角的余弦．因此 x，y，z 称为 OA 的方向余弦．

方向点的轨迹是以1为半径的球，我们叫它做天球．它的作用是表示出空间的方向以及与两个方向之间的夹角等，犹如正圆在平面上的作用一样．并不须设它的半径是"异常之大"(如有些人所想象的)，也不一定要使它的中心的位置在为一种公约所规定的点．这中心是任意的，可由平移迁移到所欲表达的方向上去．

xOy 而与天球相交于一个大圆，这大圆的面叫做基本面(图3)．这大圆与 Ox 轴相交之点 M 取为大圆的原点．Oz 轴与天球相交于一点 P，叫做坐标的正极．通过 Oz 且含 A 点的大圆弧 PAA' 与基本面相交于 A' 点．A 点的极坐标是

$$\psi=\widehat{MA'}\quad \theta=\widehat{A'A}$$

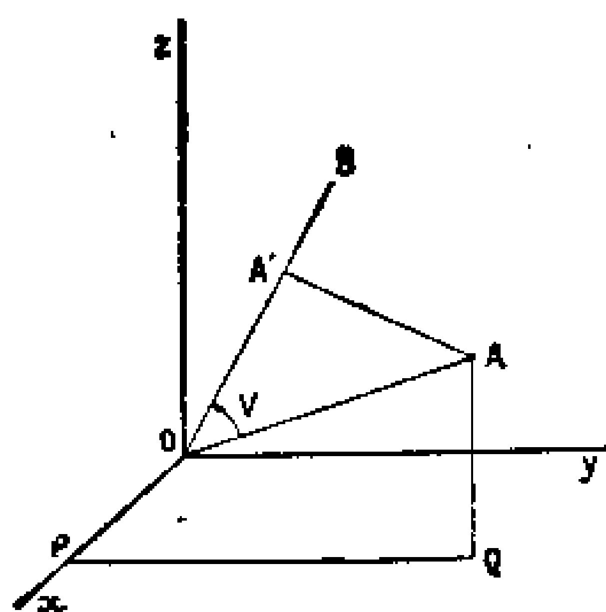


图　4

为完全规定坐标系，须将基本面在天球上的交线和原点 M 以及转动的正方向一并给出．设观测者站在基本面上，头向正极，他看见某一点转动的方向是与钟表指针的动向相反的，这样的坐标系叫做顺向系，否则叫做逆向系．图3内的坐标系是顺向系．

最后，试建立为其方向余弦 xyz 和 $x'y'z'$ 所规定的两个半直线 OA 和 OB 之间夹角的

经典公式(图 4). 将 OA 投射在 OB 上的 A' 点. 因

$$OA=OP+PQ+QA=x+y+z$$

而 OP 与 OB 之间所夹之角的余弦为 x', 故 OP 在 OB 上的射影为 xx'. 同样, 另外两个坐标在 OB 上的射影分别为 yy' 与 zz', 应用射影定理便得

$$|OA'|=\cos V=xx'+yy'+zz'$$

V 表示这两个方向之间的夹角. 如以 OA 的极坐标 ψ 与 θ 和 OB 的极坐标 ψ' 与 θ' 代替直角坐标去表示方向余弦, 则上式可以写为

$$\cos V=\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\cos(\psi'-\psi)$$

§6 球面三角形

*球面三角形*是连接球面上三点的大圆弧所围成的有限面积, 这三个点叫做顶点, 而这三段弧只在这三个顶点相交. 因为连接两个顶点的大圆规定了两段不同的弧, 为使定义完备计, 应区别我们所选的弧是哪一段, 也应指明三角形在所选的弧的哪一边.

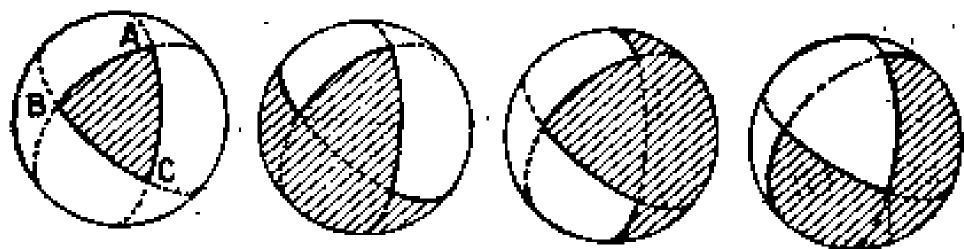


图 5

连接 A, B, C 三点的大圆弧截割球的方式有几种, 而且每一情形可以作成一个三角形, 如图 5 中的影线部分或无影线部分. 因此, 在一般的情形, 由三个点规定的球面三角形共有八个.

这八个球面三角形, 其中有一个的三边都短于半圆周, 这是 A, B, C 三个顶点和球心 O 连接的三条直线所形成的三面体所包围的那一部分球面[1]. 我们将这样一个三角形 ABO 叫做*简单三角形*, 这是我们经常讨论的三角形(除了特别说明的例外).

三角形的边是作为面积的界限的三段弧长(球的半径常取为单位长度). 这也是三面体 $OABC$ 的二面角, 可以用过顶点的两个边的切线之间的夹角去量度它们. 简单三角形的三个角均小于二直角.

若三个角中有一个为直角, 这个三角形叫做*直角三角形*. 若有一个边长 90°, 则三角形叫做*象限三角形*. 球面三角形当有两个角都是直角时, 叫做双直角三角形. 容易证明, 这个三角形同时也是双象限三角形, 至于其第三边, 可以有任意的数值, 但应等于其相对的角(图 6). 若剩余的这一边也是 90°, 这样的三角形便成为三角皆是直角、三边皆是 90° 的三角形. 例如, 天球上三个正交坐标面所截成的三角形便是这样.

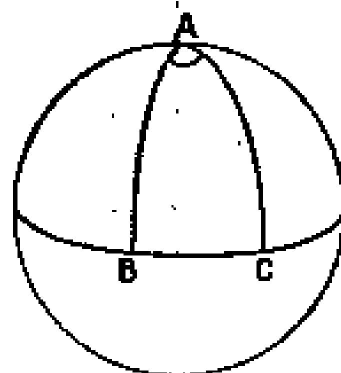


图 6

设 ABC 为简单三角形(图 7). P 为 BC 大圆的极, 位置与 A 点同在这大圆的一边, 因而 $\angle POA$ 是锐角. 同样, 可以规定与 B 点同在一边的大圆 AC 的极点 Q, 以及与 C 点同在一边的大圆 AB 的极点 R. 连接 PQR 所成的简单三角形叫做原三角形 ABC 的*极三角形*.

我们要证明, ABO 也是 PQR 的极三角形. 因为, 据作图法, OA 与 OQ 和 OR 两直线正交, 故 A 是 QR 大圆的一个极点. 又据作图法, $\angle POA$ 是锐角, 故 A 是 PQR 的极三角形的一个顶点. 同样可证明 B 和 C 是 PQB 的极

1) 几何学家将三面体规定为过一点的三个平面所界的凸多面体. 这一部分空间完全在其三个面的每一面的同一边. 同样, 属于简单球面三角形的三个边的大圆也不穿过这三角形的面积.

三角形的另外两个顶点.

这两个三角形的边角之间有一个很重要的关系：*极三角形的边是原三角形的对应角的补角，极三角形的角是原三角形的对应边的补角.* 将 AB 和 AC 两边延长(如果需要)与 QR 大圆相交于 B' 和 C'，而作以 OA 为棱的二面角 $\angle B'OC'$. 因 OB' 与 OR 正交，OC' 与 OQ 正交；又据极三角形的作图法，$\angle C'OR$ 与 $\angle B'OQ$ 都必须是锐角；故 $\angle QOR$ 是 $\angle B'OC'$ 的补角. 这样就证明了这定理的前一半，同时也证明了其后一半节，因为这两个三角形是互为极三角形的.

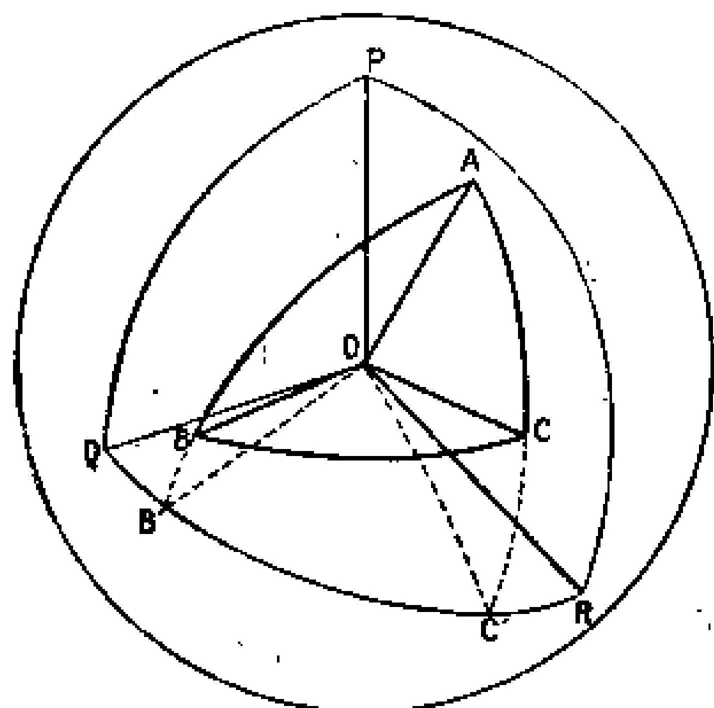


图 7

用以下字母表示这两个三角形的边和角：

	三角形 ABC	三角形 PQR
边	a, b, c	p, q, r
角	A, B, C	P, Q, R

因而有：

$$p=\pi-A \qquad P=\pi-a$$
$$q=\pi-B \qquad Q=\pi-b$$
$$r=\pi-C \qquad R=\pi-c$$

由于有这些关系，球面三角形的边角间如有一个关系式，便可立刻转换为另一个关系式(不必一定与前者有别). 例如设有

$$f(A, B, C, a, b, c)=0 \tag{1}$$

在极三角形便有

$$f(P, Q, R, p, q, r)=0$$

即

$$f(\pi-a, \pi-b, \pi-c, \pi-A, \pi-R, \pi-C)=0 \tag{2}$$

(2)式叫做(1)式的相关式. 由相关式的转换，不须新的计算，常常就能增加球而三角形的公式，有时也方便地提供了简单的证明.

§7 一阶的三角关系

所谓球而三角形的一阶关系只涉及其元素(边与角)之间的关系，二阶关系则涉及半元素，而三阶关系则涉及四分之一元素.

设 ABC 为球而三角形，$OABC$ 为其对应的三面体(图 8). 以后我们总以 a, b, c 表示其三个边，面 A, B, C 为其相对的三个角. 将 OB 棱取为正交坐标三而体的 Oz 轴，将 AR 弧放在 xOz 面内，并设 A 点的 x 坐标为负(图 8). 将 Oy 轴放在 xOz 面及含 C 点所在的一边，于是 C 点的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x&=-\sin a\cos B\\ y&=\sin a\sin R\\ z&=\cos a\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

将坐标三而体围绕 Oy 轴转过 c 角，使 Oz' 指向 OA. 在这新坐标系里，C 点的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sin b \cos A \\ y' &= \sin b \sin A \\ z' &= \cos b \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

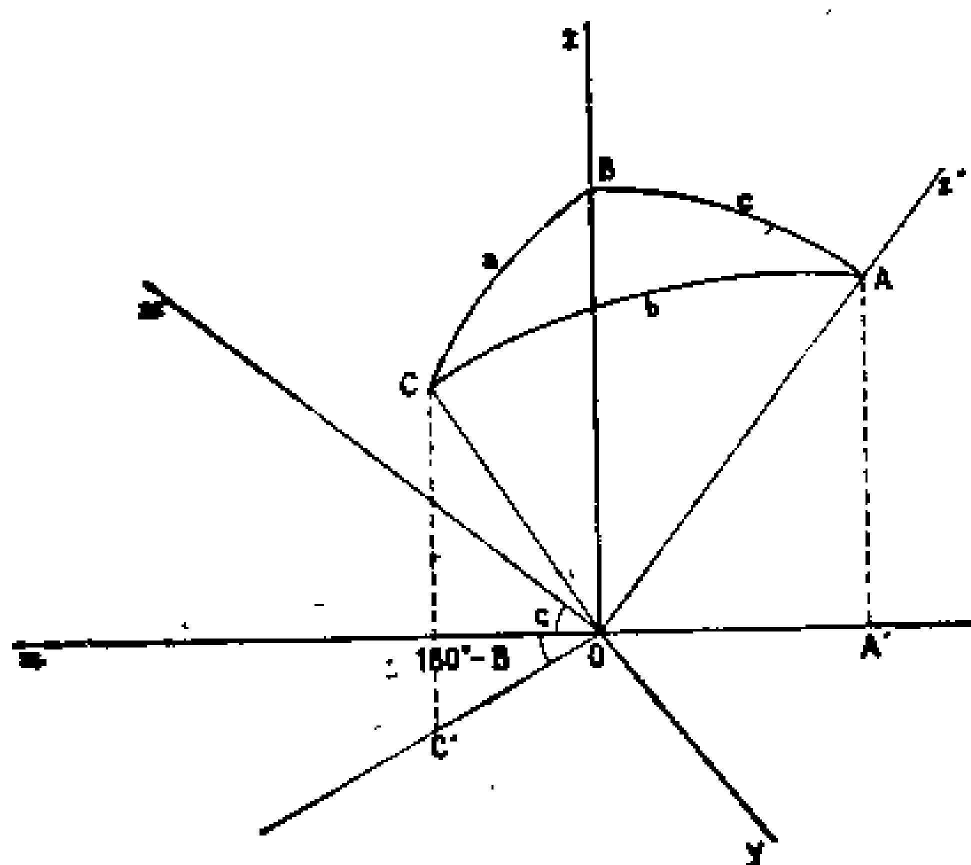


图 8

这两套坐标系应满足如下的关系式:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos c - z' \sin c \\ y &= y' \\ z &= x' \sin c + z' \cos c \end{aligned}\right\}$$

将含 x, y, z 与 x', y', z' 的 (1), (2) 两式带入最后的三式内, 便得如下只含三角形的边和角的关系式:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这些公式构成所谓高斯公式组, 表示围绕一个坐标轴旋转而引起的坐标的变化. 它们可用以解决这一类性质的问题, 以后常要用到.

在(3)的每一式里轮换字母, 可以得到三组一阶基本关系式, 以罗马数字, 分别表示如下:

组 I 第一组包括以下三式:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

每一式含有 4 个元素, 即 3 边与 1 角. 这四个元素的组合不能有其他的一阶关系式.

组 II 或正弦比例式 第二组公式可以写为两种形式:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

或

$$\left.\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}\right\} \tag{II}$$

组 II 内每个公式含有 4 个元素, 即两边与其两对角.

组 III 高斯公式组的第一式, 由轮换字母法可得五个同型的其他五式, 每边可以和其相邻的两角之一发生联系.

$$\left.\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

这是含5元素(3边与2角)的关系式。

我们容易证明，I, II, III 三组不是各自独立的，其中任何一组可从其他二组推导出来。例如，由组I里前两式消去 $\cos b$ 即得组III里的一个公式：

$$\cos a=\cos c(\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B)+\sin b\sin c\cos A$$

或 $$\sin b\sin c\cos A=\cos a\sin^2 c-\sin c\cos c\sin a\cos B$$

简化后即得 $$\sin b\cos A=\cos a\sin c-\sin a\cos c\cos B$$

组 **IV** 更有趣味的是，用相同的方法还可以建立起新的关系式。例如，从组III与组II抽出以下两式：

$$\sin b\cos C=\cos c\sin a-\sin c\cos a\cos B$$
$$\sin b\sin C=\sin c\sin B$$

两端彼此相除便得

$$\cot C=\frac{\sin a\cot c-\cos a\cos B}{\sin B}$$

轮换字母便得如下六式：

$$\left.\begin{aligned}\cos a\cos B&=\sin a\cot c-\sin B\cot C\\ \cos a\cos C&=\sin a\cot b-\sin C\cot B\\ \cos b\cos C&=\sin b\cot a-\sin C\cot A\\ \cos b\cos A&=\sin b\cot c-\sin A\cot C\\ \cos c\cos A&=\sin c\cot b-\sin A\cot B\\ \cos c\cos B&=\sin c\cot a-\sin B\cot A\end{aligned}\right\}\qquad \text{IV}$$

这些是含有4元素(2边与2角)的关系式，其中一角是两边的夹角，这是组IV与组II不同之处。

现在讨论相关转换所成的组。根据公式里所含的元素的性质，我们可以预知II与IV两组转换之后并无变化。但组I的相关组变为组Ib。

组 **Ib**

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ \cos B&=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{aligned}\right\}\qquad \text{Ib}$$

每一关系式含4元素，即3角与1边。

组 **IIIb**

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos b&=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a\\ \sin A\cos c&=\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos a\\ \sin B\cos c&=\cos C\sin A+\sin C\cos A\cos b\\ \sin B\cos a&=\cos A\sin C+\sin A\cos C\cos b\\ \sin C\cos a&=\cos A\sin B+\sin A\cos B\cos c\\ \sin C\cos b&=\cos B\sin A+\sin B\cos A\cos c\end{aligned}\right\}\qquad \text{IIIb}$$

这些是含5元素(3角与2边)的关系式。

组 V 或卡纽利公式

卡纽利(Cagnoli)推出含6元素的一阶公式，有时可用以作有益的转换。从I和Ib所取出下列两式：

$$\left.\begin{array}{l}\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B\\ \cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos b\end{array}\right\}$$

两端交叉相乘得到下列关系式:

$$-\cos A\cos C\cos b+\sin A\sin C\cos^2 b=\cos a\cos c\cos B+\sin a\sin c\cos^2 B$$

或

$$\sin A\sin C-\cos A\cos C\cos b-\sin^2 b\sin A\sin C$$
$$=\sin a\sin c+\cos a\cos c\cos B-\sin a\sin c\sin^2 B \qquad (1)$$

将组 II 内的公式两端相乘,便得如下关系式:

$$\sin^2 b\sin A\sin C=\sin a\sin c\sin^2 B$$

最后两式相加,(1)式便简化为卡纽利的公式:

$$\left.\begin{array}{l}\sin a\sin c+\cos a\cos c\cos B=\sin A\sin C-\cos A\cos C\cos b\\ \sin b\sin a+\cos b\cos a\cos C=\sin B\sin A-\cos B\cos A\cos c\\ \sin c\sin b+\cos c\cos b\cos A=\sin C\sin B-\cos C\cos B\cos a\end{array}\right\} \qquad \mathrm{V}$$

一阶公式的基本特性列入下表,以供解决各种类型的问题时选择最适宜的使用.

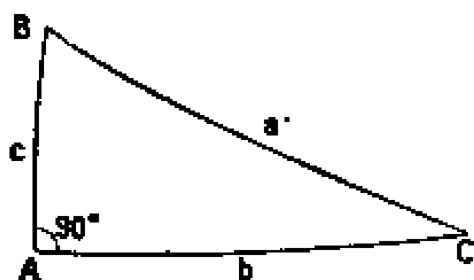
一阶公式的总结表

组		
I	4 元素:	3 边,1 角
Ib	4 元素:	1 边,3 角
II	4 元素:	2 边,2 对角
III	5 元素:	3 边,2 角
IIIb	5 元素:	2 边,3 角
IV	4 元素:	2 边,1 对角,1 夹角
V	6 元素:	3 边,3 角

§8 直角三角形和象限三角形

在普通公式里设 $A=90°$, $\cos A=0$, $\sin A=1$, 便可得适用于直角三角形的公式. 有些公式合并了,只剩余以下十式:

$$\left.\begin{array}{lll}\cos a=\cos b\cos c=\cot B\cot C & \mathrm{I}\ (1)\ 与 & \mathrm{Ib}(1)\\ \sin b=\sin a\sin B=\tan c\cot C & \mathrm{II}\ (1) & \mathrm{IV}(4)\\ \sin c=\sin a\sin C=\tan b\cot B & \mathrm{II}\ (3) & \mathrm{IV}(5)\\ \cos B=\cos b\sin C=\tan c\cot a & \mathrm{Ib}\ (2) & \mathrm{IV}(6)\\ \cos C=\cos c\sin B=\tan b\cot a & \mathrm{Ib}\ (3) & \mathrm{IV}(3)\end{array}\right\} 直角三角形\ A=90°$$



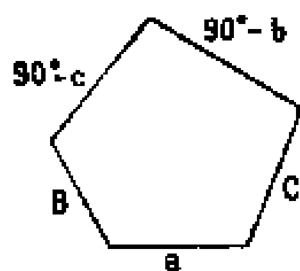


图 9

我们可以用便于记忆的内珀尔(Neper)的五角形规则来写出以上的公式. 将五角形的各边挨次写为 a, B, $90°-c$, $90°-b$ 与 C, 如图 9 所示. 我们可以写出五角形任何一边的余弦,它们等于: 1)两对边的正弦之积; 2)两邻边的余切之积.

以上公式的相关公式也可应用于象限三角形, 即一边 a 为直角的情形. 这可令

$a=90°$, $\cos a=0$, $\sin a=1$, 代入普通公式 Ib 加以推导出来:

$$\left.\begin{aligned}&\cos A=-\cos B\cos C=-\cot b\cot c\\&\sin B=\sin A\sin b=\tan C\cot c\\&\sin C=\sin A\sin c=\tan B\cot b\\&\cos b=\cos B\sin c=-\tan C\cot A\\&\cos c=\cos C\sin b=-\tan B\cot A\end{aligned}\right\}\text{象限三角形 } a=90°$$

在象限三角形的情形，内珀尔五角形的各边挨次写为 $180°-A$, b, $90°-C$, $90°-B$ 与 c (图 10)。五角形任何一边的余弦仍然等于：1)两对边的正弦之积; 2)两邻边的余切之积.

附注：我们常可将直角三角形联系到象限三角形，而只用直角三角形的公式。如图 10,将象限三角形的 BA 边延长一段 c' 弧,使其等于 c 边的余角. 于是 $BA'C$ 为双象限三角形，因而也是双直角三角形，而 $AA'C$ 三角形的 A' 角便是直角. 设以带有一撇的字母来表示这个相关的直角三角形的元素，即

$$B'=180°-A \qquad C'=90°-C \qquad a'=b \qquad b'=B \qquad c'=90°-c$$

于是便可立刻看出，象限三角形的一个式于，如

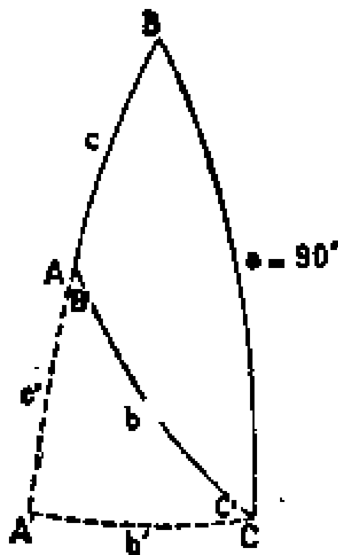
$$\cos A=-\cos B\cos C=-\cot b\cot c$$

与直角三角形的一个式子

$$\cos B'=\cos b'\sin C'=\cot a'\tan c'$$

是等价的.

实际上，我们常常将象限三角形的解归化到相邻的直角三角形去.



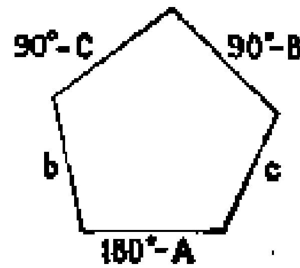


图 10

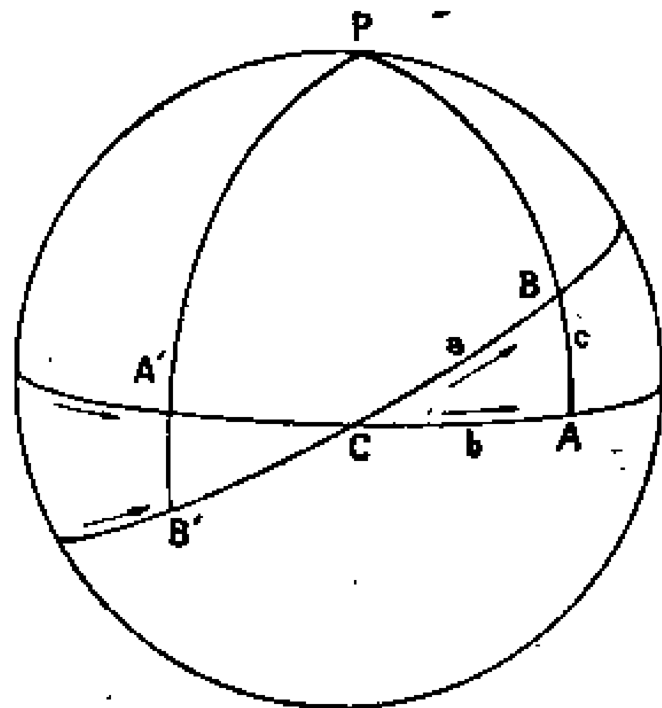


图 11

在结束这一节以前，我们还要作一个重要的附注. 我们常常要讨论一个球而三角形，其元素间的关系是这样的(图 11)：一边 AC 弧，属于基本面上的大圆，BC 弧属于另外一个固定的大圆，AB 弧属于过坐标的极点面在移动的半大圆上. 只有当 CA 小于 $180°$ 时，ABC 才形成一个直角三角形，才可有效地使用本节开始所列的公式.

但是 b 的数值可以超过 $180°$. 例如，A 点循箭头的方向来到 A' 点，由于 CA' 与 CB' 两边相交于过 C 的直径的相反的一点，$CA'B'$ 不复是一个球面三角形了. 但是我们容易说明，直角三角形的公式在 a 和 b 之值超过 $180°$ 之时仍然可以使用. 不过，这须承认如下两个条件：把 $A'B'$ 作为负数，以及把 $CA'B'$ 图形内的 B' 角改用它的补角来代替. 当 a 和 b 均超过 $180°$ 时，在不含 B' 的公式里，须将 C 角改为负数. 当顶点 A 越过与 C 点直

径相反之点时，c 边因通过零而变号．证明时，只须对于简单三角形 $CA'B'$ 应用直角三角形的公式，但须将其元素表示为我们所讨论的图形的元素的函数．

§9 二阶和三阶关系式

在这些关系式中，元素不是元素本身，而是半元素．通常，这对于对数计算有利，用真数表与计算机去计算亦很相宜．此外，在这些公式里，未知角度表示为它们的正切，因而不怕在正弦和余弦里可能产生的难于确定其对数的情形．一阶公式适于解决和讨论理论问题，但作数字计算则使用二阶公式比较便利．

1. 波达(Borda)公式

将组 I 的第一式对于 A 写为

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

并作如下的组合：

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}=2\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c}$$

$$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}=2\frac{\sin\frac{1}{2}(-a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin b\sin c}$$

为简化写法，设

$$a+b+c=2p$$

于是有

$$-a+b+c=2(p-a)$$
$$a-b+c=2(p-b)$$
$$a+b-c=2(p-c)$$

上面的两式就转化为

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}$$

于是得

$$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}$$

在简单三角形里，$\frac{1}{2}A$ 弧的三角函数概是正的，故可写出以下的公式，而没有符号上的含糊：

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p\sin(p-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}\end{aligned}\right\}\text{波达公式}$$

在这个形式下的波达公式，使用对数去求三个角是很方便的．若用计算机只求一个角，使用由 $1-\cos A$ 与 $1+\cos A$ 推出的下式更为方便：

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\cos a-\cos(b+c)}}$$

现在，我们来推导波达公式的相关式，虽然它们的用途不大．这里我们提出一个量，名叫球面过剩 σ，其定义为：

$$\sigma=A+B+C-\pi$$

与 $2p$ 相关的量是

$$3\pi-(A+B+C)=2\pi-\sigma$$

因此还应以 $\pi-a$ 代替 $A\cdots$，以及

$$\pi-\frac{\sigma}{2}\ \text{代替}\ p$$

$$A-\frac{\sigma}{2}\quad p-a$$

$$B-\frac{\sigma}{2}\quad p-b$$

$$C-\frac{\sigma}{2}\quad p-c$$

这样便得到如下形式的三式：

$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\sigma}{2}\sin\left(A-\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\sigma}{2}\right)}}$$

值得注意的是，在平面三角学里没有与这相对应的公式．在欧几里德平面三角形里，若已知三个角，并不能决定三个边．但是，球面三角形的三个边可以由其三个角来决定，不过三角之和必须大于 π，而每一个角则须小于二直角．

2．达郎贝尔(Delambre)公式

从组 II，III 与 IIIb 取出一端含 $\sin a$ 或 $\cos a$，而另一端含 $\sin A$ 或 $\cos A$ 的下列各式：

$$\left.\begin{aligned}
&\sin a\sin B=\sin b\sin A\\
&\sin a\sin C=\sin c\sin A\\
&\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A\\
&\sin a\cos C=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos A\\
&\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a=\sin A\cos b\\
&\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos a=\sin A\cos c
\end{aligned}\right\}$$

将同组的两式两端相加或相减，更得到如下六个新的公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\sin a(\sin B\pm\sin C)=\sin A(\sin b\pm\sin c)\\
&\sin a(\cos B\pm\cos C)=\pm(1\mp\cos A)\sin(b\pm c)\\
&(1\pm\cos a)\sin(B\pm C)=\pm\sin A(\cos b\pm\cos c)
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

用基本转换式将(1)内各式展开如下:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)\\
&=\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b-c)\\
&\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)\\
&=\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}(b+c)\\
&\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)\\
&=\sin^2\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b+c)\\
&\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(B-C)\\
&=\cos^2\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}(b-c)\\
&\cos^2\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C)\\
&=\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b-c)\\
&\sin^2\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B-C)\\
&=\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}(b-c)
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

令:

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\alpha\qquad\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\beta$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\gamma\qquad\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}=\delta$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\alpha'\qquad\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}=\beta'$$

$$\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2}=\gamma'\qquad\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}=\delta'$$

容易校验,(2)内六个关系式可表为以下乘积的等式:

$$\alpha\delta=\alpha'\delta'\qquad\alpha\beta=\alpha'\beta'\qquad\beta\delta=\beta'\delta'$$

$$\beta\gamma=\beta'\gamma'\qquad\gamma\delta=\gamma'\delta'\qquad\alpha\gamma=\alpha'\gamma'$$

由此立即推得:

$$\alpha^2=\alpha'^2\qquad\beta^2=\beta'^2\qquad\gamma^2=\gamma'^2\qquad\delta^2=\delta'^2$$

最后, $\alpha=\pm\alpha'\qquad\beta=\pm\beta'\qquad\gamma=\pm\gamma'\qquad\delta=\pm\delta'$

以上四式右端的正号或负号应该单值使用,而且正号适用于简单三角形. 对于这一情形,达郎布尔公式可以写为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\\
\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}
\end{aligned}\right\}\text{达郎布尔公式(简单三角形)}$$

轮换字母可得同类的八个公式．因达郎布尔公式里每一个含有三角形的六个元素，故很少有人使用．

3．内珀尔类比式

将达郎布尔的公式两端相除，便得到含5个元素的新公式，其符号并无含糊之处．下面列出为首的四式：

$$\left.\begin{aligned}
\tan\frac{B-C}{2}&=\cot\frac{A}{2}\,\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\\
\tan\frac{B+C}{2}&=\cot\frac{A}{2}\,\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\\
\tan\frac{b-c}{2}&=\tan\frac{a}{2}\,\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\\
\tan\frac{b+c}{2}&=\tan\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}
\end{aligned}\right\}\text{内珀尔类比式}$$

我们也容易直接推出这些公式．从(1)式内选出合适的两式两两相除得

$$\frac{\sin B\pm\sin C}{\cos B+\cos C}=\frac{\sin A}{1-\cos A}\,\frac{\sin b\pm\sin c}{\sin(b+c)}$$

简化后便得为首两个内珀尔类比式，其余两式可用相关法求得．

前两个类比式含3角与2边，因面其作用如组 IIIb．后两个类比式含3边与2角，故可用以代替组 III．这些公式常用于三角形的数字解．

4．吕利耶(L' Huillier)公式

我们要去推导一个三阶公式，它容易提供球面过剩，可用以验算已经解出的三角形的元素．根据球面过剩的定义可以写出以下的等式：

$$\cos\frac{\sigma}{2}=\sin\frac{A+B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

利用达郎布尔公式，这式的右端还可写为

$$\cos\frac{\sigma}{2}=\frac{1}{\cos\frac{a}{2}}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}\left[(1-\cos A)\cos\frac{b+c}{2}+(1+\cos A)\cos\frac{b-c}{2}\right]$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\sin b\sin c\cos A}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

但据组 I 有 $\qquad \sin b\sin c\cos A=\cos a-\cos b\cos c$

$$=2\left[\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1-2\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}\right]$$

故最后得

$$\cos\frac{\sigma}{2}=\frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

和

$$\tan^2\frac{\sigma}{4}=\frac{1-\cos\frac{\sigma}{2}}{1+\cos\frac{\sigma}{2}}=\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}+1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}$$

有名的转换式[1]给出:

$$2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}+1$$

$$=4\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}$$

$$2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1$$

$$=4\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}$$

于是推得吕利耶公式为

$$\tan^2\frac{\sigma}{4}=\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}$$

§ 10 球面三角形的解法

已知球面三角形的 3 个元素，常常就可以计算其他 3 个元素。我们将简略地说明各

1) 这些转换式可以用于任何三个角，不一定是球面三角形的三边。我们用这一节里某些计算可以推导出这些转换式。回转到披达公式的推导过程，可由

$$4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=(1-\cos A)(1+\cos A)$$

得出

$$4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)=[\cos(b-c)-\cos a][\cos a-\cos(b+c)]$$
$$=2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+1$$

将这些等式应用于 $a/2,\ b/2,\ c/2$，然后再用于它们的补角，便得到这两个转换式。

种解法的性质，而不涉及其实际的情况．一个天文问题需要从三角形求解答时，一般保证至少可能有一解．若有二解，由问题的具体条件常可剔出其不适合的一解．

容易了解，我们可以从已知的 3 个元素作出六个不同的组合，而且它们两两相关，如 3 边或 3 角；2 边与 1 夹角或 2 角与 1 共边；2 边与 1 对角或 2 角与 1 对边．天文中最常见的情形是已知 2 边或 3 边．我们在下面将举出几个用数字求解的例子．

如果所要求解的三角形是直角三角形或象限三角形，我们不能任意给出其三边(或三角)的数值．§8 里的公式已经提供了这一特殊问题的全部解答，不必再加解释．我们只在这一节的末尾给出一个各种情形的表，并附以一个数字解的例题．

若用希隆(Schrön)的 7 位对数表计算(如下面所举的例)，因这个表在第七位数上可能有 $\frac{1}{4}$ 单位之差，因而用一种特殊的排版法，可以保留到第八位小数，其精密度为这第八位数的 2 或 3 个单位．三角真数的数值是从 6 位小数表取出的，自变数的间距为百分之一度[1]．

最仔细的计算者亦难免不犯错误．一切计算都应该做两遍，最好使用不同的方法，或用不同的公式去作验算．如果用内珀尔类比式计算，便等于用第一方式去作验算；这些公式对于同一元素提供两个不同的表达式，我们可将两个同时使用．在别的情形，我们可用吕利耶公式、正弦比例式、卡组利式或达郎布尔式去作验算．

第一类：已知 $a,\ b,\ c$ 求 $A,\ B,\ C$．

第一解　组 I 里的公式立刻就提供了问题的解，因为(图 12)

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

我们用对数计算这个公式，但也可将其写为如下的形式，而用真数计算：

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{2\cos a-\cos(b+c)-\cos(b-c)}{\cos(b-c)-\cos(b+c)}\\ \cos B&=\frac{2\cos b-\cos(c+a)-\cos(c-a)}{\cos(c-a)-\cos(c+a)}\\ \cos C&=\frac{2\cos c-\cos(a+b)-\cos(a-b)}{\cos(a-b)-\cos(a+b)}\end{aligned}\right\}$$

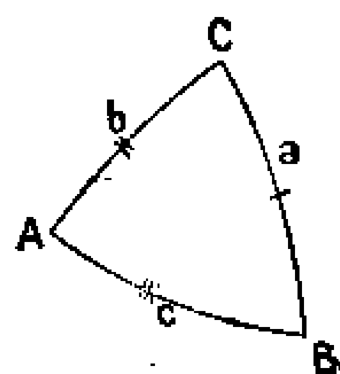


图 12

第二解　波达公式便于用对数计算．我们开始求出下式的对数：

$$P=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$$

然后求

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{P}{\sin(p-a)}\qquad \tan\frac{B}{2}=\frac{P}{\sin(p-b)}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{P}{\sin(p-c)}$$

我们可用正弦比例式或吕利耶公式去验算．一个数字计算的例子见表 I．

第三解　我们还可据以下的公式求半角的正切．在此计算里可使用真数表和平方根表[如巴罗表(Barlow's Tabl'es)]．

1) Danjon, Tables des fonctions tigonometriques.

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\cos a-\cos(b+c)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(c-a)-\cos b}{\cos b-\cos(c+a)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(a-b)-\cos c}{\cos c-\cos(a+b)}}\end{aligned}\right\}$$

读者在表 II 里可以看见这些公式，它们曾在表 I 里用来计算过一个问题.

第二类：已知 A, B, C 求 a, b, c.

这是第一类的相关情形(图 13). 我们可以用组 Ib 里的公式或波达公式的相关式去解. 由于在天文学里没有这一类情形，我们不在此讨论，亦不举出数字的例子.

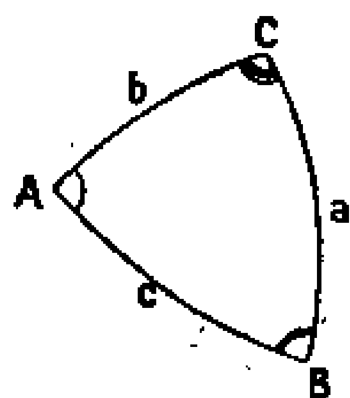


图 13

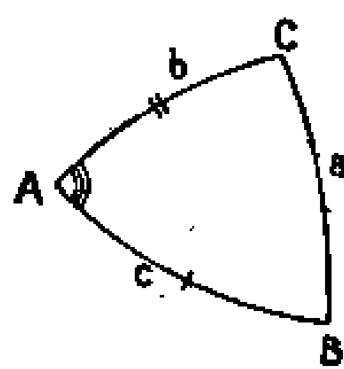


图 14

第三类：已知 b, c, A 求 a, B, C.

第一解 这里的已知条件是两边及其夹角(图 14). 正像一般常见的情形那样，如果只需要知道第三边与一未知的角，可使用高斯公式组:

$$\left.\begin{aligned}&\sin a\sin B=\sin b\sin A\\ &\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A\\ &\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\end{aligned}\right\}$$

作如下的设计，可使这些公式便于对数计算，例如设:

$$\left.\begin{aligned}m\sin M&=\sin b\cos A\\ m\cos M&=\cos b\end{aligned}\right\}\text{ 或 }\left.\begin{aligned}\tan M&=\tan b\cos A\\ m&=\cos b\sec M\end{aligned}\right\}$$

上面的高斯公式组便可写为:

$$\left.\begin{aligned}&\sin a\sin B=\sin b\sin A\\ &\sin a\cos B=m\sin(c-M)\\ &\cos a=m\cos(c-M)\end{aligned}\right\}$$

于是

$$\tan B=\frac{\sin b\sin A}{m\sin(c-M)}$$

和

$$\tan a=\frac{\tan(c-M)}{\cos B}\quad\text{或}\quad\cos a=m\cos(c-M)$$

我们可用类似的公式(由于轮换字母 b 和 c) 去求 C 角和 a 边，这样就提供了一个很好的验算. 表 III 给出一个数字解的例子.

第二解 若使用计算机，可直接利用高斯公式组，但更好的办法是使乘号尽量减少. 例如，可将高斯组写作:

$$\left.\begin{aligned} 2\sin a\sin B&=\cos(b-A)-\cos(b+A)\\ 2\sin a\cos B&=\sin(b+c)-\sin(b-c)-\cos A[\sin(b+c)+\sin(b-c)]\\ 2\cos a&=\cos(b+c)+\cos(b-c)-\cos A[\cos(b+c)-\cos(b-c)] \end{aligned}\right\}$$

一个数字解的例见表 IV.

第三解 如果要同时求出三个未知数，最便当的解法是用内珀尔的类比式．先求得 $\frac{1}{2}(B+C)$ 与 $\frac{1}{2}(B-C)$，然后由加减法得到 B 与 C，最后用两个表达 a 的公式求 a，更提供了一种很好的验算.

$$\tan\frac{B-C}{2}=\cot\frac{A}{2}\frac{\sin\dfrac{b-c}{2}}{\sin\dfrac{b+c}{2}}\qquad \tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}\frac{\cos\dfrac{b-c}{2}}{\cos\dfrac{b+c}{2}}$$

$$\tan\frac{a}{2}=\tan\frac{b-c}{2}\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}=\tan\frac{b+c}{2}\frac{\cos\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$$

表 V 内有一个应用这些公式的数字解例.

第四类：已知 a, B, C 求 b, c, A.

这里给出一边和两个邻角(图 15)．这是和前一类相关的情形，可用类似的方法去解．适当地解出以下公式组，可以提供 b 和 A:

$$\left.\begin{aligned} \sin b\sin A&=\sin a\sin B\\ \cos b\sin A&=\sin C\cos B+\sin B\cos C\cos a\\ \cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a \end{aligned}\right\}$$

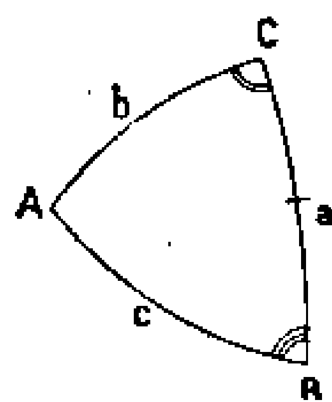


图 15

至于未知数 c，可用相同的方法或用正弦比例式从 C, b 与 B 去求得.

我们可用内珀尔类比式(写为如下的形状)去求 b, c 与 A，这些公式也提供了验算.

$$\tan\frac{b+c}{2}=\tan\frac{a}{2}\frac{\cos\dfrac{B-C}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}}\qquad \tan\frac{b-c}{2}=\tan\frac{a}{2}\frac{\sin\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{B+C}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}\frac{\cos\dfrac{b-c}{2}}{\cos\dfrac{b+c}{2}}=\cot\frac{B-C}{2}\frac{\sin\dfrac{b-c}{2}}{\sin\dfrac{b+c}{2}}$$

由于这是不常见的情形，而且与前一类相似，我们便不提出数字解的例了.

第五类：已知 a, b, A 求 c, B, C.

第一解 若已知两边及其一边的对角(图 16)，正弦比例式立刻提供了另一边的对角：

$$\sin B=\frac{\sin b\sin A}{\sin a}$$

如果问题是可能的，便有两个解，即 B 角有互为补角的两个解答．在实际问题中，不难区别出合适的那个解．B 角决定以后，内珀尔类比式便不含糊地决定了 c 与 C 两个元素，并提供了两个解答以便验算．

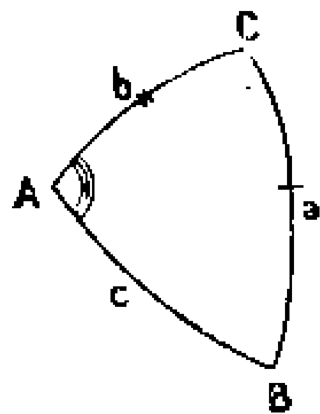


图 16

$$\tan\frac{c}{2}=\tan\frac{a+b}{2}\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{a-b}{2}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\cot\frac{A+B}{2}\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}=\cot\frac{A-B}{2}\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

计算的布局在表 VI 内给出．

如果 B 角接近直角，它的数值当用以上公式算得时，便不很确定了．就物理意义看，这问题本身就不是很确定的，因为观测所提供的数据不能使所求的未知数达到很高的精确度[1]．

若已知角有一小的增量，则所求的 B 角的增量 dB 为下式所给出(这是可由正弦比例式推出的)：

$$dB=\tan B\left(\frac{dA}{\tan A}+\frac{db}{\tan b}-\frac{da}{\tan a}\right)$$

若 $\tan B$ 的数值很大，未知数 B 对于给出元素的细小变化便很敏感．例如，在表 VI 的数字解里便有

$$dB=21.5dA+17.7db+29.9da$$

设若已知元素里每个的误差为 $0''.01$，则在最不利的情形下，B 角的误差便可达到 $0''.7$．

第二解 可以不先计算 B，而直接求 C 与 c．以下的公式是分别从组 IV 与组 I 取出的，提供了含 C 与 c 的简单三角方程式：

$$\left.\begin{aligned}\cos b\cos C&=\sin b\cot a-\cot A\sin C\\ \cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\end{aligned}\right\}$$

如令

$$\left.\begin{aligned}\tan M&=\cos b\tan A\\ \tan N&=\cos A\tan b\end{aligned}\right\}$$

则以上两方程式可写为

$$\left.\begin{aligned}\sin(M+C)&=\tan b\cot a\sin M\\ \cos(c-N)&=\cos a\cos N\sec b\end{aligned}\right\}$$

不要以为在 B 接近直角时这组公式比上面的一组更好用一些．事实上，可以证明，在这一情形下，$\sin(M+c)$ 与 $\cos(c-N)$ 之值跟 1 相当接近．这问题数字解的不确定是本质上的，不能由计算上的设计而得到解决．譬如，设取 $\tan\frac{1}{2}C$ 为未知数，则要求解的二次方程式的判别式便是一个很小的数(因为两个根彼此很接近)，因面所得的有效数字的位数很少，其平方根(数量级显然更高一些)便不能确定．

1) 例如拱极星的时角，根据其在大距(见 § 25)附近的地平经度的测量所算得的值，便不精密．

表 VII 内所讨论的例子，与以上几例所讨论的三角形相同，我们特别选择 B 角很接近于 90° 的情形.

第六类：已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 求 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{C}$.

这一类给出两角与一角的对边(图 17)，是以上一类的相关情形．我们可用相同的方法去求解，正弦比例式给出的 b 边有互为补角的两个数值，可在其中选择合适的一个．其他两个未知元素可由内珀尔类比式算出，如前一类所处理的那样.

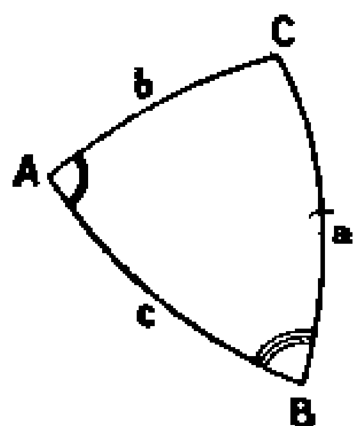


图 17

第六类的解在天文学的实际问题里很少有，故不举例去加以说明.

下面列出本节所举各种类型的数字计算表，并附以直角三角形解法的公式表．据本节里的一个附注，我们可将象限三角形化为直角三角形去求解，所以我们不须为象限三角形另立一个计算表；如有需要，还可以利用 § 8 里的公式.

表 I

第一类 已知：a, b, c；求：A, B, C

(5 位对数)

$$P=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{P}{\sin(p-a)};\qquad \tan\frac{B}{2}=\frac{P}{\sin(p-b)};\qquad \tan\frac{C}{2}=\frac{P}{\sin(p-c)}$$

已知 $a=47°12'32''.9$	$p-a=29°16'26''.9$	$\log\sin(p-a)=\bar{1}.68929\ 9$
已知 $b=61°46'\ 9''.1$	$p-b=14°42'50''.7$	$\log\sin(p-b)=\bar{1}.40482\ 6$
已知 $c=43°59'17''.6$	$p-c=32°29'42''.2$	$\log\sin(p-c)=\bar{1}.73016\ 1$
$2p=152°57'59''.6$	核验	和 $\bar{2}.82428\ 6$
$p=76°28'59''.8$	$\Sigma=76°28'59''.8=P$	$\log\sin p=\bar{1}.98780\ 0$
		$2\log P=\bar{2}.83648\ 6$
$\log P\ \bar{1}.41824\ 2$	$\log P\ \bar{1}.41824\ 3$	$\log P\ \bar{1}.41824\ 3$
$\log\sin(P-2)\ \bar{1}.68929\ 9$	$\log\sin(p-b)\ \bar{1}.40482\ 6$	$\log\sin(p-c)\ \bar{1}.73016\ 1$
$\log\tan\frac{A}{2}\ \bar{1}.72894\ 4$	$\log\tan\frac{B}{2}\ 0.01841\ 7$	$\log\tan\frac{C}{2}\ \bar{1}.68808\ 2$
$\frac{A}{2}\ 28°10'44''.8$	$\frac{B}{2}\ 45°53'6''.2$	$\frac{C}{2}\ 25°59'41''.6$
$A=56°21'29''.6$	$B=91°46'12''.4$	$C=51°59'23''.2$

用正弦类比式核验

$\log\sin a\ \bar{1}.86560\ 0$	$\log\sin b\ \bar{1}.94500\ 1$	$\log\sin c\ \bar{1}.84167\ 8$
$\log\sin A\ \bar{1}.92039\ 4$	$\log\sin B\ \bar{1}.99979\ 0$	$\log\sin C\ \bar{1}.89646\ 9$
差：$\bar{1}.94520\ 6$	$\bar{1}.94521\ 1$	$\bar{1}.94520\ 9$

解答 $\begin{cases} A=56°21'29''.6 \\ B=91°46'12''.4 \\ C=51°59'23''.2 \end{cases}$

表 II

第一类　已知 a, b, c，求 A, B, C

(6 位真数表)

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\cos a-\cos(b+c)}}\qquad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\cos(c-a)-\cos b}{\cos b-\cos(c+a)}}\qquad \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\cos(a-b)-\cos c}{\cos c-\cos(a+b)}}$$

已知

$a=47^{\circ}.20913$	$b=61^{\circ}.76919$	$c=43^{\circ}.98822$
$b-c=17^{\circ}.78097$	$c-a=-3^{\circ}.22091$	$a-b=-14^{\circ}.56006$
$b+c=105^{\circ}.75741$	$c+a=91^{\circ}.19735$	$a+b=108^{\circ}.97832$
$\cos(b-c)\ 0.952230\ 9$	$\cos(c-a)\ 0.998420\ 1$	$\cos(a-b)\ 0.967884\ 7$
$\cos a\ 0.679324\ 1$	$\cos b\ 0.473024\ 5$	$\cos c\ 0.719482\ 5$
$\cos(b+c)\ -0.271564\ 5$	$\cos(c+a)\ -0.020895\ 9$	$\cos(a+b)\ -0.325210\ 3$
$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{0.272906\ 8}{0.950888\ 6}$	$\tan^2\frac{B}{2}=\frac{0.525395\ 6}{0.493920\ 4}$	$\tan^2\frac{C}{2}=\frac{0.248402\ 2}{1.044692\ 8}$
$=0.287001\ 9$	$=1.063725\ 2$	$=0.237775\ 4$
$\tan\frac{A}{2}=0.535725\ 6$	$\tan\frac{B}{2}=1.031370\ 5$	$\tan\frac{C}{2}=0.487622\ 2$
$\frac{A}{2}=28^{\circ}.179093$	$\frac{B}{2}=45^{\circ}.884751$	$\frac{C}{2}=25^{\circ}.994870$
$A=56^{\circ}.35819$	$B=91^{\circ}.76950$	$C=51^{\circ}.98974$

$$\text{解答}\begin{cases}A=56^{\circ}.35819=56^{\circ}21'29''.5\\ B=91^{\circ}.76950=91^{\circ}46'10''.2\\ C=51^{\circ}.98974=51^{\circ}59'23''.1\end{cases}$$

表 III

第三类　已知 b, c, A，求 a, B

第一解　(7 位对数表)

$$\tan M=\tan b\cos A,\quad m=\cos b\sec M\qquad \tan B=\frac{\sin b\sin A}{m\sin(c-M)}\qquad \cos a=m\cos(c-M)\ \text{或}\ \tan a=\tan(c-M)\sec B$$

$$\text{已知}\begin{cases}b=61^{\circ}46'\ 9''.10\\ c=43^{\circ}59'17''.59\\ A=56^{\circ}21'29''.29\end{cases}$$

$\log\tan b\ 0.2701165\ 3$	$\log\sin b\ \ \bar{1}.9450002\ 1$	$\log\tan(c-M)\ \bar{2}.5231810\ 0$
$\log\cos A\ \bar{1}.7435097\ 7$	$\log\sin A\ \ \bar{1}.9203929\ 3$	$\log\sec B\ 1.5103421\ 1$
$\log\tan M\ 0.0136263\ 0$	$\bar{1}.8653931\ 4$	$\log\tan a\ 0.0335231\ 1$
$M=45^{\circ}53'55''.320$	$\log m\ \ \bar{1}.8323186\ 8$	$a=47^{\circ}12'32''.877$
$c-M=-1^{\circ}54'37''.730$	$\log\sin(c-M)\ \ \bar{2}.5229395\ 0n$	
	$\bar{2}.3552581\ 8n$	
$\log\cos b\ \bar{1}.6748836\ 6$	$\log\tan B\ \ 1.5101349\ 6n$	
$\log\sec M\ 0.1574350\ 2$	$B=91^{\circ}46'10''.185$	
$\log m=\bar{1}.8323186\ 8$		

核验

$\log\sin a\ \bar{1}.8656002\ 8$	$\log\sin b\ \bar{1}.9450002\ 1$
$\log\sin A\ \bar{1}.9203929\ 3$	$\log\sin B\ \bar{1}.9997928\ 6$
差 $\bar{1}.9452073\ 5$	差 $\bar{1}.9452073\ 5$

$$\text{解答}\begin{cases}a=47^{\circ}12'32''.88\\ B=91^{\circ}46'10''.19\end{cases}$$

表 IV

第三类　已知 b, c, A，求 a, B

(六位真数表)

$$2\sin a\sin B=\cos(b-A)-\cos(b+A)$$
$$2\sin a\cos B=\sin(b+c)-\sin(b-c)-\cos A[\sin(b+c)+\sin(b-c)]$$
$$2\cos a=\cos(b+c)+\cos(b-c)-\cos A[\cos(b+c)-\cos(b-c)]$$

已知 $\begin{cases} b=61°.76919 & b+c=105°.75741 \\ c=43°.98822 & b-c=17°.78097 \\ A=56°.35814 & \cos A=0.554000\ 0 \end{cases}$

$b-A$	$=5°.41105$	$\sin(b+c)$	0.962420 2	$\cos(b+c)$	−0.271564 5
$b+A$	$=118°.12733$	$\sin(b-c)$	0.305379 1	$\cos(b-c)$	0.952230 9
		S	1.267799 3	D	−1.223795 4
		$-S\cos A$	−0.702360 8	$-D\cos A$	0.677982 7
$\cos(b-A)$	0.995544 2	$+\sin(b+c)$	0.962420 2	$+\cos(b+c)$	−0.271564 5
$\cos(b+A)$	−0.471432 9	$-\sin(b-c)$	−0.305379 1	$+\cos(b-c)$	0.952230 9
$2\sin a\sin B$	1.466977 1	$2\sin a\cos B$	−0.045319 7	$2\cos a$	1.358649 1
		$\cot B$	−0.030893 2	$\cos a$	0.679324 6
		B	91°.76950	a	47°.20909

解答 $\begin{cases} a=47°.20909=47°12'32''.7 \\ B=91°.76950=91°46'10''.2 \end{cases}$

表 V

第三类　已知 b, c, A，求 a, B, C

第三解　(7 位对数表)

$$\tan\frac{B-C}{2}=\cot\frac{A}{2}\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\quad \tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\quad \tan\frac{a}{2}=\tan\frac{b-c}{2}\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}=\tan\frac{b+c}{2}\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

已知 $\begin{cases} b=61°46'\ 9''.10 & b+c=105°45'26''.69 \\ c=43°59'17''.59 & b-c=17°46'51''.51 \\ A=56°21'29''.29 & \end{cases}$

$\frac{b+c}{2}=52°52'43''.345$

$\frac{b-c}{2}=\ 8°53'25''.755$

$\frac{A}{2}=28°10'44''.645$

$\log\cot\frac{A}{2}$	0.2710580 7	$\log\cot\frac{A}{2}$	0.2710580 7
$\log\sin\frac{b-c}{2}$	$\bar{1}$.1890587 9	$\log\cos\frac{b-c}{2}$	$\bar{1}$.9947505 8
$\log\operatorname{cosec}\frac{b+c}{2}$	0.0983457 1	$\log\sec\frac{b+c}{2}$	0.2193195 9
$\log\tan\frac{B-C}{2}$	$\bar{1}$.5584625 7	$\log\tan\frac{B+C}{2}$	0.4851282 4
$\frac{B-C}{2}=$	19°53'23''.533	$\frac{B+C}{2}=$	71°52'46''.645
$B=$	91°46'10''.178	$C=$	51°59'23''.112
$\log\tan\frac{b-c}{2}$	$\bar{1}$.1943081 9	$\log\tan\frac{b+c}{2}$	0.1209738 6
$\log\sin\frac{B+C}{2}$	$\bar{1}$.9779088 1	$\log\cos\frac{B+C}{2}$	$\bar{1}$.4927205 6
$\log\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$	0.4682487 1	$\log\sec\frac{B-C}{2}$	0.0267112 6
$\log\tan\frac{a}{2}$	$\bar{1}$.6404657 1	$\log\tan\frac{a}{2}$	$\bar{1}$.6404656 8
$\frac{a}{2}=$	23°36'16''.440	$\frac{a}{2}=$	23°36'16''.436(核验)

$a=47°12'32''.876$

解答 $\begin{cases} a=47°12'32''.88 \\ B=91°46'10''.17 \\ C=51°59'23''.11 \end{cases}$

表 VI

第五类 已知 a, b, A, 求 c, B, C

7 位对数表

$$\sin B=\sin b\sin A\,\mathrm{cosec}\,a$$

$$\tan\frac{c}{2}=\tan\frac{a+b}{2}\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{a-b}{2}\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\cot\frac{A+B}{2}\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}=\cot\frac{A-B}{2}\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

已知 $\begin{cases} a=47°12'32''.87 \\ b=61°46'\ 9''.10 \\ A=56°21'29''.29 \end{cases}$

$\log\sin b$	$\bar{1}.9450002\ 1$
$\log\sin A$	$\bar{1}.9203929\ 3$
$\log\mathrm{cosec}\,a$	$0.1343997\ 3$
$\log\sin B$	$\bar{1}.9997928\ 7$

B 91°46'10''.08

$A+B$	148° 7'39''.37	$a+b$	180°58'41''.97
$A-B$	−35°24'40''.79	$a-b$	−14°33'36''.23
$\frac{1}{2}(A+B)$	74°3'49''.685	$\frac{1}{2}(a+b)$	54°29'20''.985
$\frac{1}{2}(A-B)$	−17°42'20''.395	$\frac{1}{2}(a-b)$	−7°16'48''.115

$\log\tan\frac{1}{2}(a+b)$	$0.1465582\ 6$	$\log\tan\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{1}.1063566\ 2n$
$\log\cos\frac{1}{2}(A+B)$	$\bar{1}.4386480\ 0$	$\log\sin\frac{1}{2}(A+B)$	$\bar{1}.9829800\ 3$
$\log\sec\frac{1}{2}(A-B)$	$0.0210750\ 9$	$\log\mathrm{cosec}\frac{1}{2}(A-B)$	$0.5169446\ 7n$
$\log\tan\frac{c}{2}$	$\bar{1}.6062813\ 5$	$\log\tan\frac{c}{2}$	$\bar{1}.6062813\ 2$
$\frac{c}{2}$	21°59'38''.85	$\frac{c}{2}$	21°59'38''.85 (核验)

$\log\cot\frac{1}{2}(A+B)$	$\bar{1}.4556679\ 9$	$\log\cot\frac{1}{2}(A-B)$	$0.4958695\ 6n$
$\log\cos\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{1}.9964848\ 3$	$\log\sin\frac{1}{2}(a-b)$	$\bar{1}.1028414\ 5n$
$\log\sec\frac{1}{2}(a+b)$	$0.2359308\ 3$	$\log\mathrm{cosec}\frac{1}{2}(a+b)$	$0.0893725\ 9$
$\log\tan\frac{C}{2}$	$\bar{1}.6880836\ 5$	$\log\tan\frac{C}{2}$	$\bar{1}.6880836\ 0$
$\frac{C}{2}$	25°59'41''.64	$\frac{C}{2}$	25°59'41''.63 (核验)

解答 $\begin{cases} c=43°59'17''.7 \\ B=91°46'10''.1 \\ C=51°59'23''.3 \end{cases}$

表 VII

第五类 已知 a, b, A, 求 c, C

第二解 (7 位对数表)

$\tan M = \cos b \tan A$ $\qquad$ $\sin(M+C) = \tan b \cot a \sin M$

$\tan N = \cos A \tan b$ $\qquad$ $\cos(c-N) = \cos a \sec b \cos N$

$$\text{已知}\begin{cases} a = 47°12'32''.87 \\ b = 61°46'\ 9''.10 \\ A = 56°21'29''.29 \end{cases}$$

$\log\cos b$	$\bar{1}.6748836\ 6$	$\log\tan b$	$0.2701165\ 3$
$\log\tan A$	$0.1768831\ 8$	$\log\cot a$	$\bar{1}.9664769\ 1$
$\log\tan M$	$\bar{1}.8517668\ 4$	$\log\sin M$	$\bar{1}.7629579\ 4$
$M=$	$35°24'23''.13$	$\log\sin(M+C)$	$\bar{1}.9995513\ 8$
		$M+C=$	$87°23'46''.37$
		$C=$	$51°59'23''.24$
$\log\cos A$	$\bar{1}.7435097\ 7$	$\log\cos a$	$\bar{1}.8320772\ 0$
$\log\tan b$	$0.2701165\ 3$	$\log\sec b$	$0.3251163\ 4$
$\log\tan N$	$0.0136263\ 0$	$\log\cos N$	$\bar{1}.8425649\ 8$
$N=$	$45°53'55''.32$	$\log\cos(c-N)$	$\bar{1}.9997585\ 2$
		$c-N=$	$-1°54'37''.93$
		$c=$	$43°59'17''.39$

注意 我们应将 c 与 C 的最小值联合使用。

$$\text{解答}\begin{cases} c = 43°59'17''.4 \\ C = 51°59'23''.2 \end{cases}$$

解直角三角形的公式

1. 已知 b, c. 求 a, B, C

$\cot B = \cot b \sin c$

$\cot C = \cot c \sin b$

$\cot a = \cot c \cos B = \cot b \cos C$

2. 已知 B, C. 求 a, b, c.

$\cos a = \cot B \cot C$ 或 $\tan\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}}$

$\tan b = \cos C \tan a$

$\tan c = \cos B \tan a$

核验 $\quad \cos a = \cos b \cos c$

3. 已知 c, B. 求 a, b, C

$\cot a = \cot c \cos B$

$\tan b = \sin c \tan B$

$\cot C = \cos a \tan B$

核验 $\quad \cos C = \tan b \cot a$

4. 已知 a, c, 求 b, B, C

$\cos B = \tan c \cot a$ 得 $\tan\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}$

如上计算 b 与 C

核验 $\quad \cos B = \cos b \sin C$

5. 已知 b, B. 求 a, c, C

$\sin c = \tan b \cot B$ 或 $\tan\left(45° - \dfrac{c}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\sin(B-b)}{\sin(B+b)}}$

如 1 计算 a 与 C

6. 已知 a, B. 求 b, c, C

$\tan c = \tan a \cos B$

如 3 计算 b 与 C

核验　　　$\sin b=\tan c\cot C$

例　(第 4 类 5 位小数)已知

$$\begin{cases} a=41°28'26''.5 \\ c=40°23'\ 9''.2 \end{cases}$$

由余弦决定 B 不精确但由:

$$\begin{cases} \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}} \\ \tan b=\sin c\tan B \\ \cot C=\cos a\tan B \end{cases}$$

$a-c=1°5'17''.3$　　　　$\log\sin(a-c)=\bar{2}.27853\ 2$

$a+c=81°51'35''.7$　　　　$\log\sin(a+c)=\bar{1}.99560\ 2$

$$2\log\tan\frac{B}{2}=\bar{2}.28293\ 0$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.14146\ 5$$

$$\frac{B}{2}=7°53'\ 8''.06$$

$$B=15°46'16''.1$$

$\log\sin c$	$\bar{1}.81153\ 3$	$\log\cos a$	$\bar{1}.87463\ 1$
$\log\tan B$	$\bar{1}.45090\ 9$	$\log\tan B$	$\bar{1}.45090\ 9$
$\log\tan b$	$\bar{1}.26244\ 2$	$\log\cot C$	$\bar{1}.32554\ 0$
	$b=10°22'12''.7$		$C=78°\ 3'\ 6''.7$

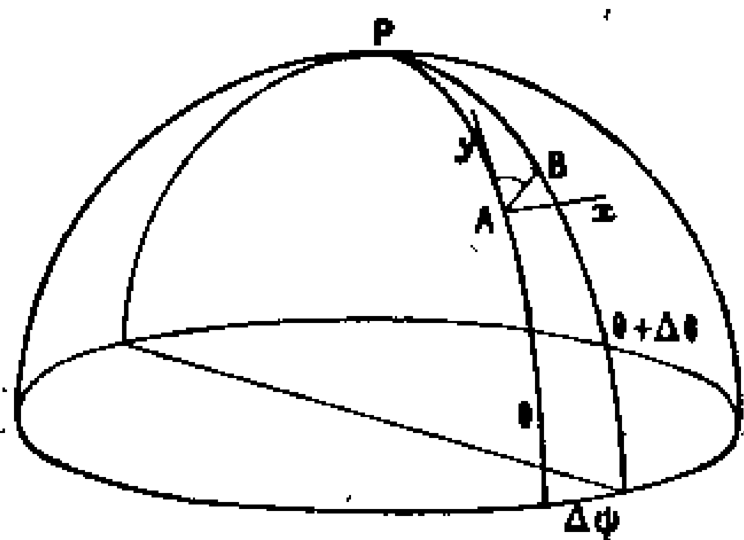
核验

$\log\cos b$	$\bar{1}.99284\ 6$
$\log\sin C$	$\bar{1}.99048\ 4$
总和	$\bar{1}.98333\ 0$
$\log\cos B$	$\bar{1}.98333\ 2$

$$\text{解答}\begin{cases} b=10°22'12''.7 \\ B=15°46'16''.1 \\ C=78°\ 3'\ 6''.7 \end{cases}$$

§11　较 差 坐 标

如果三角形的元素是有变化的，我们可以从前几节的基本公式的微分而求得这些元素的无限小增量之间的关系式．由于六个元素同时发生变化的情形很少，所以我们不在此写出最普遍的微分关系式．我们只在下面举出几个应用的例子，说明这些关系已能满足实际的用途了．



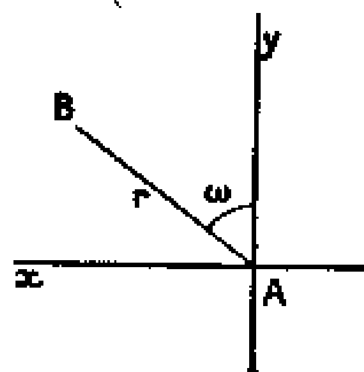


图　18

我们要去详细研究球面上很接近两点的坐标之间的关系，这在实际上是一个很重要的问题．设 A 与 B 两点(图 18)接近的程度可使 AB 弧的平方略而不计．令 A 点的极坐标为 ψ 与 θ，并将 B 点的极坐标写为 $\psi+\Delta\psi$ 与 $\theta+\Delta\theta$．$\Delta\psi$ 与 $\Delta\theta$ 称为 B 对于 A 的**较差坐标**．在一般情形里，$\Delta\theta$ 是小量，如果 A 点不在坐标的极点附

近，$\Delta\psi$ 亦是小量.

我们可以用另外一种方式来表示 B 点相对于 A 点的位置，令

$$r = AB \qquad \omega = \angle PAB$$

ω 称为 B 对于 A 的*方位角*，这个角从 0 算至 360°，从站在球心的观测者看去，按三角学规定方向转动. 坐标的正极点的方向便是这转动方向的原点.

最后，过 A 点作球的切平面，并在其上绘出两个互相正交的坐标轴(图 18)：Ax 轴与基本面平行，指向基本面的正向；Ay 轴与大圆 AP 相切，指向正极. 若球面坐标系是顺向系(为确定计，可作这样的假设)，从球心看这两个正交轴有如图 18 右面的附图那样.

因为据假设可以略去 r 的平方项，B 点对这个坐标面的距离也可以略而不计，于是我们可以用 B 点的直角坐标 x 和 y 去定出它的位置. x, y 和 r, ω 之间的关系可表示为：

$$x = r\sin\omega \qquad y = r\cos\omega$$

因此，x, y 或 r, ω 均可当做 B 对于 A 的*平面较差坐标*. 这些坐标的优点是，可以在望远镜的测微计上或星像的照片上加以测量. 以下将要证明，怎样推导出球面较差坐标 $\Delta\psi$ 与 $\Delta\theta$. 我们所讨论的问题，是要将一个运动的天体(行星或彗星)或一个未经测量的恒星的位置，联系到坐标已知的、作为定标星的另外一颗恒星上去；此外还有其他许多用途.

先建立表示球面三角形两边之差的普通关系式. 由组 II 与组 III 取出以下两式：

$$\cos b\sin A = \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos a$$

$$\sin b\sin A = \sin a\sin B$$

以 $\sin a$ 乘第一式，$\cos a$ 乘第二式，然后相加得

$$\sin A\sin(a-b) = \sin a\cos B\sin C - \sin a\cos a\sin B(1-\cos C)$$

或

$$\sin(a-b) = \sin c\left(\cos B - \cos a\sin B\tan\frac{C}{2}\right) \tag{1}$$

现在回到 PAB 三角形去. 把组 IV 里一个公式应用到这个三角形上立刻得到 $\Delta\psi$：

$$\sin\theta\cos\omega = \cos\theta\cot r - \sin\omega\cot\Delta\psi$$

(1)式则给出 $\Delta\theta$；于是得

$$\left.\begin{aligned} \tan\Delta\psi &= \frac{\sin r\sin\omega}{\cos r\cos\theta - \sin r\cos\omega\sin\theta} \\ \sin\Delta\theta &= \sin r\left(\cos\omega - \sin\omega\sin\theta\tan\frac{\Delta\psi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(2)内两式是精确的，可以应用于球面上任何两点，即使它们之间的距离不是很短的，或者说这距离的平方是不可以忽略的.

当 r 的平方可以忽略时，我们可以让

$$x = r\sin\omega \quad 代 \quad \sin r\sin\omega$$

$$y = r\cos\omega \quad 代 \quad \sin r\cos\omega$$

$$1 \quad 代 \quad \cos r$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\tan\Delta\psi &= \frac{x}{1-y\tan\theta} \\ \sin\Delta\theta &= y - x\sin\theta\tan\frac{\Delta\psi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在 r 的平方项可以忽略的条件下，不管 A 在球面上什么地方(特别是在坐标的极点附近)，

(3)式都是有效的.

现在讨论逆问题，即已知 $\Delta\psi$ 与 $\Delta\theta$，计算 x 与 y. 这只须对于新未知数求解方程式(3). 我们容易求出:

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos\theta\tan\Delta\psi\frac{1-\tan\theta\sin\Delta\theta}{1+\sin^2\theta\tan\Delta\psi\tan\dfrac{\Delta\psi}{2}} \\ y&=\frac{\sin\Delta\theta+\sin\theta\cos\theta\tan\Delta\psi\tan\dfrac{\Delta\psi}{2}}{1+\sin^2\theta\tan\Delta\psi\tan\dfrac{\Delta\psi}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3b}$$

(3b)式里的分母可以合理地设它为 1，除非 $\Delta\psi$ 不是小量(这只在极点附近才是这样). 还有，在公式(3)和(3b)乃至一切情形里，可以把 $\Delta\theta$ 当做 $\sin\Delta\theta$; 自然，仍然须在我们所假定的 r 为小量的条件之下.

最后，设 A 不在极点附近，$\Delta\psi$ 一定是小量，x, y 的二阶项以及 $\Delta\psi$ 与 $\Delta\theta$ 均可忽略，于是公式(3)便简化为:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\cdot\Delta\psi=x=r\sin\omega \\ \Delta\theta=y=r\cos\omega \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

公式(4)经常使用. 由于(4)的重要性，我们有必要再把它们直接推导出来. 第一式可从下列的正弦比例式推出:

$$\sin\angle APB\sin PB=\sin\angle PAB\sin AB$$

如果 $\angle APB$ 与 AB 都是小量，我们可以用它们本身代替它们的正弦，此外还可以用 $\cos\theta$ 代替 $\sin PB$，于是得出(4)式里的第一式. 至于第二式，它表示 PA 与 PB 两边之差等于 AB 边在 PA 边上的投影.

例 1 已知:

$$\theta=+23°26'58''$$
$$r=288''.2$$
$$\omega=298°9'.1$$

使用公式(4)的必需条件显然是满足了，故有:

$$\sec\theta=1.0900 \qquad \left.\begin{aligned} x&=-254''.1 \\ y&=+136''.0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \Delta\psi&=-277''.0=-18^s.46 \\ \Delta\theta&=+136''.0 \end{aligned}\right\}$$
$$\sin\omega=-0.8817$$
$$\cos\omega=0.4718$$

例 2 保留前题的 r 和 ω(从而 x 和 y)的数值，更给出

$$\theta=+88°56'58''.2$$

这里，原点离极点只有63'，因而必需使用公式(3):

$$\sec\theta=54.54 \qquad x=-254''.1=-0.0012319$$
$$\tan\theta=54.53 \qquad y=136''.0=0.0006593$$
$$\sin\theta=0.9998$$
$$\tan\Delta\psi=\frac{-0.06719}{1-0.03595}=-0.06970$$
$$\Delta\psi=-3°59'14''=-15^m56^s.9$$
$$\tan\frac{\Delta\psi}{2}=-0.0348$$
$$\Delta\theta=136''.0-8''.8=+127''.2$$

第二章 周日运动

自哥白尼以来，周日运动被人解释为地球自转所引起的现象．在本章开始时，将把它当做恒星整体对于*地方*的标记（即对地面观测者不动的物体）的*相对运动*．但更方便的方法是将星的方向归算到一种天上的坐标系，而得到一种恒常不变的联系，这样就引导我们规定出一种*天赤道坐标系*．为描述星的周日运动，只需描述赤道坐标系对于地方坐标系的运动；于是，我们被引导来规定*恒星时*与*地方纬度*．为表明不同地区的地方坐标系之间的关系，还须规定*经度*；这便导致*大地水准面*的研究．

本章讨论的内容有各种特殊的现象，如天体的中天与出、没等……．最后，更附以极点在地面移动的简略研究．

§12 周日运动

周日运动是天文现象中最常见的一种．这种视运动使太阳、月球、行星、恒星等一切天体有东出、中天和西没的现象．本章只研究恒星的周日运动，而不涉及下述各种效应．如天文折射（第九章）以及岁差、章动、周日或周年光行差（四至八章）等，将辟专章讨论．

首先，周日运动是繁星的天穹的整体运动，它并不改变星座的形状．为方便地表现周日运动，可假想天球有内外两层．为明确起见，设内层代表*地方天球*，在这球面上描绘出地方坐标系的各种元素，地面上的标记对于它是不变的；外层上有恒星的方向所指的点，这些点即恒星在天球上的象，彼此间不变地联系着，我们可采用古人的说法，叫它做*恒星天球*．由于周日运动不改变星座的形状，我们可将它表示为恒星天球对于地方天球的运动．

恒星天球对于地方天球的最普遍运动是：在每瞬间绕瞬时轴旋转，这轴就是旋转的瞬时极与天球相交成的．这极对每个天球来说是不固定的．

这正是我们所看见的现象．天球围绕*转动瞬时轴*的运动形成了所谓周日运动．它循逆向（即由东向西）运转，周期比较一个平太阳日略短一些．这瞬时轴叫做*世界轴*[1]，它在天球上的交点叫做*天极*．至于天极在天球两层上的位移，在地方天球上变幅很小，在恒星天球上异常缓慢．我们用*极移*这个名词代表极点在地方天球上的变化，将于§26加以研究；这现象的变幅只有十分之几角秒．至于极点在恒星天球上的变化，将在四、五两章内研究，名叫*岁差*与*章动*，其变化率每天还不到 $0.''1$．如果我们用一具天体照相仪对着北极拍照几小时，恒星的行踪便记录在底片上，象许多同心圆圈，其中心即北极的象，是可以精密测定的．（这里和以后一样，都假定观测者在北半球）．为表明极点对于恒星的运动，应该将几月或几年的间隔里拍得的几张照片加以比较．在世界轴对于地方天球与恒星都是不动的假设下，在几小时或几天的期间里对于周日运动所作的研究，可以得出相当好的近似结果．

1）世界轴即假想的地轴延长线，它通过天球北极和南极，也称天轴．

§ 13　第一地方参照系，地平坐标

每一个地点有一个特殊的方向，我们有理由说它是不变的，而且可用物理的方法作精密的测定，这就是铅垂线，即重力的方向．这也是一个地点的均匀液体自由表面在平衡时的法线方向．垂线的方向点 Z，叫做天顶(图 19)．表示与平衡时均匀液体自由面相切的平面是一个大圆 H，叫做地平；它的一个极点即是天顶(图 19)．在天球上与天顶在直径相对的另一点叫做天底．地平、天顶与天底是地方天球的元素．

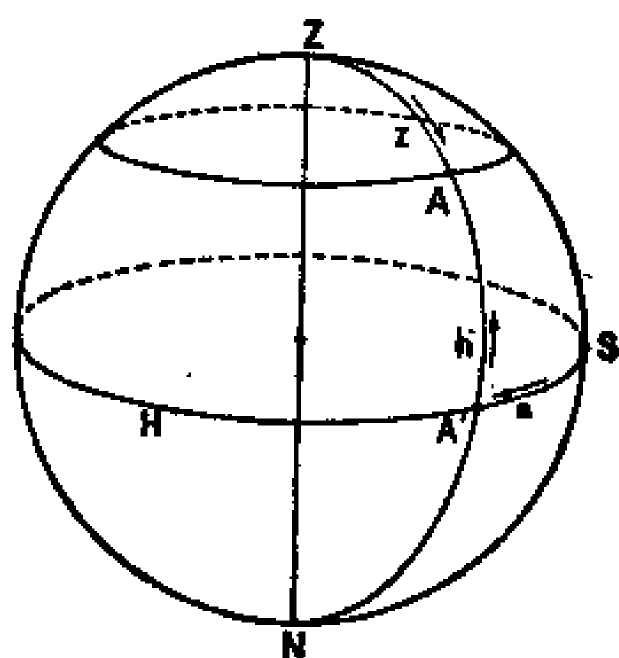


图 19

我们可以用这些元素来确切地规定任何一个方向．自然，我们应该选择地平为地方坐标系的基本面，更在这平面上选择一个原点 S(其决定法下面就要谈到)．这一点虽是任意选定的，但却是不变的，对地方上的标记是确定的．地平上的角循逆向(即将钟表放在地面，钟面向上时指针转动的方向)计算．

设 A 为一个方向的方向点(图 19)，描绘半个大圆 ZA，即过 A 点的垂直圆．它和地平相交于 A' 点．SA' 角叫做 A 点的平经(亦称方位角)，由 0° 计至 360°，常以字母 a 代表．$A'A$ 角叫做 A 点的平纬(亦称高度)，以角度表示，向天顶为正，向天底为负．以后常以其余角，即天顶距 ZA 去代表它，由 0° 至 180° 计算，常以字母 z 代表．平经与平纬(或天顶距)便是 A 点的地平坐标．

过 A 点以 Z 为极的小圆称为 A 点的高度圈或平纬圈．垂直圈与高度圈是地方性的地平坐标系的坐标线．

由于周日运动，恒星的地平坐标都在变化，其变化的规律相当复杂．后面列有公式，可以计算这些坐标在每瞬时的数值．

地平坐标的测定实际上是一个很重要的问题．我们须设计出一些方法对铅垂线作精密的测定，一般常用气泡水准器或反射水银盆来作观测[1]．这些有关实用天文学的问题不在这里作详细的介绍．

我们只提到，精密的气泡水准器有一根小玻璃管，其内壁的形状是以管轴为轴的回转面，这个面的经线是半径很长的圆弧(图 20)．玻璃管内所装的是一种粘性很小的液体(如乙醚)，在封闭以前故意留下一个小的蒸气泡(不是空气泡)．若管轴接近水平向，则在静止时，气泡的中心将位置在内壁母线的曲率中心的铅垂线上．若将玻璃管围绕垂直轴旋转一个角度，当液面再度静止时，气泡将回复到原来的位置．由于玻璃管上刻有连续的刻度，我们可以使水准器旋转去测量垂直的或水平的旋转轴(经纬仪或子午仪)的倾斜度．自然，水准器上的刻度每格之值应该测定相当于若干角秒．为制造很

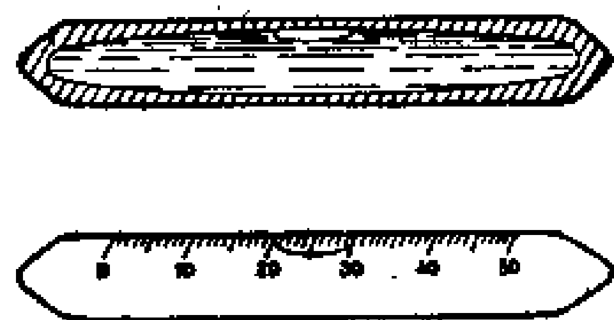


图 20

---

1) 许多世纪以来人们就使用了铅垂线．布拉德勒(Bradley)因使用具有铅垂线的刻度的大圆环(半径 3.8 米)来测定恒星的天顶距，而发现了周年光行差(1726)与章动(1736)．

灵敏的水准器，须使管壁内的母线有很长的半径；不幸，高度灵敏的水准器上的指示量很容易受温度些微变化的影响，因而它便不如我们所希望的那样可靠了.

经纬仪(图 21)就是直接利用水准器的一种仪器. 瞄准望远镜 L 带有一个刻度圆环 C_1，可以围绕两个轴颈旋转，它们定出了一个水平向的旋转轴. 两轴颈放在一个叉形架上，这个架子又可围绕一个垂直轴旋转. 随叉形架旋转的有两个标度，装置在水平刻度圆环 C_2 的前面. 这两个旋转轴用气泡水准器调准. 方位角从 C_2 环上读出，天顶距从 C_1 环上读出. 经纬仪使用法的细节可参看实用天文学书籍. 我们在这里略加叙述，是为了要说明地平坐标是可以直接进行测量的，而且还可达到相当高的精密度.

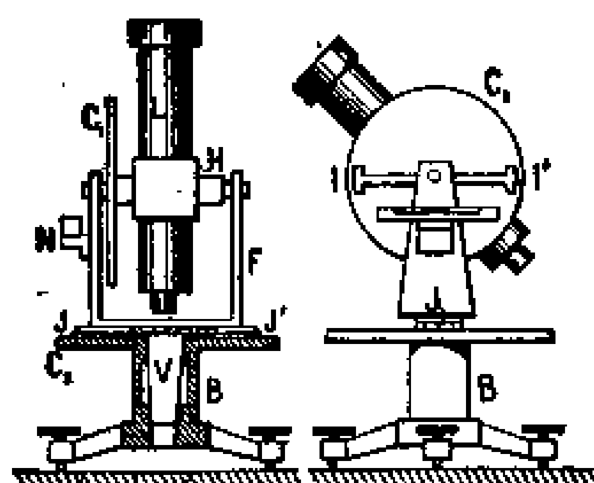


图 21

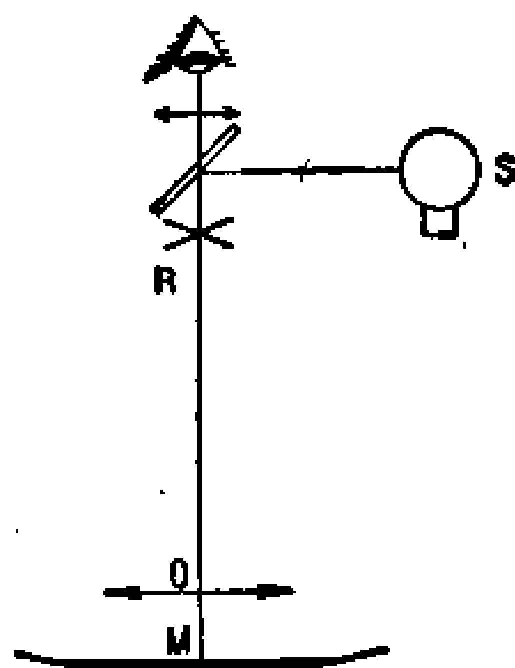


图 22

我们还可用**水银盆**去测定铅垂线. 在一个红铜的平坦盘上铺上一层薄的水银(厚度不到一毫米)(图 22). 当望远镜向下瞄准(其中的丝网被照明)，丝网的象为水银反射再度进入物镜而为人观测到它的反射象时，如果观测者将丝网和它的象重合在一起，按照光线反射的定律，这便是与天底的象相重合. 换句话说，望远镜的光轴便在垂线的方向上了. 由此可见，我们可以瞄准天底，正如瞄准一颗星那样，其精密度只与物镜的口径有关. 测定铅垂线，水银反射法比水准器要可靠得多，只是观测者须留心装置，使水银面保持稳定.

§ 14 第二地方参照系，时角坐标

所谓**天文子午面**(或子午圈)即含世界轴的垂直面. 它是连接极点与天顶的 PZ 大圆. 这是地方天球的一个元素(图 23). 平经的原点 S(上面尚未定出)便是子午面与地平在南方的交点. 和子午面正交的平面 ZE 的东半面称为**卯圈**，其西半面称为**酉圈**，整个大圆合称为**卯酉圈**.

极点在地平上的高度(即 $\angle NOP$)称为观测点的**天文纬度**或**地理纬度**，常以 φ 字去表示它.

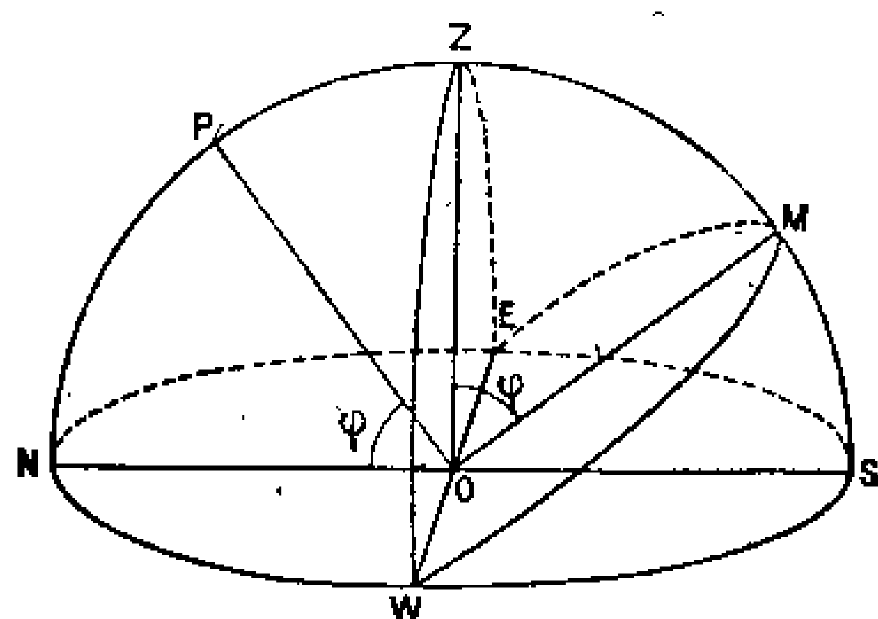


图 23

天赤道是以天极为极的大圆. 这是地方天球的一个不变元素(在可忽视极移的假设下). 垂线 OZ 与赤道面之间的夹角等于观测点的纬度 φ. 现在采用赤道作为地方坐标系的基

本面.

设 PA 为过天极和天球上 A 点的半个大圆，这叫做 A 点的时圈(图 24)．它和赤道相交于 A' 点．设 M 为子午圈与赤道在地平上方相交的一点．量度时圈与南半子午圈之间的二面角 MA' 叫做 A 点的时角，常以字母 H 表示，按逆向计算为正；这样，时角便和时间同时增进，用"时"及其"分"、"秒"表示，由 0 时至 24 时．我们可以说，一颗星的时角随时间作均匀的增长是一个观测的事实，但只限于几小时至多几日之内才是这样的，时间更长则可能发生变化．

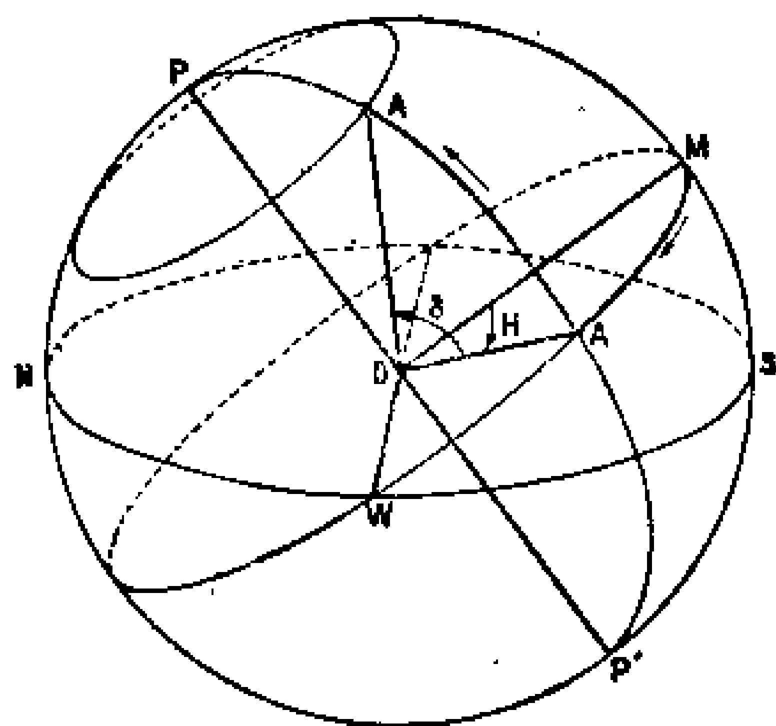


图 24

以 P 为极过 A 点的小圆叫做该点的赤纬圈．赤纬圈到赤道的距离称为 A 点的赤纬 δ，以度、分、秒量度，由 0° 至 90°，向北极为正，向南极为负．由于周日运动，恒星在赤纬圈上运动，但其赤纬是不变的(自然，这里假设未考虑极点在恒星天球上的位移)．时角与赤纬组成 A 点的时角坐标．

若使用一架类似经纬仪的仪器，使其垂直轴平行于世界轴，在原则上人们便可用它去测定星的时角与赤纬．但是没有物理的方法能将经纬仪控制在这方向上，使其达到所需的精密度(这样装置的仪器叫做赤道仪)，所以没有人用经纬仪对时角坐标作精密的测量．天文观测的大型仪器如折射和反射望远镜以及天体照相仪等都是赤道仪式的装置，这是由于这样做导星方便而且确定的原故．这样，只需要使仪器绕世界轴作均匀的运转，即其角速度在相当长的一段时间内保持仪器在所指的星的方向上．仪器的拖动可用速度一定的马达，还须配备微动装置，以便改正望远镜的指向，以抵消仪器在装置和运行上的缺陷以及大气折射效应等所引起的误差．

若仪器是天体照相仪，则须配备一个导星折射望远镜，以保证仪器合乎规定运行．在运行良好的天体照相仪的视场里，恒星在底片上的象都是在一定位置上的小圆点．若用其他装置，则在露光的时间里，视场内的星象均绕选为导星的象旋转．

总之，为描述周日运动，时角坐标比较地平坐标更便利些，因为前者作为时间的函数比后者简单得多．可是，时角坐标不能精密地加以测定，除了一个特殊的情形，即天体过子午圈(中天)的时刻．原来，子午圈同时具有地平经圈与时圈两种性质，因而它是这两种坐标系的公共坐标线．

§ 15　恒星天球上的参照系，赤道坐标

由于周日运动可以表示为恒星天球相对于地方天球的运动，为完成其理论，须规定一种与恒星天球相联系的参照系．只有这样一种坐标才能对繁星的天穹与星座作出几何学的描绘，每颗星在这参照系里各有其不变的坐标(至少就一级近似而言)．

这个参照系的基本面是天赤道(图 25)．这平面上的角的原点是一个定点，其位置将在下节规定，因为它是根据我们尚未讨论过的太阳的视运动而决定的．这一点叫做春分点或 ♈ 点，我们暂且假定它对于恒星是不动的(以后将要证明，它并不是这样的)．

恒星天球上 A 点的赤经 α 是这一点的时圈和♈点的时圈之间的夹角，按顺向即与周日运动相反的方向计算. 由于这个规定，恒星按赤经增加的次序经过地方天球上某一时圈，特别是子午圈.

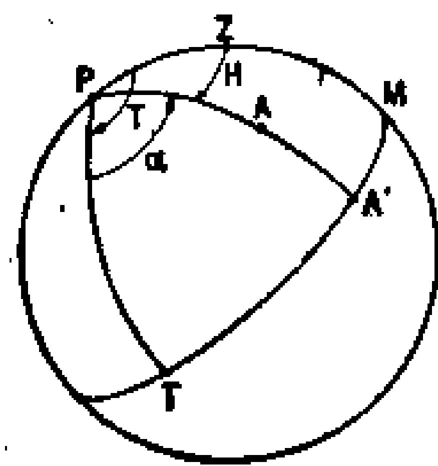


图 25

第二个赤道坐标是 A 点到赤道的角距离 $A'A$，即赤纬 δ，这已经在时角坐标里规定过了.

有时以赤纬的余角去代替它，名叫极距，从天极起算，由 0° 到 180°，不带符号.

由于赤经和赤纬与周日运动无关，除非基本面与♈点在恒星天球上有移动，否则它们是没有变化的. 认为这两个元素在几小时或几天里是不变量，是合理的. 除了在本书有几章里讨论到这种参照系缓慢移动的效果之外，我们一般都认为赤道坐标是不变的.

§16 赤道坐标与时角坐标的关系；恒星时

假设天极在地方天球与恒星天球上是固定的，这两个天球的相对位置，换句话说，即繁星的天穹，相对于地上的观测者而言，只随一个参数变化. 我们选择♈点的时角作为这个参数，面将其命名为**恒星时**(图 25).

我们附带指出，"恒星时"这个名词，在两个方面都是很不恰当的，因而时常引起人们甚至有名的作家(参看§ 2 第 3 段)的误解. 几世纪以前，当人们还不知道♈点的时角要受到偏离之时，人们以为它是均匀时的具体表现，因面把这个角叫做恒星时. 然面，今天使用这名词便会引起一种危险，会使人忘记在以真正的均匀时的函数表这恒星时的公式里，还有长期的和周期的偏差. 另一方面，以"恒星"作为"时"的形容词，会使人联想它是为参加周日运动的一切恒星所决定的. 若将这种时作为"星时"也是一种片面的看法. 而且，因为天极与♈点都和恒星没有不变的联系，所以将这种时作为"星时"，不能算是合理. 上一节里曾经说过，♈点是根据太阳的视运动而决定的，因而恒星时也与太阳的视运动有关，可见"恒星时"与纯粹的"星时"是有区别的. 以后(§ 29)要指出，恒星时完全为太阳的视运动所决定，实际上，只观测太阳，而不须观测恒星，便可以去决定它. 我们不再详细讨论这个问题，只是提起读者注意这个不幸流传很广的错误观念.

我们在对于恒星时这个名词作了保留的说明之后，便可以暂且不提恒星时的偏差，或者说，作为一级近似，可以把它的二阶效应略而不计. 事实上，我们可以校准一具天文钟，使其指针在几小时或几天之内表示出相当满意的恒星时. 可是我们应该知道，用一具均匀运行的天文钟去守住恒星时，在长时期里是不可能的，原因是恒星时有偏差.

现在回头再从运动学的观点去讨论周日运动. 天球上 A 点的时角 H 与其赤经 α 和恒星时 T 三者之间有一基本关系：

$$H=T-\alpha$$

若考虑到每项所采取的正方向，这公式是容易建立的(图 25).

一个重要的特殊情形是 $H=0$ 或 12^h，这是天体**中天**的情形. $H=0$ 时，叫做**上中天**；$H=12^h$ 时，叫做**下中天**. 上中天时，

$$T=\alpha$$

由此可见，恒星时的另一定义是恒星上中天时的赤经．所以，利用已经确切测定了赤经的恒星，对它作中天的观测，可以提供恒星时；这里便引入了*太阳的观测*．

下一章内我们将要说明怎样利用对亮星和太阳所作的中天观测去决定这些称为*基本星*的赤经．基本星表编成以后，便可利用它去检查天文钟运行的情况．中天观测使用*子午仪*．这是一架折射望远镜，其两个轴颈放在两个支架上，而这两个支架又安置在坚实的石柱上．两轴颈所确定的旋转轴应在水平向上，正指东、西两点，且与望远镜的光轴正交，而光轴是由物镜的光心和一根中央水平丝所确定的．如果仪器校准得很理想，当星中天时，观测者便看见星象经过丝网的中央水平丝．中天观测的程序是记录中天时天文钟的时刻，这是可通过记时仪而得到的．事实上，子午仪不会校准得很理想，记时仪上记录的时刻应该加以所谓*仪器改正值*．我们不在这里讨论这些属于实用天文学的问题，也不谈现今流行的观测方法．

若天文钟表示恒星时，所记录下来的时刻 τ 将会等于所观测的那颗星从星表内查出的赤经．设将 $\varDelta=\alpha-\tau$ 这一个量叫做天文钟改正值，它一般不会恰好为零，天文钟改正值 $\varDelta$ 作为时间的函数而变化，所谓守住恒星时，便是将 $\varDelta$ 和时间画成坐标图，以便读出天文钟运行的情况．每逢晴明的夜晚，藉天文观测作时钟的校正便在时钟运行图上给出一个点，将这些点连接成一条平滑曲线，便可用以求内插的数值．这条线对于直线有或多或少的偏离，这不但是由于时钟运行得不均匀，而且还由于恒星时本身就有偏差．这些偏差的变幅便是我们所需要了解的．

当时钟的改正值 $\varDelta$ 的变化已经求出，并表示为时间的函数时，我们可以记录下一个运动天体(如月球、行星或基本星表内没有的恒星)中天时在时钟上的时刻，然后再加上改正值，便得到那一瞬时的恒星时，即那个天体的赤经．

至于赤纬的测定，亦可由子午仪的观测得出，这将在另一节里叙述．

§17　周日运动在望远镜里的情况

设想把一架没有被推动而具有丝网或正交动丝测微计的望远镜瞄准一颗恒星，我们便可在视场中考查出如下两种情况．

1．恒星的赤纬不大的情形

将丝网装置在适当位置时，我们可以看见星象沿一条水平丝越过视场．在视场的小范围里，赤纬圈的曲率是不显著的，而且这个圈是与大圆相差不远的．于是，与这条丝正交的垂直丝便是时圈的象．所以，由于周日运动，可以把丝网或测微计里的动丝装置在适当的方向上，用来作方位角的测量．

设 Ax 与 Ay 为定向的两根丝，并用作较差坐标轴(图 26)．假设星过 A 点时其时角为 H，过 B 点时为 $H+\varDelta H$．令

$$\psi=H \qquad \theta=\delta$$

$$\varDelta\psi=\varDelta H \qquad \varDelta\theta=0$$

则 §11 里的(4)式便可以在这里应用，将 B 点的坐标写为：

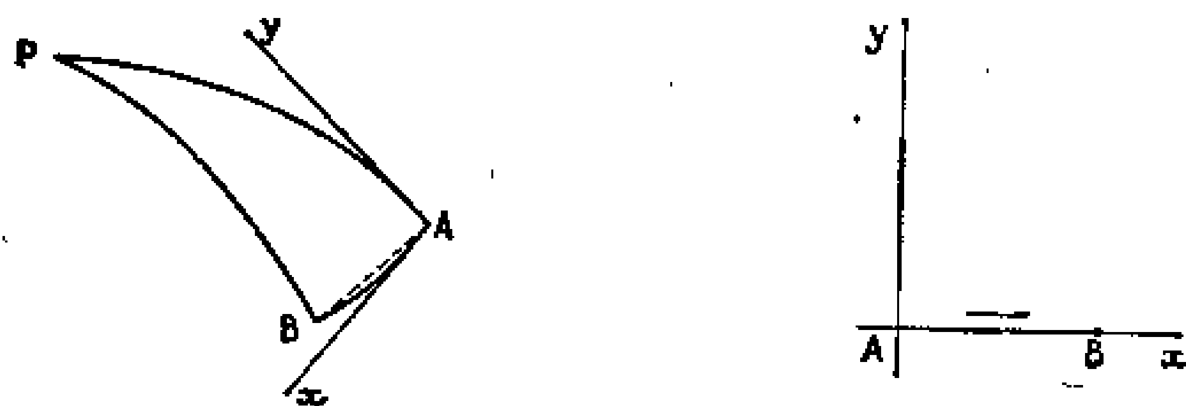


图 26

$$\begin{cases} x=\cos\delta\Delta H \\ y=0 \end{cases}$$

由于 ΔH 等于恒星时的变化 ΔT，并且与被观测的星无关，以上的公式表明，星象在 x 轴上与 $\cos\delta$ 成正比的匀速运动．恒星时每增加 1^s，赤道星走 $15''$．若以时、秒表示 ΔT，则

$$x=15''\cos\delta\cdot\Delta T$$

我们可以利用这个关系去测定两条丝之间的距离或测微计螺旋上的刻度值．若在星象由一丝走到他一丝的期间，或者在走了等于测微计旋转若干周的距离的期间，用天文钟记录下这期间恒星时的变化，以上的公式便立刻能给出星象走过了多少角秒的数值．

2．恒星的赤纬相当大；在望远镜的视场里，赤纬圈的曲率不能忽视的情形(图 27)

这里应该使用 § 11 里的公式(3b)．其第一式经过合理的简化后可以写为

$$\tan\Delta H=x\sec\delta\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\delta\,\Delta H^2\right)$$

在上式右端以 $x\sec\delta$ 代替 ΔH 得

$$\tan\Delta H=x\sec\delta+\frac{1}{2}x^3\sec^3\delta\sin^2\delta$$

由此，

$$\Delta H=x\sec\delta+x^3\sec^3\delta\left(\frac{\sin^2\delta}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

图 27

由于这个公式只适用于赤纬在 90° 附近(拱极星)，考虑到 $\sin\delta=1$，上式便可写为

$$\Delta H=x\sec\delta\left(1+\frac{x^2\sec^2\delta}{6}\right) \tag{1}$$

§ 11 里(3b)的第二式则给出：

$$y=\frac{1}{4}\sin 2\delta\Delta H^2=\frac{1}{2}x^2\tan\delta \tag{2}$$

(1)，(2)两式是归算到子午圈的公式，常用以改正用子午仪所作的中天观测．从原则上说，瞄准应在星象正过子午圈的那一瞬间，但事实上，观测时的时角 ΔH 虽小，但却不为零．公式(1)给出了这个时角(且考虑到第三阶项)，而公式(2)则给出了赤纬的改正值．再需从赤纬的粗测值里减去 y．

例：设在极星(小熊座 α 星)上中天以后作了观测，其横坐标 $x=130''.0$ 或子午圈上 0.0006303 弪．已知从天顶距观测得出赤纬的粗测值为 $88°58'15''.5$，试求观测时的时角与赤纬．

先算 y： $\tan\delta=55.67$

$$y=\frac{1}{2}130''.0\times0.0006303\times55.67=2''.28$$

$$\delta = 88°58'13''.2$$

于是有：　$\sec\delta = 55.64 \qquad x\sec\delta = 7233''.2 = 0.03507$

$$x^2\sec^2\delta = 0.00123$$

$$\Delta H = 7233''.2\left(1+\frac{0.00123}{6}\right) = 7234''.7 = 482^s.3$$

§ 18　地球，地理纬度

在一给定瞬时，星在一处的地平上的位置与该处在地球表面的位置有关．我们知道，地球表面每一点以其地理坐标即*纬度*与*经度*确定．这一节内，我们将讨论有关纬度的几个问题，这对于周日运动的研究虽没有直接的用途，但在以后讨论周日视差时将会应用到．

首先，所谓*大地水准面*就是海面和假想在陆地上藉沟道和海水连通的海面的延长面．大地水准面可能不是界限分明的简单的几何学面，但和扁的旋转椭球面相差不多．据大地测量或重力测量的整个结果判断，我们可能建立起一个旋转椭球面（椭球），使其与大地水准面异常接近，在铅垂线方向上没有什么地方会偏离开一百米远．

我们要在为大地测量作为三角网计算所采用的*参照椭球*上研究纬度．这种参照椭球也许不如大地水准面那样能更好地反映情况，但两者的差异不大．现今采用的克拉克椭球，其赤道半径 a 与其扁率 ε 的典型数值为

$$a = 6,378,388 \text{ 米}$$

$$\varepsilon = 1:297.0^*$$

于是它的极向半短轴为

$$b = 6,356,912 \text{ 米}$$

图　28

任何一处的天赤道显然是和这椭球的赤道面平行的．因此，地面一点的*地理纬度*或*天文纬度*是椭球的法线与赤道面之间的夹角 φ（图 28）．因为海水面是重力的等位面，每点的铅垂线即大地水准面的法线．

所谓*地心纬度*是连接 A 点和地心的直线 OA 同赤道面所成之夹角 φ'．

A 点对于子午面椭圆上的两轴的参量坐标（图 28）是

$$\xi = a\cos u \qquad \eta = b\sin u$$

u 是参量，即纬度偏心近点角．A 点的法线的斜率为

$$\tan\varphi = -\frac{\xi'}{\eta'} = \frac{a}{b}\tan u$$

面向径的斜率为下式所给出：

$$\tan\varphi' = \frac{\eta}{\xi} = \frac{b}{a}\tan u$$

由此可见，地心纬度与天文纬度之间的关系可以表示为

* 根据人造卫星观测资料求得的地球扁率的更精确的数值是 1:298.25——译者注

$$\tan\varphi'=\frac{b^2}{a^2}\tan\varphi$$

本书里常遇见下列形式的关系式：

$$\tan y=p\tan x\quad (p>0)$$

容易证明，我们可将 y 表示为如下的展开式：

$$y=x+q\sin 2x+\frac{q^2}{2}\sin 4x+\frac{q^3}{3}\sin 6x+\cdots \tag{1}$$

式内

$$q=\frac{p-1}{p+1}\quad (|q|<1)$$

于是

$$\tan(y-x)=\frac{(p-1)\tan x}{1+p\tan^2 x}=\frac{q\sin 2x}{1-q\cos 2x}$$
$$=q\sin 2x(1+q\cos 2x+q^2\cos^2 2x+\cdots)$$

利用 arc tan 函数的展开式，我们可得(1)式内开头几项，其余项可以由递推法求出。

这里我们有

$$-q=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\cdots=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\cdots}$$

其近似值为 1:296.5．这是与 $11'35''.66$ 相当的弪值，因此，

$$\varphi-\varphi'=11'35''.66\sin 2\varphi-1''.16\sin 4\varphi$$

我们还可将 $\varphi-\varphi'$ 表示为 u 的函数：

$$\tan(\varphi-\varphi')=\frac{a^2-b^2}{2ab}\sin 2u$$

$\varphi-\varphi'$ 在赤道上和两极均等于零，在 $u=45°$ 处为极大值．于是，

$$\tan\varphi=\frac{a}{b}\qquad \tan\varphi'=\frac{b}{a}\qquad \varphi+\varphi'=90°$$

因而，

$$\varphi=45°5'47''.83$$
$$\varphi'=44°54'12''.17$$

现在再对向径 OA 建立几个公式．令

$$OA=a\rho$$

ρ 是与 1 接近的数值，OA 是 A 点的地心距，这里取赤道半径为单位．再令

$$x=\frac{\xi}{a}=\rho\cos\varphi'\qquad y=\frac{\eta}{a}=\rho\sin\varphi'$$

在周日视差的计算里，x 与 y 两个量是需要的．方便的办法是将其表示为 φ 的函数．为此，我们引入 φ 的两个函数 C 与 S，其定义为：

$$x=C\cos\varphi\qquad y=S\sin\varphi$$

因

$$\rho\cos\varphi'=\cos u\qquad \rho\sin\varphi'=\frac{b}{a}\sin u$$

容易求得表达 C 与 S 的公式为：

$$C=\frac{1}{\sqrt{1-(2\varepsilon-\varepsilon^2)\sin^2\varphi}}$$
$$S=(1-\varepsilon^2)C$$

将 C 展开到二阶项：

$$C=1+\frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi+\frac{3}{8}(2\varepsilon-\varepsilon^2)^2\sin^4\varphi+\cdots$$

$$C=1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{16}\varepsilon^2-\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cos 2\varphi+\frac{3}{16}\varepsilon^2\cos 4\varphi+\cdots$$

容易推出：

$$S=1-\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{5}{16}\varepsilon^2-\left(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cos 2\varphi+\frac{3}{16}\cos 4\varphi+\cdots$$

若在这两式里以 1/297 代替 ε，便得数字系数的展开式如下：

$$C=1.0016871-0.0016892\cos 2\varphi+0.0000021\cos 4\varphi$$

$$S=0.9949530-0.0016778\cos 2\varphi+0.0000021\cos 4\varphi$$

至于 ρ 这个量，亦容易如下求得：

$$\rho=C\sqrt{\cos^2\varphi+(1-\varepsilon)^4\sin^2\varphi}$$

$$=C\left[1-\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon^2+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cos 2\varphi-\frac{\varepsilon^2}{4}\cos 4\varphi+\cdots\right]$$

$$=1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{16}\varepsilon^2+\frac{\varepsilon}{2}\cos 2\varphi-\frac{5}{16}\varepsilon^2\cos 4\varphi+\cdots$$

或表示为数字式：

$$\rho=0.9983200+0.0016835\cos 2\varphi-0.00000\cos 4\varphi$$

若观测站的高度为 h（在大地水准面的垂线上量度），便应该在 C 和 S 两数上增加

$$\Delta=\frac{h}{a}=\frac{h}{6,378,388}\text{米}$$

$$\left.\begin{aligned}x&=(C+\Delta)\cos\varphi\\ y&=(S+\Delta)\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

最后两式定出 ρ 与 φ'，可是它们在这里不再是对于大地水准面上一点而言．若 h 不很大，ρ 的数值和对于大地水准面所给出的很接近，只须加入 Δ 而已．

例： 设某处的纬度为 48°35′0″.00，高度为 156 米，求 x 与 y．

$$\sin\varphi=0.7499187,\ \sin 2\varphi=+0.99219,\ \sin 4\varphi=-0.248$$

$$\cos\varphi=0.6615300,\ \cos 2\varphi=-0.12476,\ \cos 4\varphi=-0.969$$

$$\left.\begin{aligned}C&=1.0016871+0.0002107-0.0000020=1.0018958\\ S&=0.9949530+0.0002093-0.0000020=0.9951603\\ \Delta&=245\times10^{-7};\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi'=(C+\Delta)\cos\varphi=0.6628003\\ y&=\rho\sin\varphi'=(S+\Delta)\sin\varphi=0.7463077\end{aligned}\right\}$$

还有

$$\rho=0.9983200-0.0002100+0.0000034+\Delta=0.9981379$$

这些计算的数值以后还要应用到．由于 C，S 与 ρ 三量的变幅很小，最后作成数字表以便检查．本书末载有求“地心坐标的表”（表 XIV）．

§19 地理经度

为使两个不同地点的地方坐标得以相互参照，可将这两处的天顶放在天球上，设其为 S 与 G 两点（图 29）；令 G 代表格林尼治的天顶，S 代表任何一处的天顶．极轴与 S 或 G

分别形成两处的子午圈的半平面．这两个面之间的二面角为天赤道上的 $G'S'$ 弧所量度，这是两处的*经度差*．格林尼治的子午圈公认为国际子午圈(或本初子午圈，1884 年华盛顿会议决定)，$G'S'$ 角是 S 处对于国际子午圈的*经度*．若所讨论的是地面任何两个地方，则以 $G'S'$ 弧所量度的二面角将是这两处的*经度差*．

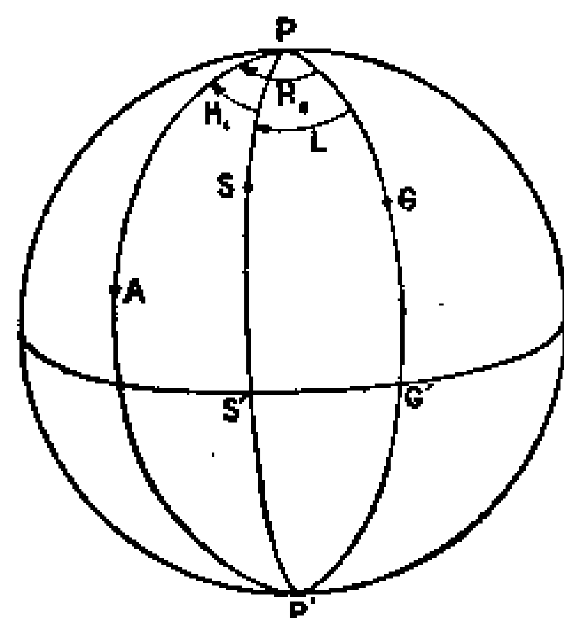


图 29

航海人以角、分、秒计算经度，由 0° 至 180°，向西为正，向东为负．天文学家以时、分、秒计算，方向的符号相同．例如，巴黎天文台的经度为 $-2°20'14''$ 或 $-9^m20^s.93$，因巴黎的子午圈在国际子午圈的东面．

如已知两站 G 和 S 的纬度差与经度差，则两站的参照系的相对位置完全决定．这样便容易将一站上一颗星的时角坐标转化为这一颗星同时对于他站的时角坐标．

1．若天体的距离同地球的大小比起来远得很多，则这颗星的赤纬对于 G 和 S 两站有相同的数值；否则，便须考虑周日视差(第八章)．对于值星而言，其赤纬不是具有地方性的坐标．

2．设 H_0 表示 G 处一星的时角．这颗星的时圈 PAP' 与 G 点的子午圈所成之角为 H_0．设 H_1 为这颗星同时在 S 处的时角，更以 L 表示这两处的经度差，由以上的符号约定法，可以写出

$$H_0-H_1=L$$

在一给定时刻，恒星天球上相同一点对于两站的时角之差等于两站的经度差．这便是天文学家将经度亦如时角与赤经那样都表示为时、分、秒的原因．但须记住，经度差不是一段时间，面是一个不变的二面角；这是在换算时不能不注意的一点．

以上所说应用于恒星的命题，亦可应用于太阳和♈点……．因此，S 站的地方太阳时(或太阳的时角)和恒星时(或♈点的时角)皆应当在国际子午圈上的太阳时和恒星时上前进(即加入)一段时间，其代数值等于 $-L$[1]．一般说来，两站的太阳时或恒星时之差等于两站的经度差．为确定起见，巴黎的太阳时和恒星时都比格林尼治的太阳时和恒星时前进 $9^m20^s.93$．太阳时和恒星时基本上是有地方性的．

由此可见，测定经度的基本原则是比较两站的太阳时或恒星时．若要求这测定达到很高的精密度，观测站须装置子午仪与天文钟．在几个月内，每逢晴夜，由基本星的观测来决定天文钟的改正值．第二步是将两站的天文钟加以对比，即是在两站记录无线电台在一定时刻发出的"时号"．由接收同一时号(并将负载时号的电波传播的时间计入)以测定两站的地方时之差，便得它们之间的经度差．设记录的时刻在两站分别为 h_1 与 h_2，并设其天文钟的改正值各为 Δ_1 与 Δ_2，则按公认的符号(不计入电波行进时间)便有

$$L=(h_2+\Delta_2)-(h_1+\Delta_1)$$

在海船与飞机上，经度测定的手续比较简单面迅速．国际子午圈上的时刻为一具精确的计时钟所给出，其改正值由每日数次接收无线电时号面求得．至于地方时，则借中天

1) 假使经度的计算公认为向东为正，则地方时比国际子午圈的时刻前进的数量恰等于其经度的代数值．如果在采用符号以前征求了天文学家的意见，则公认的符号将与现今的规定相反．

外的观测而决定；这种观测经常是用六分仪测量太阳或亮星的高度[1]。

§20 两种地方坐标系之间的关系，坐标的变化

这一节所讨论的是大地测量与航海天文学的基本问题.

设 A 表示天球上的一点(图 30)，其地平坐标为 a 与 z，时角坐标为 H 与 δ. 我们可将其围绕公用的坐标轴 OW(指地平上的西点)旋转，而从一个坐标系过渡到另一个坐标系. 这个旋转的角是极点的高度的余角(即余纬度)，以 $\angle POZ$ 角或 PZ 弧量度，而

$$PZ=90^\circ-\varphi$$

这两种坐标系的互换，可利用高斯公式组，即对于顶点在天极、天顶与 A 点的三角形写出其基本关系式. 这个三角形叫做 A 点的*方位三角形*(图 31)，其主要元素的数值为：

$$PZ=90^\circ-\varphi \qquad PA=90^\circ-\delta \qquad ZA=z$$

$$\angle Z=180^\circ-a \qquad \angle P=H$$

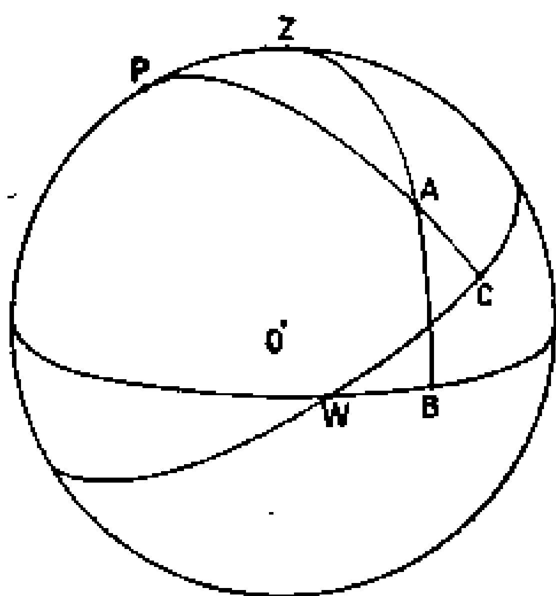


图 30

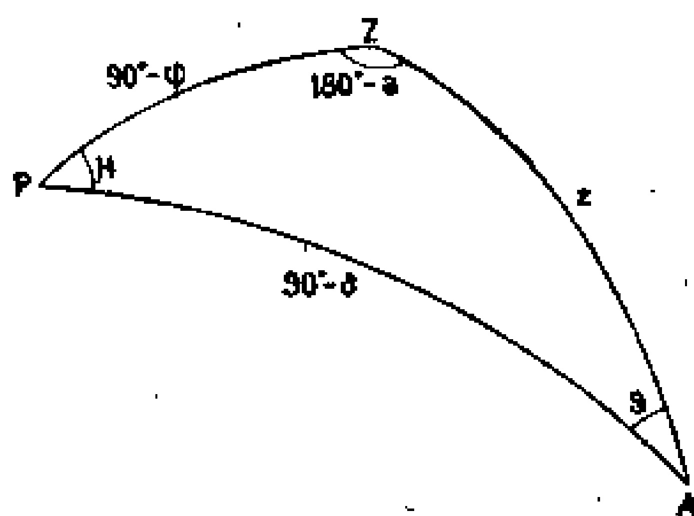


图 31

至于在 A 点的角，叫做*星位角*，一般只作为补助角而引入，常以 S 表之. 时角坐标为下列公式组表示为地平坐标的函数：

$$\left.\begin{aligned}\sin\delta&=\sin\varphi\cos z-\cos\varphi\sin z\cos a\\ \cos\delta\sin H&=\sin z\sin a\\ \cos\delta\cos H&=\cos\varphi\cos z+\sin\varphi\sin z\cos a\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

反之，我们可用下列公式将时角坐标转化为地平坐标：

$$\left.\begin{aligned}\cos z&=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos H\\ \sin z\sin a&=\cos\delta\sin H\\ \sin z\cos a&=-\cos\varphi\sin\delta+\sin\varphi\cos\delta\cos H\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

---

1) 若干世纪以来，为航海改进经度的测定所作出的努力，大大推动了天文学的进步. 由于无法保存和携带本初子午圈的时刻，航海人常记录下能看见的同一天文现象的地方时. 例如月食的各种食相曾经使用了许多世纪. 望远镜发明与木星的卫星发现以后，比月食更常见的木卫食便为人们所使用. 在那时新建立的巴黎天文台，因校核木卫的星历表，罗梅尔(Roemer)发现了光线传播的方式并测量了光速(1676).

十八世纪流行另外一种比较容易实行的方法. 因月球对于恒星的运动相当迅速，于是根据对月亮与黄道带亮星之间的角距离的测量，航海人可以精密地推算出本初子午圈上的时刻. 但为达到这个目的，便需编制可靠的月球运行表. 为完成月球运行理论，作出贡献的科学家有克勒罗(Clairaut)、欧勒(Euler)、默耶尔(Mayer)等人. 天体力学由于这方面的研究得着很大的进展. 当时西欧各国曾设置奖金，以求解决海上经度的测量问题. 在他一方面，同时出现了现今所用的方法，这指的是航海计时钟的发明. 在这方面，惠根斯(Huygens)提出了制造的原理，并使用卷簧为调节机构的方法.

本书§10所说的第三类三角形的数字解，可用以求解以上(1)与(2)两组公式. 我们亦可使用如下形式的内珀尔类比式:

$$\left.\begin{aligned}
\cot\frac{a+S}{2}&=\cot\frac{H}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\\
\cot\frac{a-S}{2}&=\cot\frac{H}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\\
\tan\frac{z}{2}&=\cot\frac{\varphi+\delta}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-S)}{\sin\frac{1}{2}(a+S)}=\tan\frac{\varphi-\delta}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-S)}{\cos\frac{1}{2}(a+S)}
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$P=90^\circ-\delta,\ \lambda=90^\circ-\varphi$$

$$\left.\begin{aligned}
\tan\frac{H-S}{2}&=\tan\frac{a}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(z-\lambda)}{\sin\frac{1}{2}(z+\lambda)}\\
\tan\frac{H+S}{2}&=\tan\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(z-\lambda)}{\cos\frac{1}{2}(z+\lambda)}\\
\tan\frac{P}{2}&=\tan\frac{z-\lambda}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(H+S)}{\sin\frac{1}{2}(H-S)}=\tan\frac{z+\lambda}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(H+S)}{\cos\frac{1}{2}(H-S)}
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

公式(1)至(4)是对于简单三角形而建立的，当平经不超过180°，时角不超过12^h时方才有效.

有时我们还须使用包含星位角的如下关系式:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos S=\cos a\cos H+\sin a\sin H\sin\varphi\\
&\sin z\cos S=\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos H\\
&\sin z\sin S=\cos\varphi\sin H\\
&\cos\delta\cos S=\sin\varphi\sin z+\cos\varphi\cos z\cos a\\
&\cos\delta\sin S=\cos\varphi\sin a
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

当 H 超过12^h，这些公式所给出的 S 超过180°，相当于简单方位三角形的外角. 方便的办法是将 S 仍然当做内角，而将这种情形当做负角. 这是以后不言而喻的一种假定.

我们现在要去讨论坐标的变化，这种变化在§14内已经提到过了. 时角坐标的情形最简单. 设 T 为恒星时，便有:

$$\left.\begin{aligned}dH&=dT\\ d\delta&=0\end{aligned}\right\}$$

这里我们假定极点和♈点在恒星天球上的位移是可以忽略的. 在这情形下，周日运动就

简化为恒星天球对于地方天球围绕固定的世界轴作匀速的自转运动. T 随时间作均匀的增长.

在这条件下, 微分第(2)组公式, 便得下列表达平经与天顶距的导数公式, 式内以 dT 代替 dH:

$$\left.\begin{aligned}&\sin z\,dz=\cos\varphi\cos\delta\sin H\,dT\\&\sin z\cos a\,da+\cos z\sin a\,dz=\cos\delta\cos H\,dT\\&-\sin z\sin a\,da+\cos z\cos a\,dz=-\sin\varphi\cos\delta\sin H\,dT\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

以上第一式还可写为

$$\frac{dz}{dT}=\cos\varphi\sin a=\cos\delta\sin S$$

从下中天或从出地面起到上中天, 天顶距不断缩小, 然后增长以至落下地平面或下中天. 上中天时 z 达极小值, 下中天时 z 达极大值.

由(6)组里最后两式消去 $\frac{dz}{dT}$, 得到 $\frac{da}{dT}$:

$$\sin z\frac{da}{dT}=\cos\delta(\cos a\cos H+\sin a\sin\varphi\sin H)$$

由(5)式可见, 上式括号里的两项表示 $\cos S$, 因此

$$\frac{da}{dT}=\frac{\cos\delta\cos S}{\sin z}=\sin\varphi+\cos\varphi\cot z\cos a$$

星在地平时, 其平经对于恒星时的导数等于 $\sin\varphi$, 而不论赤纬的数值为何; 在北半球星出地平或落入地平时, 其平经在增长中; 在南半球, 则在减缩中*(周日运动的方向表面上显出逆转, 是由于观测者面对北方面背着可见的极, 天球的转向是由右面左). 在赤道上, 星出没时其平经为稳定值**. 在北半球, 对于一切恒星, 其方位三角形内星位角决不为直角的情形, 导数 $\frac{da}{dT}$ 仍为正. 因此, 这个导数只有 $\cos S=0$ 时, 即只有在 $\cos H=\tan\varphi\cot\delta$ 时, 方才为零.

这情形只发生于星在北半球, 其赤纬大于地方纬度之时. 那时平经为极大或极小, 星在东或西大距上, 我们将于 §25 内讨论这一情形.

§21 中天, 天顶观测

星过子午面(中天)时, 上节里的公式(2)简化为

$$\left.\begin{array}{lll}H=0 & a=0^\circ & z=\varphi-\delta\\ H=0 & a=180^\circ & z=\delta-\varphi\end{array}\right\}\ \text{上中天}$$

$$H=12^h\qquad a=180^\circ\qquad z=180^\circ-(\varphi+\delta)\qquad\text{下中天}$$

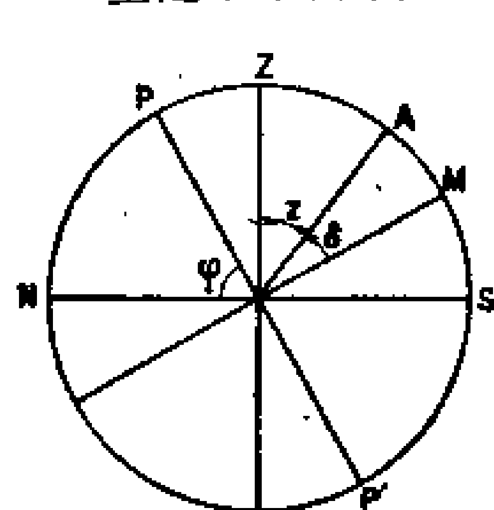


图 32

由于垂线与天赤道之间的角等于 φ, 由图 32 (代表于午圈平面) 容易推出上列的关系式.

为了避免在上中天的情形有双重的公式, 可将子午圈上天顶距在北面的(即上中天在极与天顶之间, $\delta>\varphi$ 的情形)计为负数, 自然, 在下中天时这颗星的天顶距仍是负的. 这个约定法是

*,** 原书中所谓平经, 应为平经对于恒星时的导数, 天文意义才更完整——译者注

合理的：因为将子午圈划分为0°至360°，上面的天顶距具有代数的连续性．在这个约定下，我们可将上式归纳为

$$H=0 \qquad z_s=\varphi-\delta \qquad \text{上中天}$$

$$H=12^h \qquad z_i=\varphi+\delta-180^\circ \qquad \text{下中天}$$

假设我们已经测得一颗拱极星在上、下中天时的天顶距为 z_s 与 z_i（并已经加以大气折射的校正），则我们可以立刻求得观测处的纬度与星的赤纬：

$$\varphi=90^\circ+\frac{z_s+z_i}{2}$$

$$\delta=90^\circ-\frac{z_s-z_i}{2}$$

由拱极星的观测提供了观测处的纬度 φ 之后，其他恒星的赤纬可由其上中天的天顶距推出：

$$\delta=\varphi-z_s$$

星在子午圈附近时，我们可将其天顶距表示为恒星时的函数．用上节的关系式（设 z 为正数）：

$$\frac{dz}{dT}=\cos\varphi\sin a$$

$$\frac{da}{dT}=\frac{\cos\delta\cos S}{\sin z}$$

再求天顶距的二阶导数

$$\frac{d^2z}{dT^2}=\cos\varphi\cos a\frac{da}{dT}=\frac{\cos\varphi\cos a\cos\delta\cos S}{\sin z}$$

将这些一般的公式用于上中天的特殊情形，按 z 为正或负，便应给出 a 和 S 为0°或180°，但就代数值而言：

$$z_0=\varphi-\delta \qquad z_0'=0 \qquad z_0''=\cos\varphi\cos\delta\operatorname{cosec}(\varphi-\delta)$$

在子午圈附近，我们可将天顶距表示为下列展开到二阶项的公式：

$$z=\varphi-\delta+\frac{\cos\varphi\cos\delta}{2\sin(\varphi-\delta)}(T-\alpha)^2 \tag{1}$$

若用六分仪或经纬仪测量恒星在子午圈上的天顶距，以决定纬度，由于很难恰在恒星中天那一瞬时作观测，可仔细地记录下观测的时刻，以便计算观测的对象的时角 $\Delta H=T-\alpha$，这经常是一个小量．所要求的改正后的纬度为下式所给出：

$$\varphi=z+\delta-\frac{\cos(z+\delta)\cos\delta}{2\sin z}\Delta H^2$$

其中 z 是由观测求得的天顶距．这公式内的 δ 假设为一个不变量，因而观测的对象是太阳之时，还须加以改正（见§35）．

在§17里我们已经推出一个归算到子午圈的公式，但与这里所谈的情形不同．那里是用子午仪观测，平经不变，这里仪器的位置亦和被观测的星同在一个平经上．§17里的公式给出星所在的赤纬圈与切于这赤纬圈而过地平上东、西两点的大圆之间的偏离．本节的公式(1)给出赤纬圈与其正交的高度圈之间的偏离．

例　已知 $z=40°54'.6$，一颗星的时角坐标为

$$\Delta H=4^m31^s.6=1°7'54'' \qquad \delta=+7°41'.0$$

计算纬度,其未经改正值为

$$z+\delta=48^\circ35'36''$$

因
$$\cos(z+\delta)=0.661 \qquad \cos\delta=0.991$$
$$\sin z=0.655 \qquad \Delta H=4074''=0.01975$$

(ΔH^2 的计算参看 § 3)

改正项的数值为

$$\frac{0.661\times0.991}{2\times0.655}\times0.01975\times4074''=40''.2$$

故
$$\varphi=48^\circ35'36''-40''=48^\circ34'.9$$

若解方位三角形,须用 5 位小数表,费时较多.

在结束本节时,我们还须讨论天顶附近的星中天的情形. 由于使用天顶仪以测定时刻与纬度变化颇为流行,故本问题的研究很有现实意义.

要解决的问题是将一颗赤纬为 δ 的星的较差坐标展开为小时角 ΔH 的函数,而 $y_0=\delta-\varphi$,即星的赤纬与地方纬度之差是一小量. 坐标轴经过天顶;y 轴在子午圈上指向北方,x 轴与子午圈正交,指着周日运动的方向. § 11 里的公式(3b)可以解决这个问题. 应该在那个公式里,令

$$\theta=\varphi \qquad \Delta\psi=\Delta H \qquad \Delta\theta=y_0$$

略去三阶之项,便得

$$\left.\begin{aligned}x&=\Delta H(\cos\varphi-y_0\sin\varphi)=\Delta H\cos\delta\\ y&=y_0+\frac{1}{4}\Delta H^2\sin2\varphi\end{aligned}\right\}$$

若只准确到二阶项,横坐标上的运动是匀速的,其速度与赤纬的余弦成正比.

若 ΔH 之值稍大一点,星的行径的曲率便会很显著. 设 ΔH 的极大值为 $1^m=900''=0.00436$. 设将 y 表示为角秒,并设 $\sin2\varphi$ 接近于 1(对于巴黎,这是 0.991),$y-y_0$ 的极大值是 $0''.98$. 若 $\Delta H=2^m$,则 $y-y_0$ 的极大值便达到 $3''.8$.

假设用照象天顶仪观测天顶星,使底片匣平行于 x 轴作匀速直线移动,这速度等于星在天顶时($\delta=\varphi$)星象的速度. 当星过于午圈时(其赤纬 $\delta=\varphi+y_0$),自动地揭开物镜;当其时角为 ΔH 时,关闭物镜. 在露光期间,星象在底片上移动的大小为

$$\left.\begin{aligned}\Delta x&=-\Delta H y_0\sin\varphi\\ \Delta y&=\frac{1}{4}\Delta H^2\sin2\varphi\end{aligned}\right\}$$

若 $\Delta H=1^m$, $y_0=+10'=+600''$, $\sin\varphi=0.75$, 求得 $\Delta x=-2''.0$. 为避免这种横坐标上的位移,我们给底片匣以星的赤纬的余弦成正比的速度(设每次露光时只观测一颗星). 我们可以看见,若仪器装置在赤道上,Δx 与 Δy 将同时为零.

§ 22 星的升与落

若不计入天文折射,则星在升或落时,其方位三角形是象限三角形. 这颗星的时角与平经由下列(1)式所给出,这是用内珀尔规则容易推出的,也可用 § 20 内公式(2)推得:

$$\left.\begin{aligned}&\cos H=-\tan\varphi\tan\delta\\&\cot H=\sin\varphi\cot a\\&\sin a=\cos\delta\sin H\\&\cos a=-\sin\delta\sec\varphi\end{aligned}\right\}$$

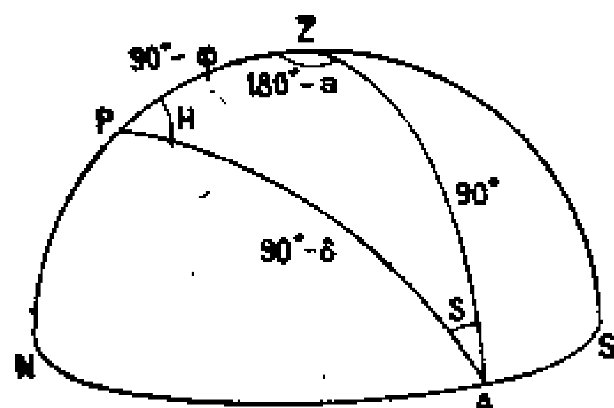


图 33

其中第一式将给出一个真值，若

$$-1<\tan\varphi\tan\delta<+1$$

或者 $-(90°-\varphi)<\delta<90°-\varphi$

凡是包含在北点或南点与地平相切的两个赤纬圈之间的星皆有升与落. 北天的星，其赤纬大于观测处的余纬的，将不会落于地平之下(这里假设观测者在北半球). 这种在下中天时也可看见的星，叫做北拱极星. 对于这地点而言，南拱极星便不会升起于地平之上.

星落入地平时的时角叫做半周日弧，因以恒星时计，这是星在地平上可见的半个弧圈. 容易了解，赤道星的半周日弧是 6^h，北天星的半周日弧大于 6^h，而南天星则小于 6^h (自然是在北半球观测).

星的赤纬为负时，其落下地平之处在第一象限内；赤纬为正时，其落下地平之处在第二象限内. 我们将从西点到星落处的平经叫做西距幅；而从东点到星升处的平经叫做东距幅. 我们以赤纬的符号为这两个幅的符号，对于恒星而言，升幅与落幅是等值的. 我们可从下式求得这两个幅度：

$$\sin A=\sin\delta\sec\varphi \tag{2}$$

公式(1)可以转化为下列的关系式：

$$\sin H=\pm\sqrt{1-\tan^2\varphi\tan^2\delta}=\pm\frac{\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\delta-\sin^2\varphi\sin^2\delta}}{\cos\varphi\cos\delta}$$

$$\sin H=\pm\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\cos\varphi\cos\delta}=\pm\frac{\sqrt{\cos 2\varphi+\cos 2\delta}}{\sqrt{2}\cos\varphi\cos\delta}$$

$$\tan H=\mp\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\sin\varphi\sin\delta}$$

$$\tan a=\mp\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\sin\delta}$$

上符号相当于落，下符号相当于升的情形. 最后还有

$$\left.\begin{aligned}\sin S&=\cos\varphi\sin H\\&=\pm\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\cos\delta}\end{aligned}\right. \tag{3}$$

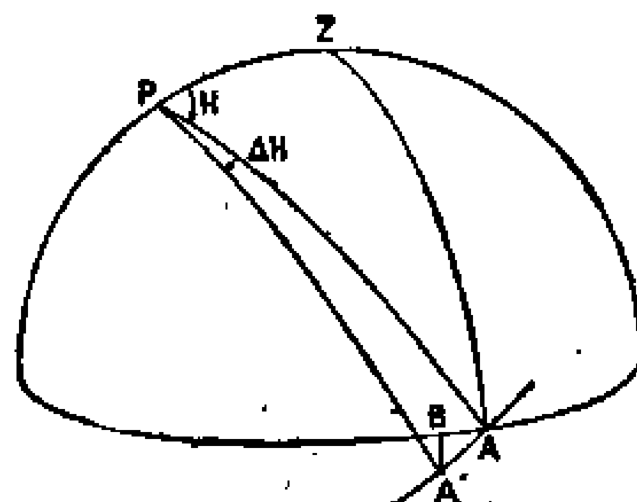


图 34

公式(3)用以计算天文折射对于星的升或落的时刻所起的效应. 在第九章内将要证明，人们看见星出现或隐没于地平时，例如在图 34 内的 B 点，它的真天距等于 90° 加一小角 R (称为地平蒙气差). 故须将公式(1)所给出的时角 H 加上 ΔH，其表达式为

$$\Delta H=R\frac{dT}{dz}$$

可是据 § 20 有
$$\frac{dz}{dT}=\frac{\cos\varphi\cos\delta\sin H}{\sin z}$$
这关系式在地平($z=90°$)时为
$$\pm\frac{dz}{dT}=\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}$$
因此,折射的改正数表示为
$$\pm\Delta H=\frac{R}{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}$$
由于天文折射的作用,星升时提早,星落时推迟. ΔH 前的符号落时取正,升时取负.

例 对于纬度 $+48°35'$ 处,计算织女星($\alpha=18^h34^m47^s$, $\delta=+38°43'$)落时的恒星时,地平蒙气差取为 $33'$.

因
$$\varphi+\delta=87°18' \qquad \cos(\varphi+\delta)=0.04711$$
$$\varphi-\delta=9°52' \qquad \cos(\varphi-\delta)=0.98521$$
$$\sin\varphi=0.74992$$
$$\sin\delta=0.62547$$
由巴罗平方根表可得
$$\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}=0.21543$$
由此得知落时
$$\tan H=\frac{-0.21543}{0.46905}=-0.45929$$
$$H=180°-24°40'=12^h-1^h38^m40^s$$
$$\Delta H=\frac{33\times4^s}{0.21543}=613^s=10^m13^s$$
$$H+\Delta H=10^h31^m33^s$$
落时的恒星时为
$$T=\alpha+H+\Delta H-24^h=5^h6^m40^s$$
升时的恒星时为
$$T=\alpha-(H+\Delta H)=8^h3^m4^s$$

在北极、北天的星都是拱极星,周日运动使其在高度圈上运行[1]. 可是赤道上没有拱极星,星皆有升与落. 由(1)式可见,在那里星升时 $H=18^h$, 落时 $H=6^h$. 至于其西距幅或东距幅,皆等于其赤纬. 人们利用这个特性去校核星的赤纬,并接合由南北两半球天文台所编制的星表. 天文学家亨斯(Hins)曾在非洲肯尼亚赤道上建了一个纬度为零(或很近于零)的高山观测站,装有一具高精度的"地平经纬仪". 这具仪器上的地平经圈的直径很长,用以观测刚升或快落时高度很低的星. 因而,在平经的观测上,无折射的改正; 而且,由于观测站的纬度或星的高度所引起的改正也是微小而确定的.

§ 23 卯酉圈的经过

赤纬小于 φ 的北天星,上中天时在天顶之南,每天必经过卯圈和酉圈各一次. 卯酉圈

1) 读者可在初等天文学书中去参考对于各纬度地方的周日运动.

上的这两点对于子午圈是对称的.

过卯酉圈时,方位三角形在天顶之角是直角. 高斯公式组可写为

$$\sin\delta=\sin\varphi\cos z$$

$$\pm\cos\delta\sin H=\sin z$$

$$\cos\delta\cos H=\cos\varphi\cos z$$

或

$$\cos H=\tan\delta\cot\varphi$$

$$\cos z=\sin\delta\operatorname{cosec}\varphi$$

由简单的转化(类似前节的转化),还可改写为

$$\tan H=\frac{\pm\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}{\cos\varphi\sin\delta}$$

$$\tan z=\frac{\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}}{\sin\delta}$$

上式内的符号过酉圈取正,过卯圈取负. 还有

$$\cos S=\sin\varphi\sin H \qquad \sin S=\cos\varphi\sec\delta$$

星的赤纬圈与地平经圈所成之角为 $90^\circ-S$. 这个角在地平时极大;当过卯酉圈之点接近天顶之时,这个角逐渐接近于零.

我们可用类似子午仪的仪器,将其旋转轴装置在南北向上去观测星过卯酉圈. 记录过卯酉圈的恒星时,取其差的一半,更经过钟行差的改正,便给出以上公式里的时角 H. 于是公式

$$\tan\delta=\tan\varphi\cos H$$

给出星的赤纬(假设已知观测站的纬度). 这种观测既不需用刻度圆环,亦不须作折射改正(因为折射不影响平经). 可是这方法只适用于相当狭窄一带的星,现已无人使用. 但在昔日,天文工作者曾成功地用以测定一些基本天文常数.

§ 24 等高圈的经过

等高观测的仪器,如棱镜等高仪,可用以观测过某一给定高度的星,其目的在测定时刻与纬度. 下面所写的是表达星过某一给定天顶距 z 的公式. 这时方位三角形的三边为:

$$90^\circ-\varphi \qquad 90^\circ-\delta \qquad z$$

波达公式立即给出时角、平经与星位角. 为预备观测,我们利用下列公式(从§9推出的):

$$\tan\frac{H}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\varphi-\delta)-\cos z}{\cos z+\cos(\varphi+\delta)}}$$

$$\cot\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(\varphi+z)-\sin\delta}{\sin\delta-\sin(\varphi-z)}}$$

$$\tan\frac{S}{2}=\sqrt{\frac{\sin(\delta+z)-\sin\varphi}{\sin\varphi-\sin(\delta-z)}}$$

例 已知 $z=30^\circ0'$ $\varphi=48^\circ35'$ $\delta=+31^\circ12'$

下列的计算是用4位小数三角真数表 (Milne-Thomson et Comrie: Standard

Four-figure Mathematical Tables; 这本书有几个附表，其中一个的自变量是时间，另一是平方表．参看 § 4）．

$$\varphi-\delta=17°23' \qquad \varphi-z=18°35' \qquad \delta-z=1°12'$$
$$\varphi+\delta=79°47' \qquad \varphi+z=78°35' \qquad \delta+z=61°12'$$

依次求得：
$$\tan\frac{H}{2}=\sqrt{\frac{0.95433-0.86603}{0.86603+0.17737}}=0.2909$$
$$\cot\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{0.9802-0.51803}{0.51803-0.3187}}=1.5227$$
$$\tan\frac{S}{2}=\sqrt{\frac{0.8763-0.74993}{0.74993-0.02093}}=0.41635$$
$$\frac{H}{2}=1^h4^m52^s.5 \qquad H=2^h9^m45^s$$
$$\frac{a}{2}=33°17'.7 \qquad a=66°35'$$
$$\frac{S}{2}=22°36' \qquad S=45°12'$$

根据这些数字，观测者可以在适当时刻将仪器放置在适当的方位上．

赤纬圈与平纬圈所成之角等于 S． 至于天顶距的变化，由下式（曾在 § 20 内推出）表达为恒星时的函数：

$$\frac{dz}{dT}=\cos\varphi\sin a=\cos\delta\sin S$$

设取 $$dT=1^s=15''$$

则得 $$dz=15''\times0.855\times0.710=9''.1$$

这大约是每一时秒内星的天顶距的变化．

§ 25　拱极星的大距

由于这类星的赤纬大于观测处的纬度，天顶便在星的周日圈的外面． 于是这类星的平经不是随时间不断增长，而是在两个极限之间变化（图 35）．当极限值为极大或极小时，分别叫它们在东大距或西大距．

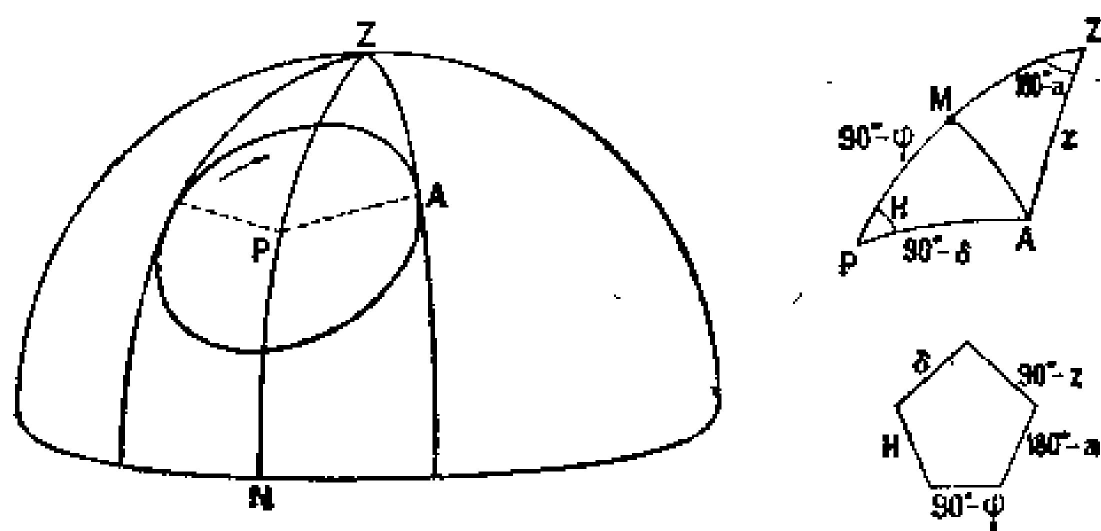


图　35

由 § 20 推出

$$\frac{da}{dT}=\cos\delta\,\mathrm{cosec}\,z\cos S$$

可见，当星位角 S 为直角时，平经对于恒星时的导数为零．因此，星在大距时，其方位三角形中的星位角为直角（图 35），即当平经之值稳定时星的赤纬圈与其平经圈正交．利用内珀尔规则，写出下列三式：

$$\cos H = \tan\varphi \cot\delta$$
$$\cos z = \sin\varphi \operatorname{cosec}\delta$$
$$\pm\sin a = \cos\delta \sec\varphi$$

式内的符号是西大距取正，东大距取负

将上式稍加转化容易推得：

$$\tan H = \pm\frac{\sqrt{\sin(\delta-\varphi)\sin(\delta+\varphi)}}{\cos\delta\sin\varphi}$$

$$\tan z = \frac{\sqrt{\sin(\delta-\varphi)\sin(\delta+\varphi)}}{\sin\varphi}$$

$$\tan a = \mp\frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin(\delta-\varphi)\sin(\delta+\varphi)}}$$

若用经纬仪瞄准过大距时的星，我们将看见它在丝网的垂直丝上移动，于是对其平经的测量可以达到很高的准确度．这是将仪器装置在某一平经上的一个很好的方法．我们还可利用大距的观测去决定纬度，即使用上面表达 a, δ 与 φ 之间的关系式．

假设 PAZ 是平面三角形，则 A 点的轨迹是以 PZ 为直径的圆周．我们现在说明这个性质不能推广到球面去．因为如设 $MA=MP=MZ$（M 为 PZ 的中点），则星位角将等于 P 和 Z 两角之和；如这三角形更是直角的，它的球面过剩将等于零，这是不可能的情形（除非这三角形的面积是无限小）．因此，大距的轨迹是一个经过极点与天顶点闭合的空间曲线[1]．星在这曲线之内时，其平经缩减；在外时，其平经增长（同以前一样，假设观测者在北半球）．

例　已知天龙座 γ 星的 $\alpha=17^h55^m11^s.75$, $\delta=+51°29'46''.5$，观测处的纬度为 $+48°35'0''.5$，求其在大距时的恒星时与平经．

我们使用间距为 10″ 的 5 位小数真数表（Five-figure tables of natural trigonometrical functions, Nautical Almanac Office, London, 1947）．

$$\delta-\varphi=2°54'46''.0 \qquad \sin(\delta-\varphi)=0.05082$$
$$\delta+\varphi=100°4'47''.0 \qquad \sin(\delta+\varphi)=0.98456$$
$$\sin\varphi=0.74992$$
$$\cos\delta=0.62257$$
$$\sqrt{\sin(\delta-\varphi)\sin(\delta+\varphi)}=0.22368$$

于是依次求得：

$$\cot a = \frac{\mp 0.22368}{0.62257} = \mp 0.35928$$
$$a = 180° \mp 70°14'16''$$
$$a = \begin{cases} 250°14'16'' & \text{东大距} \\ 109°45'44'' & \text{西大距} \end{cases}$$

$$\tan H = \pm\frac{0.22368}{0.74992\times 0.62257} = \pm 0.47910$$
$$H = \pm 1^h42^m23^s.7$$

1）这一类型的曲线在第四章讨论赤经的步差时还要谈到。

过东大距的恒星时是

$$16^h12^m48^s.0$$

过西大距的恒星时是

$$19^h37^m35^s.4$$

最后.

$$\tan z = \frac{0.22368}{0.74992} = 0.29827$$

$$z = 16°36'30''$$

§26 纬度变化与地极移动

假设地球的转动瞬时极在地面上的位置不变，更假设每一个地点的垂线的方向对于该处的标记是不变的，则地面上每点的纬度都没有变化．可是居斯特内(Küstner, 1889年)与强德勒尔(Chandler)证明，实际上纬度有十分之几角秒的变化．

我们先谈一下物体围绕定点运动的经典理论．假设惯量椭球是旋转体，而且外力(例如太阳或月球的引力)可以忽略不计，便有如下的结论：

1．物体将围绕惯量主轴(定点在惯量中心)以匀角速旋转，而且指着空间里一个不变的方向，自然，这个轴在物体内也保持一定的方向；

2．若旋转运动开始时所围绕的瞬时轴不与惯量主轴相合，则这旋转轴以后在空间虽保持不变的方向，但在物体内却是变化的．于是旋转轴围绕主轴作一旋转锥体．欧勒证明，在这情形下若设地球是刚体，则旋转轴将围绕惯量中心描出一个正圆形的本体极迹(Polhodie)，周期为 305 日．

观测的结果与这理论所推出的有很大的差异．为测量地极移动，天文工作者设有一

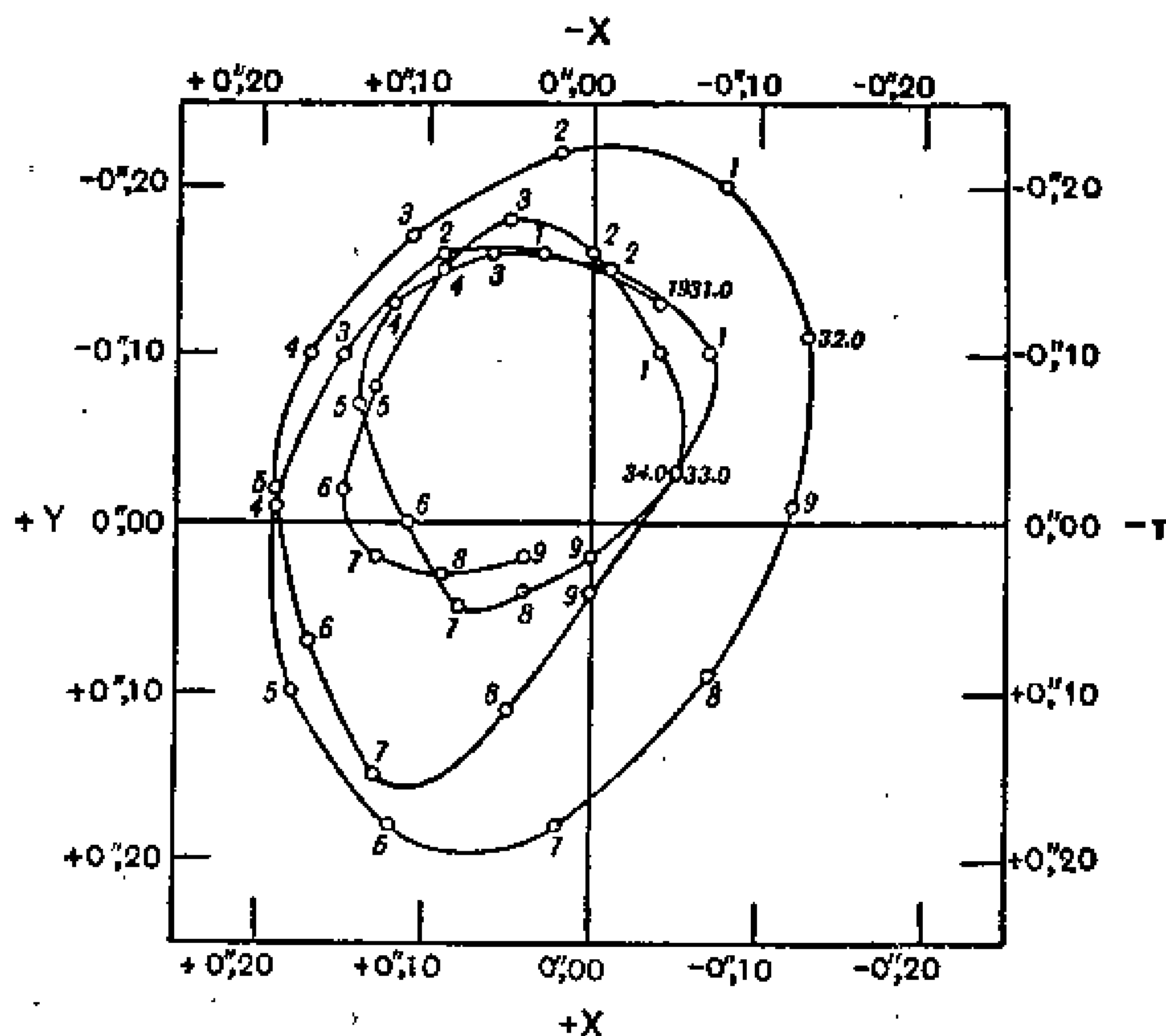


图 36　1931.0 至 1934.9 的本体极迹．正方形的每边在地面相当于 15 米

个国际纬度服务系统，在 39°8′ 纬度圈上，距离大约相等处建立有三个观测站，不断地测量它们的天文纬度*. 由观测结果的讨论得以描绘出本体极迹，它的形状与正圆相差很远. 实际它是围绕平极运动，由许多不规则的环圈所构成(图 36). 瞬时极离开平均极从不超过 0″.4 或 13 米.

可见，在地球是不变形的刚体的假设下所建立的自转理论是与事实不相合的. 由地壳的潮汐现象(陆潮)可知，地球是有弹性的. 另一方面，地上的气象现象起因于大量流体物质的移动，亦是一个原因. 最后，地球内部的物质亦可能有运动.

人们在纬度变化里很快就发现有两个主要的成分：

(1) 一个周年的位移，其半变幅约为 0″.1 或 3 米，可能是由气象因素所作成的；

(2) 另一个周期大约 427 日(强德勒尔周期)的移动，其半变幅约为 0″.2 或 6 米. 这可能是欧勒周期经过地球的弹性修改而作成的.

在观测里将这两种效应扣除以后，还剩余有不可忽略的残差；由其无规的形态可见所牵涉的现象是很复杂的，难以用数学去处理.

国际纬度局负责归算并讨论各纬度站的观测结果，每十分之一年宣布一次瞬时极点的直角坐标. 这坐标的原点是任意选定的一个平均极点. x 轴与国际经度圈相切，而指向格林尼治；y 轴指向 $+6^h$ 的经度圈. 设一站的纬度为 L，则其瞬时纬度超过其平均纬度之差为

$$x\cos L+y\sin L$$

但该站的纬度还可能由于地方性的因素而有变化；关于这一点，还知道得很少. 一个显著的例子是在格林尼治观测得的垂线偏差，查出其成因是由于泰晤士河的潮汐.

在一定地点，瞬时子午圈一般不与平均子午圈相合. 因此，地平经度与地理经度都因极移而有改变. 读者可以证明：设 L 为平均纬度为 φ 处的平均经度，则其瞬时子午圈的地平经度对于平均子午圈的改正值为

$$\Delta a=(x\sin L-y\cos L)\sec\varphi$$

至于经度，我们将其归算到瞬时子午圈，这个子午圈假定在平均经度为零处与赤道相交. 瞬时经度与平均经度之差的关系式为

$$\Delta L=(x\sin L-y\cos L)\tan\varphi$$

格林尼治天文台的瞬时经度等于 $-y\tan\varphi_G$，因而一般是不为零的.

---

* 我国天津在这一纬度圈上设有一个纬度观测站——译者注

第三章　太阳的视运动

这一章先讨论恒星天球上有关太阳的视运动的几个问题，换言之，即相对于与地面联系而不参加周日自转的参照系的运动问题．然后研究这一运动与周日运动合成的效应．由此得出的几个结果，其中有将真太阳时表达为均匀时的函数的近似公式．这关系在以后一章里还要作进一步的阐明，而且利用它可以从太阳时或恒星时去推出均匀时．

§27　太阳在恒星天球上的运动，黄道与♈点

太阳对于恒星的运动，可以说是日常的观测事实．一方面，随太阳赤纬的周期变化而来的有四季的循环．另一方面，太阳赤经的变化表现于太阳在星座间的移动；只需在每天夜半向北方观看星座，便可明白这一事实：九月末我们看见*大熊*，十二月末*天龙*的头，三月末*仙后*，六月末*御夫*．根据这些观察，再加以星图的协助，我们容易了解太阳循顺向运行，其赤经每年增加 24^h．

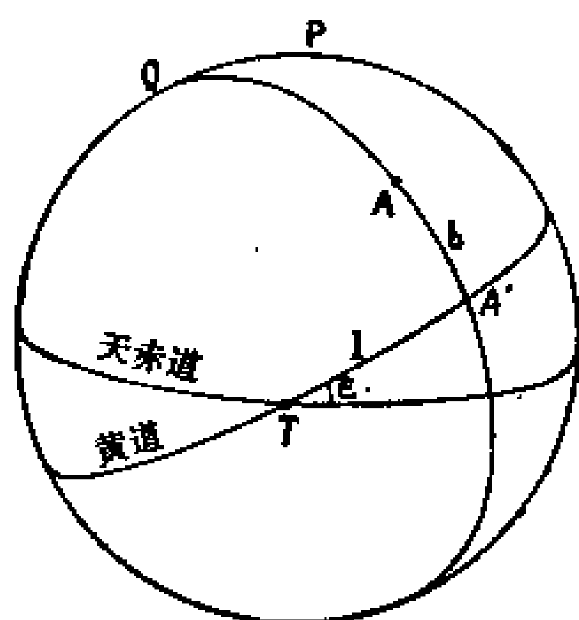


图　37

说确切一些，太阳的中心在恒星天球上走了一个大圆(图 37)．因而它的相对轨道是平面的，在包含地球的平面之内．我们叫这平面和表现这平面的大圆为*黄道*[1]．月球与大行星的轨道都距离黄道不远．与黄道平行并与其相距 8°.5 的两圈之间的天区叫做*黄道带*．古人认识的大行星皆在这带内运行．

黄道的*升交点*是太阳由南半球运行到北半球，其轨道与赤道相交的一点．太阳于每年 3 月 21 日，即*春分日*，经过这一点，因而我们常将这个升交点叫做*春分点*，亦称为♈点．这一点被取作赤经的原点，因而它的赤道坐标：$\alpha=0,\ \delta=0$．这一点的时角被规定为*恒星时*．

为了完全固定黄道的位置，还须给出*黄赤交角*，即黄道对于天赤道的倾斜角，其数值 $\varepsilon=23°27'$．

太阳在天球上运行一周，比一个儒略年(365.25 日)稍长一点．但是，由于还没有对于"年"(♈点、黄赤交角等词)给以确切的定义，我们暂且将太阳运行一周的时间当做儒略年，以后还要转回来讨论这一点和下面所得的初步的数字结果．

§28　黄道坐标及其与赤道坐标的关系

在很早的时期，人们已将黄道取为天上坐标系的基本平面，而将这坐标称为*黄道坐*

1) 黄道的更确切定义是："黄道是地、月系统重心的轨道平面与天球相交而得的天球上的大圆．由于岁差的关系，黄道并非固定．黄道绕末端与春分点距离角为 N(对于 1950 年，N 角约为 5°36′) 的瞬时旋转轴，以每世纪 47″ 的速率作顺时针方向的转动．太阳中心，也并非严格在黄道上，有不超过 1″.5 的微小变动"．

标. 这平面上的原点是♈点,以顺向为正(图 37). 本书内以 Q 表示黄道的北极点,以 P 表赤道的北极点. 设 A 表恒星天球上的一点;半大圆 QA 与黄道相交于 A' 点. 我们将 ♈A' 弧叫做 A 点的黄经,由 $0°$ 至 $360°$ 计算. 至于 $A'A$ 弧,叫做 A 点的黄纬,从 $0°$ 至 $90°$ 计算,向北极为正,向南极为负. 黄经与黄纬分别以 l 与 b 表示.

赤道两极与♈点所围成的大圆叫做二分圈. 含世界轴而与二分圈正交的大圆叫做二至圈,它经过黄道两极与黄道相交两点的赤道坐标为

$$\begin{cases}\alpha=6^h\\ \delta=+\varepsilon=+23°27'\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=18^h\\ \delta=-\varepsilon=-23°27'\end{cases}$$

这两点中前一点是夏至点,后一点是冬至点. 二分点与二至点将黄道分为四个象限. 在二至点上,太阳的赤纬的绝对值为极大.

赤道坐标系可由围绕 O♈ 轴转过 ε 角而化为黄道坐标系. 由于黄极 Q 的赤道坐标为 $\alpha_Q=18^h$, $\delta_Q=90°-\varepsilon$;而赤极 P 的黄道坐标为 $l_P=90°$, $b_P=90°-\varepsilon$. 更设 A 为一星,其赤道坐标为 α 与 δ,黄道坐标为 l 与 b.

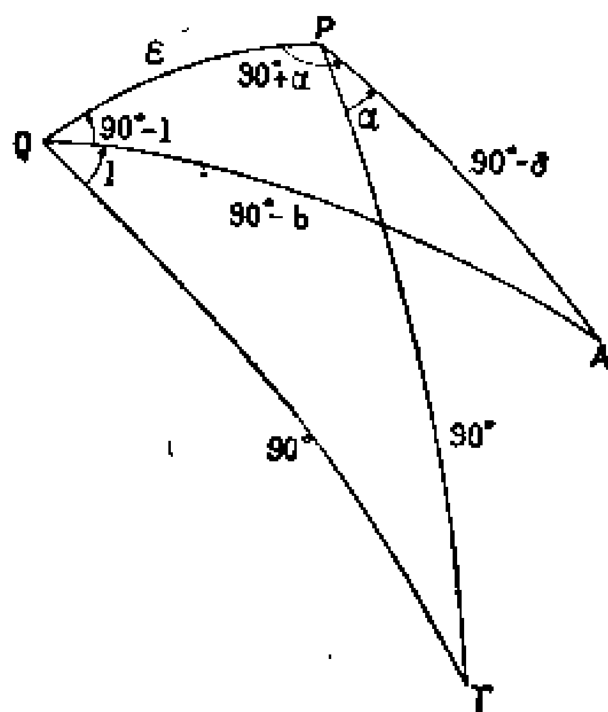


图 38

在 PQA 三角形的 6 个元素里(图 38), 5 个可以表示为给出的或未知量的函数:

$$\left.\begin{array}{l}PQ=\varepsilon\\ PA=90°-\delta\\ QA=90°-b\end{array}\right\}\text{三边}\qquad \left.\begin{array}{l}\angle P=90°+\alpha\\ \angle Q=90°-l\end{array}\right\}\text{角}$$

因♈PQ 是双象限三角形,♈PQ 与♈QP 都是直角. 于是,

$$\left.\begin{array}{l}\sin b=\cos\varepsilon\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha\\ \cos b\cos l=\cos\delta\cos\alpha\\ \cos b\sin l=\sin\varepsilon\sin\delta+\cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha\end{array}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\delta=\cos\varepsilon\sin b+\sin\varepsilon\cos b\sin l\\ \cos\delta\cos\alpha=\cos b\cos l\\ \cos\delta\sin\alpha=-\sin\varepsilon\sin b+\cos\varepsilon\cos b\sin l\end{array}\right\}\tag{2}$$

自然,我们还可用内珀尔类比公式去对 PQA 三角形作数字解,我们不在这里再举例了.

§29 太阳的赤道坐标,恒星时

若欲计算其坐标的星是太阳,则上面所提出的问题便简化了,因为太阳的黄纬(但除了第四章内的保留情形外)据定义是为零的. 这里不将前节的(2)式加以转换,更好的办法是解三边为赤道、黄道与太阳的时圈所形成的直角三角形,其主要元素为

$$♈S'=\alpha_0\qquad SS'=\delta_0\qquad ♈S=l_0\qquad \angle♈=\varepsilon$$

由内珀尔的五角规则(图 39),得到这些元素之间的关系式:

$$\left.\begin{aligned}\sin\delta_0&=\sin\varepsilon\sin l_0\\ \sin\alpha_0&=\cot\varepsilon\tan\delta_0\\ \tan\alpha_0&=\cos\varepsilon\tan l_0\\ \cos l_0&=\cos\alpha_0\cos\delta_0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

容易证明，当 l_0 与 α_0 在 180° 至 360° 之间时，这些公式仍然有效(§ 8)，因为那时 δ_0 是负的.

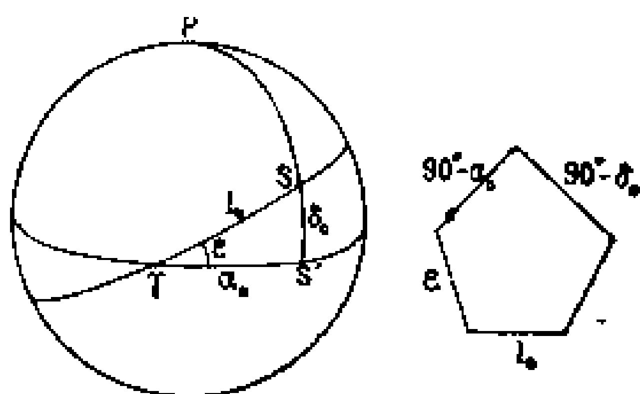


图 39

如已知太阳的赤纬与黄赤交角，则借(1)内的前两式可以计算它的黄经与赤经. 而黄赤交角是天文学的一个基本常数，其数值可以认为是确定了的[1]. 至于太阳的赤纬，和恒星的赤纬一样，可用子午环在每天真正午加以测定. 因此天文工作者为寻觅太阳运动的规律，可以借这种测量去追踪太阳的黄经或赤经.

(1) 内的第三式以后要用来建立把太阳的赤经表示为时间的函数的公式.

再回转来看(1)内的第二式. 只须测量太阳的赤纬而算出其赤经. 因此太阳成了*赤经的基本标点*. 作为原点的♈点是一个抽象的，为我们所不能观测的标点. 一年里只有在二分日前后几天，才可以用太阳为中介将恒星和♈点联系起来. 由这种方法联系到赤道坐标系的恒星叫做*基本星*.

凡有编制基本星表工作的天文台，经常观测上中天时(真正午)的太阳，去同时测定天文钟(或记时仪)所记录的中天的时刻与太阳的赤纬. 于是，由计算可得恒星在同一时刻的赤经，换言之，即其上中天时的*恒星时*. 计算的恒星时与记录的恒星时之差，提供了天文钟的改正值. 如 § 16 所说过的，将这些改正数的内插值用到欲作为基本星中天观测得的时刻上去，便给出它们的绝对赤经.

基本星又可取为恒星时的定标星，于是它们成了*次级定标星*. 我们也用这些星来测定恒星时(§ 16)和其他恒星与行星的赤经. 这样便得所谓*相对赤经*. 但是我们应当了解，只用这些星不能测定恒星时或♈点. 我们所作的相对观测，无论是恒星时或赤经，其结果总归算到*以前的太阳观测*(有时是很老的观测)，换句话说，即是基本星的方位所根据的观测. *只有太阳才决定恒星时*，因此须注意不要将恒星时混淆为一种"星时"，这一点我们已经在 § 16 内解释过了.

现今天文工作者只作相对观测，这是由于相对观测比绝对观测容易实施得多. 一天之内只能观测一次太阳中天，而且观测者还须特别留心消除由于仪器与观测室内空气变热而引起的误差. 但恒星的观测便没有这些困难，而且在一夜里天文工作者可以观测的中天的恒星相当之多，容易由此取消每个观测上的偶然误差. 基本星的观测只留给少数天文台去做，而相对观测，无论是时刻或方位的测定，是大多数天文工作者经常性的业务.

我们研究了基本面移动以后，再回头来讨论恒星时与其借基本星测定的方法.

§ 30 太阳在黄经上的运动

上节已经说明怎样利用太阳的赤纬观测去研究太阳在黄经上的运动. 自哥白尼以来，

1) 这里"常数"一词不是严格的. 事实上，黄赤交角随时间缓缓变化，但其数值是可由时间的已知函数求得的.

大家承认地球围绕太阳运动，开普勒发现了有关这运动的规律，而且可应用于所有的行星，我们将在以后一章内详细地讨论．太阳对于地球的相对运动自然也遵循开普勒定律：

1．太阳对于地球的行径是一个椭圆，地球在其一个焦点上．

2　这运动的面积速度不变．

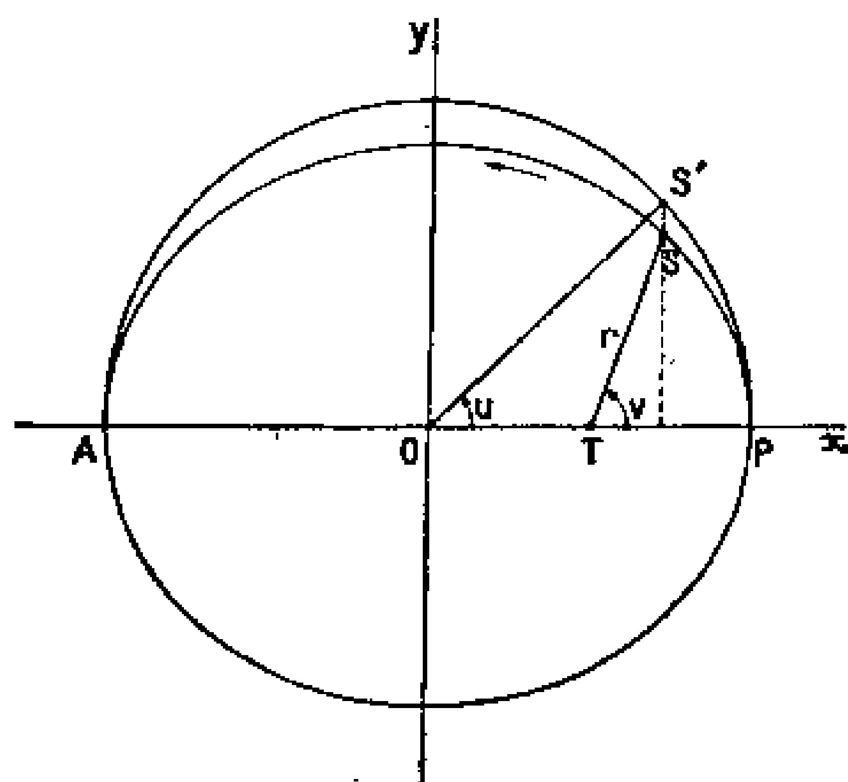


图　40

设在黄道面上(相对轨道，图 40)，T 表示地球，AP 表示轨道的长轴(或拱线)，P 是太阳与地球最接近的一点(近地点)，A 是最远的一点(远地点)．为完全决定太阳在黄经上的运动定律，还须指明：这运动是顺向的和近地点的黄经 ϖ (在 1950 年开始时，$\varpi=282°4'.5$)，以及太阳约于 1 月 2 日过近地点，7 月 2 日过远地点．

令 t_0 为太阳过近地点的历元，太阳于 t 时在黄道面上的位置为其向径 $r=TS$ 的长度和 TS 与 TP 间的角度 v 的数值所决定(图 40)；这个 v 角叫做真近点角．至于太阳的黄经，等于 $v+\varpi$．于是，我们讨论的问题便成为将真近点角的变化表示为均匀时 t 的函数，换句话说，即研究开普勒运动．

令 a 与 b 为椭圆的长、短两半轴，e 表偏心率，u 表示 S 点的偏近点角，这一点对于轨道两轴的直角坐标(图 40)可以写为

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos u\\ y&=b\sin u=a\sqrt{1-e^2}\sin u\end{aligned}\right\}$$

因为，另一方面，

$$\left.\begin{aligned} r\cos v&=x-ae=a(\cos u-e)\\ r\sin v&=y=a\sqrt{1-e^2}\sin u\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

还有：

$$\left.\begin{aligned} r&=a(1-e\cos u)\\ \cos v&=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}\\ \sin v&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

为着引入时间 t，应回到开普勒第二定律去．椭圆(其面积为 πab)在一年的时间 A 内扫过．由于设想面积 PTS 于 $t-t_0$ 时间内以匀面积速度扫过，则

$$\text{面积 } PTS=\pi ab\,\frac{t-t_0}{A}$$

容易证明，这面积(即椭圆扇形 POS 与三角形 TOS 之差)更可表示为

$$\text{面积 } PTS=\frac{1}{2}ab(u-e\sin u)$$

由以上两式便得开普勒方程式：

$$u-e\sin u=\frac{2\pi}{A}(t-t_0)$$

时间因子 $2\pi/A$，以 n 表示之，是太阳对于地球的平均角速度；命名为平均运动．其数值(将详于 § 61)是

$$n=\frac{1296000''}{365.25}=3548''.2=0°.98561 \tag{3}$$

这里时间的单位是平太阳日.

若太阳的角运动是匀速的,而近地点的历元 t_0 不变,则 $n(t-t_0)$ 代表任何时 t 的近点角的数值,这个量以 M 表示,叫做平近点角. 开普勒方程式最后写为

$$u-e\sin u=M \tag{4}$$

为了决定太阳于 t 时在黄道上的位置,应该计算 r 与 v. 为此,我们先计算 M,然后再解开普勒方程式而求得 u. 于是(1)与(2)两式提供了问题的解答.

这里我们只对问题作近似解,即只取偏心率的一阶项. 事实上,地球轨道的偏心率相当小,在一级近似值里可以略去其平方项(在编制精密的星历表时,自然不是这样的):

$$e=0.01673 \qquad e^2=0.00028 \quad (1950)$$

以另一名词表达,由于地球轨道的扁度为

$$\frac{a-b}{a}=1-\sqrt{1-e^2}=\frac{e^2}{2}+\cdots=0.00014,$$

相当小,故椭圆与其大辅助圆相距很近. 利用(2)式我们容易证明:

$$\sin(v-u)=\frac{e\sin u-\sin u\cos u\,(1-\sqrt{1-e^2})}{1-e\cos u}$$

如只保留含 e 的一阶项,则可写为

$$\sin(v-u)=e\sin u+\cdots$$

更因

$$u=M+e\sin u$$

于是在所要求的近似下,最后,

$$v=M+2e\sin M+\cdots \tag{5}$$

(2) 内的第一式还可写为

$$r=a(1-e\cos M+\cdots) \tag{6}$$

这些公式仅含有到 e 为止的项,对于本章所讨论的问题已足够了[1].

作了以上的讨论之后,我们再回头来谈太阳的黄经. 我们可以写出它表示为时间的函数的近似式:

$$l_0=\varpi+v=\varpi+M+2e\sin M+\cdots \tag{7}$$

这方程所规定的运动显然不是匀速的,它里面含有一个与 $\sin M$ 有关的周期项,因而这周期是一年. 这叫做中心差. 为便利数字计算,须将公式里的系数表示为常用的角分. 按照§3里的规则,便有

$$2e=0.03346\times3438'=115' \qquad (1950)$$

可见,太阳可在其平近点角所表示的动点前或后约2度,这大约相当于它在两天内所走的弧度. 这样一个显著的现象自然不会不引起古人的注意. 托勒密将中心差定为143′,也许是从喜帕卡斯得来的;哥白尼求得更确切的数值为111′.

将(7)式对时间 t 求导数,并考虑到 $dM/dt=n$,便求得太阳的视角速度:

$$\frac{dl_0}{dt}=n(1+2e\cos M+\cdots)=3548''.2+118''.7\cos M+\cdots \tag{8}$$

真太阳的视半径 s 很近似地与向径成反比例而变化. 设当 $r=a$ 时,$s=s_0$,则

1) 第十章里有为计算星历表用的更完全的展开式.

$$\sin s = \frac{a}{r}\sin s_0$$

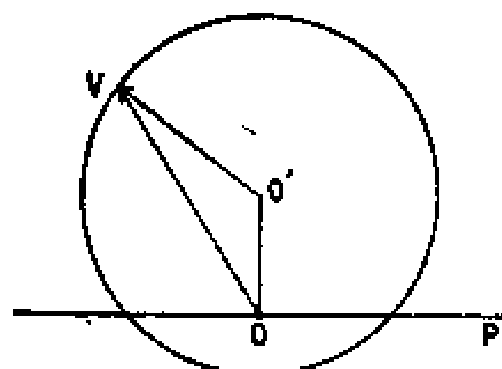
在与以上相同的近似值下，我们可以写出

$$s = s_0(1+e\cos M+\cdots) = 16'0''+16''\cos M+\cdots$$

下表列出由以上公式所推出的数量的近似值(对于每一象限开始处 M 的数值)．

	1月2日	4月3日	7月2日	10月1日
M	0°	90°	180°	270°
r/a	0.98327(极小)	1.00000	1.01673(极大)	1.00000
v	0°	91°55′	180°	268°5′
dl/dt	61′7″(极大)	59′8″	57′9″(极小)	59′8″
s	16′16″(极大)	16′0″	15′44″(极小)	16′0″

在第十章内，我们将证明开普勒运动的速端曲线是一个正圆(图 41)．设 O 代表速端曲线的极点，$\boldsymbol{OV}$ 代表速度，OP 代表拱线的方向，则速端曲线的中心在 O'，即顺着运动的方向从近地点转过 90°，于是，



图．41

$$OO' = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$O'V = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$$

速度的分量 $\boldsymbol{O'V}$ 是与向径正交的．

这些公式将于第六章讨论光行差时使用．

§ 31 四　季

我们将以上所推出的公式应用去计算四季的长短．

二分线与二至线将黄道分为四个象限(图 42)．太阳行经每个象限的时间叫做一季；由于太阳在黄经上的运动不是匀速的，所以四季的长短不等．

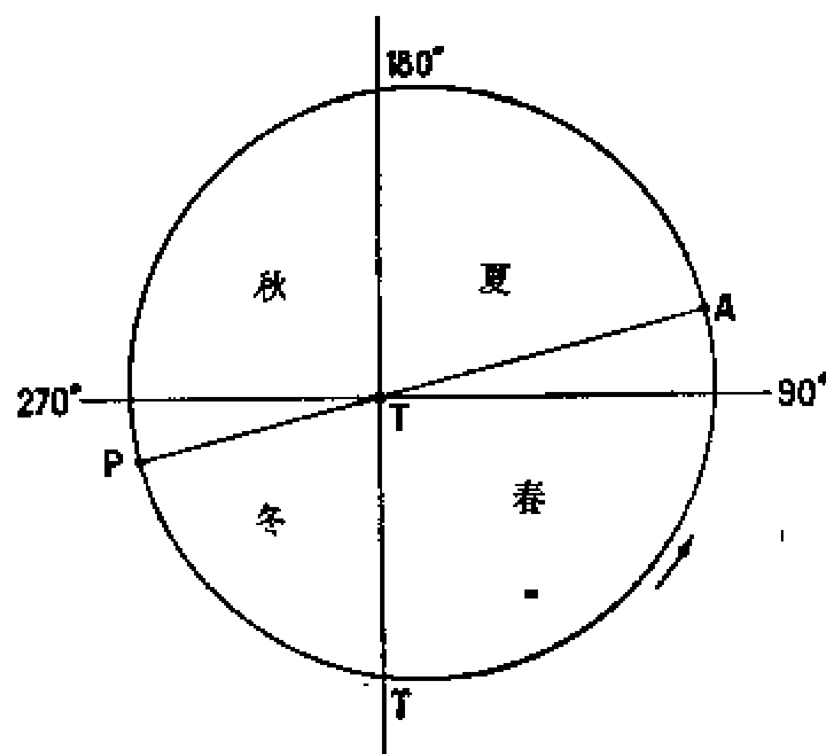


图 42

按照上节的符号，

$l_0 = 282°4'.5 + M + 115'\sin M + \cdots$　(1950)

$M = 3548''.2(t-t_0)$

$t_0 = 1950$ 年 1 月 3.02 日

由这三式可见，太阳于 1950 年 1 月 3 日子夜后少许(0.02 日)过近日点，那时它的黄经为 282°4′.5．

解以上含 M 的方程式，将 l_0 设为 0°，90°，180°，270°，360°，求 M 的数值，便得每季开始的日期．设以

$$l_0 - 282°4'.5 = v$$

并考虑在表示中心差的方程式里若以 v 代替 M 只相差一个二阶的误差，则待解的方程式转化为

$$M=3548''.2(t-t_0)=v-115'\sin v$$

v 的数值依次为 $77°55'.5$, $167°55'.5$, $257°55'.5$, $347°55'.5$, $437°55'.5$.

数字计算给出下列结果：

$t-t_0$	季	长短
$t-t_0=77.16$ 日		
169.97	春	92.81 日
263.59	夏	93.62
353.41	秋	89.82
442.41	冬	89.00

另一方面，将 $t-t_0$ 这段时间加入太阳过近地点的历元，便求得四季开始的日期：

春分	3 月 21.18 日	(21.191 日)
夏至	6 月 21.99 日	(21.984)
秋分	9 月 23.61 日	(23.614)
冬至	12 月 22.43 日	(22.426)

括弧里的数字是法国天文年历所给出的，是根据更严格的方法，考虑了我们所略去的摄动项而求得的. 两者最大的差为 0.011 日或 12 分钟.

由此可见，两个热季(春、夏)在北半球经历 186.43 日，而在南半球只有 178.82 日.

近地点的长期进动与步差(见第四与第七两章)的效应，使四季的长短发生缓慢的变化. 在喜帕卡斯(旧译伊巴谷)时代，太阳在秋季过近日点，因而春季是最长的一季.

§32 太阳在赤经上的运动

在 §30 里，我们利用开普勒定律已将太阳的黄经表示为均匀时的函数；利用 §29 里的关系式

$$\tan\alpha_0=\cos\varepsilon\tan l_0 \tag{1}$$

亦易将太阳的赤经表示为均匀时的函数.

(1) 式与 $$\tan y=p\tan x\quad(p>0)$$

形式相同，其解答已在 §18 里给出过：

$$y=x+q\sin 2x+\frac{q^2}{2}\sin 4x+\frac{q^3}{3}\sin 6x+\cdots \tag{2}$$

式内 $$q=\frac{p-1}{p+1}\quad(|q|<1)$$

将这展开式应用于(1)式所表达的太阳的赤经，便得

$$\left.\begin{aligned}
q&=-\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\\
q&=-0.04308=-148'.1\\
\frac{q^2}{2}&=0.00093=3'.2\\
\frac{q^3}{3}&=-0.000027=-5''\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_0 = l_0 - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2l_0 + \frac{1}{2}\tan^4\frac{\varepsilon}{2}\sin 4l_0 - \frac{1}{3}\tan^6\frac{\varepsilon}{2}\sin 6l_0 + \cdots$$
$$= l_0 - 148'.1\sin 2l_0 + 3'.2\sin 4l_0 - 5''\sin 6l_0 + \cdots$$

因此，太阳的赤经所受的影响，除由其黄经而来的中心差之外，还有含引数为 $2l_0$ 的偏差项，其变幅与黄赤交角有关. 后面这一种差的总和 R 叫做赤道订正.

还须注意，引数 $2l_0$ 不是时间的线性函数，而是

$$2l_0 = 2(\varpi + M) + 4e\sin M + \cdots$$

表示 $2l_0$ 的级数里每一项可展开为级数，例如：

$$\sin 2l_0 = \sin 2(\varpi + M) + 2e\sin(2\varpi + 3M) - 2e\sin(2\varpi + M) + \cdots$$

赤道订正的首项更可分为无限项的序列，其前几项的周期为6月、4月、12月等，于是，

$$R = -\tan^2\frac{\varepsilon}{2}[\sin 2(\varpi + M) + 2e\sin(2\varpi + 3M) - 2e\sin(2\varpi + M) + \cdots]$$

式内主要项(以后只保留这一项)，周期是6个月，其半变幅为 $148'.2$; 以后两项的半变幅约为 $5'$. 这是展开式中最重要的三项.

总之，理论为我们提供了把 α_0 表示为均匀时的函数的公式，写出其几个主要项为

$$\alpha_0 = \varpi' + M + 2e\sin M - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2(\varpi + M) + \cdots \tag{3}$$

$$\alpha_0 = A + nt + 115'\sin M - 148'\sin 2(\varpi + M) + \cdots$$

式内 $\qquad A = \varpi - nt_0 \qquad n = 3548''.2.$

或者将角度变换为时间：

$$\alpha_0 = A_0 + nt + 460^s\sin n(t - t_0) - 592^s\sin 2(A_0 + nt) + \cdots \tag{3b}$$

A_0 与 t_0 是常数，而 n 的数值为

$$n = 236^s.555$$

时间的单位为平太阳日.

关于这个题目，我们须在这里为初学的人作一点说明.

当我们将数值代入一个代数式去，以作星历表的计算之时，便会被引诱去写出量纲不均匀的等式(至少表面是这样的). 例如，当我们将 nt 之积写为 $236^s.555t$, 更指出以平太阳日计算 t, 人们可能会想到在 α_0 角的表达式里引入一个乘积，其量纲为时的平方. 出现这个困难是由于，用同样的字，有时表时的单位，有时表角的单位[1]. 236.555 这个数在这里所表示的是角速度，即每一平日内的运动为 $236^s.555$ 的一个角，所以应写为 236.555 角秒/日；但是习惯上人们却不这样写. 可见，为表达时秒(s)，按其所指是角或时，我们应采用不同的符号，即在 $236^s.555t$ 一式里应有一种象征的符号，去表达太阳的赤经在每一平日内增加 $236^s.555$ 这一事实.

以上所得的结果还须加以各种订正：如基本面的变化，地球轨道根数的变化以及地球自转的变化；但这些变化在原则上并不影响从(3)式所导出的结论.

§33 真太阳时，平太阳时，恒星时

地方真太阳时，按定义是太阳中心的时角("时"这个字这里用以表示时角的意义，可

1) 我们常将"小时"和"时间"两个字混为是同义词.

参看 §2 的讨论). 因此其表达式为

$$H_0=T-\alpha_0$$

T 代表恒星时. 根据前节(3)式将这公式展开, 为简化书写计, 以 C 表示中心差, R 表示赤道订正, 则

$$H_0=T-A_0-A_1t-C-R \quad (A_1=n)$$

可见真太阳时既受太阳赤经差数的影响,还因恒星时 T 的差数而改变(这种差数以前已经讲过,以后还要讨论). 将恒星时表达为如下的形式:

$$T=T_0+T_1t+\tau$$

式内 T_0 是常数, T_1 表示一平日内恒星时的增率, τ 表示恒星时的各种差之和(其性质将在以后讨论). 真太阳时可用如下的形式表示为均匀时的函数:

$$H_0=T_0-A_0+(T_1-A_1)t-(C+R-\tau)$$

我们将真太阳时的各种差数之和(变号)叫做时差,并令

$$E=C+R-\tau$$

于是真太阳时表示为如下的形式:

$$H_0=H_1+(T_1-A_1)t-E \tag{1}$$

H_1 是常数.

一切测量天体的时角的方法, 可以应用于太阳, 去测定地方真太阳时. 特别是, 可用子午仪(§35)去确切测定太阳上中天($H_0=0$),即真正午的时刻; 亦可使用日规(§38), 以或大或小的精密度读出真太阳时; 更可用六分仪或经纬仪测量太阳的天顶距,而推算出真太阳时. 可见, 真太阳时是可由观测决定的, 但由于它不按时间的线性函数增长, 因而不能用钟去守住它. 但为实际使用计, 须有一种均匀的时间尺度. 人们的活动与昼夜的循环有关, 故均匀的时间尺度须与由太阳的周日视运动所决定的时间尺度 (在平均的情形下)相差很少. 于是我们引入了平太阳时这个概念.

如果理论为我们提供时差 E 的确切表达式, 而且已经计算出它的"星历表", 更如果在某一给定时刻由观测得知地方真太阳时为 H_0, 则地方平太阳时, 按定义是 $H_m=H_0+E$. 可见, 平时即是加上偏差订正数(时差)的真时. 平时是一个不能由直接观测而得的量,其决定须先对地球的自转与公转有相当的了解.

根据地方平时的定义,我们可以写出

$$H_m=H_1+(T_1-A_1)t \tag{2}$$

如果我们要将地方平太阳时认为是力学上的均匀时,便应该令

$$T_1-A_1=1,$$

这等于以平日计算时间 t,因为一个平日是 H_m 增加一周天所需的时间. 这以后,平时 H_m 也将以平日计算. 为了得到完满的一致化,还应使

$$H_1=T_0-A_0=0$$

换句话说,即采用某一平日的平午为时间 t 的原点. 于是剩下的是这个等式:

$$H_m=t$$

地方平太阳时于每天平午为零(可差若干倍周天或若干平日). 于是在那瞬时有

$$H_0=-E$$

故平时早于真时一段变化的时间,即时差.

地方恒星时与地方真太阳时之差等于太阳的赤经．地方恒星时与地方平时之差究竟代表什么？它的表达式

$$T-H_m=T-H_0-E=\alpha_0-C-R+\tau$$

是太阳赤经的表达式，但消除了太阳赤经的差数，而增加了恒星时的差数．因此剩下的只有

$$T-H_m=A_0+A_1t+\tau \tag{3}$$

我们可将 $T-H_m$ 之差解释为一个虚拟的动点(其时角等于地方平时)的赤经，而将这一动点命名为平太阳．可是，在平午，这一点可以看做是中天，那时它的赤经等于恒星时．因此，在以上表示 $T-H_m$ 的式里，若给 t 以连续的整数值，便得每天平午的恒星时．这名词所代表的便是以数值表达的 $A_0+A_1t+\tau$ 之和．据纽康(Newcomb)，时间的原点是 1900 年 1 月 0 日格林尼治平午，t 既然是平日的整倍数，则给与式中的常数以如下的数值时：

$$A_0=18^h38^m46^s$$
$$A_1=n$$

便得格林尼治平午的恒星时．

在第七章里我们还要确定 A_0 和 n，并给出 τ 的表达式．

平太阳日的赤经，由于其表达式里还含有差数项，因而不是均匀地增长．这是不足怪的，因为作为赤经原点的♈点，其运动里便含有这些差数项．如果不考虑基本面的移动，我们便不能给与平太阳以一个确切的定义[1]．

在一给定时刻，两个站的地方真太阳时之差是它们的经度之差．显然，对于地方平时也是一样．因此，我们可以由比较两站的地方平时而测定经度，例如观测太阳并计入时差，再和由时计搬运法或由无线电时号传播法而得的某一标准经度圈上的时刻加以比较．

余下还要计算恒星日(平均)长短与平日的长短之比，换言之，即 T_1t 增加一个整周所需的时间(单位是平日)．我们知道 $(T_1-A_1)t$ 之积在一平日里增一整周(这即是上面所说的平日的定义)，而我们已知 $A_1=n$．如前节所作的那样，将角速度表示为每日若干时秒．我们应该设

$$T_1-n=86400^s$$
$$n=236^s.555\cdots$$

由是

$$T_1=86636^s.555$$

在一平日里，恒星时增 $86636^s.555$(不计其差数项)．容易计算，恒星时增 86400^s 就增一周的时间，这便是平均恒星日的长短：

$$1\text{ 恒星日}=\frac{86400}{86636.555}\text{ 平日}=0.9972696\text{ 平日}=86164^s.09=1\text{ 平日}-3^m55^s.91$$

在第七章里，我们将详细讨论这个数字结果．由于恒星时与平时的相互转换时常使用，因而这个结果相当重要．上面我们假定从直接观测而得到的真太阳时过渡到平时，但这不应当看做是唯一的方法．如上所指出的，恒星时虽以恒星命名，而却是起源于太阳的

1) 在初等教科书里，常用平太阳来引入平时，但是这样便包含了一种诡辩也不能取消的"循环论证"．如果先没有均匀时的概念，怎么能说具有均匀运动的点呢？而且，如果位移不从一个固定的原点算起，怎么会知道运动是均匀的呢？以后几章内我们要说明，由于基本面的移动，自然界里没有任何固定不变的原点(参看 Les Humanités Scientifiques, mai 1948, p. 323; Paris, Hatier)．

一种时间．所以，由恒星时以决定平时，与由真太阳时以决定恒星时，应起相同的作用．对于这两种情形，从星历表取出的数字有同一的来源，即同是由地球的自转与公转的理论而得来的．

如上所言，(3)式可用以计算格林尼治每日平午的恒星时，而且更加入经度值，就可以计算任何一站的地方平午．假设在同一天里我们利用基本星的观测以决定恒星时，便很容易求得对应的地方平时，只须将中午以后地方恒星时的变化乘以 0.9972696 这个因子，或从这变化里减去其与 0.0027304 的乘积．

当我们已经对民用时下了定义之后，在本章结束时，我们还要转回来作这种转换的计算．天文年历里所提供的是平子夜(而不是平午)的格林尼治的恒星时；但在原则上，计算所应遵循的步骤是一样的．

§34　时差，真日的变化

这一节将研究时差．若将其中有关由恒星时而来的离差的小数值之项略去，而只保留中心差与赤道订正的主要项，便有

$$E = 460^{s}\sin M - 592^{s}\sin 2(\varpi + M)$$

式中第一项的周期是一年，每逢太阳过近地点(即 1 月 2 日)时，其值由递增而成为零．第二项的引数是太阳的平黄经的两倍，它的周期是 6 个月；在二分日，其值由递减而成为零(由于负号的原故)；在二至日，其值则由递增而成为零．

既知这两项变化的方向之后，便容易绘出代表每一项与其总和的曲线(图 43)．由于

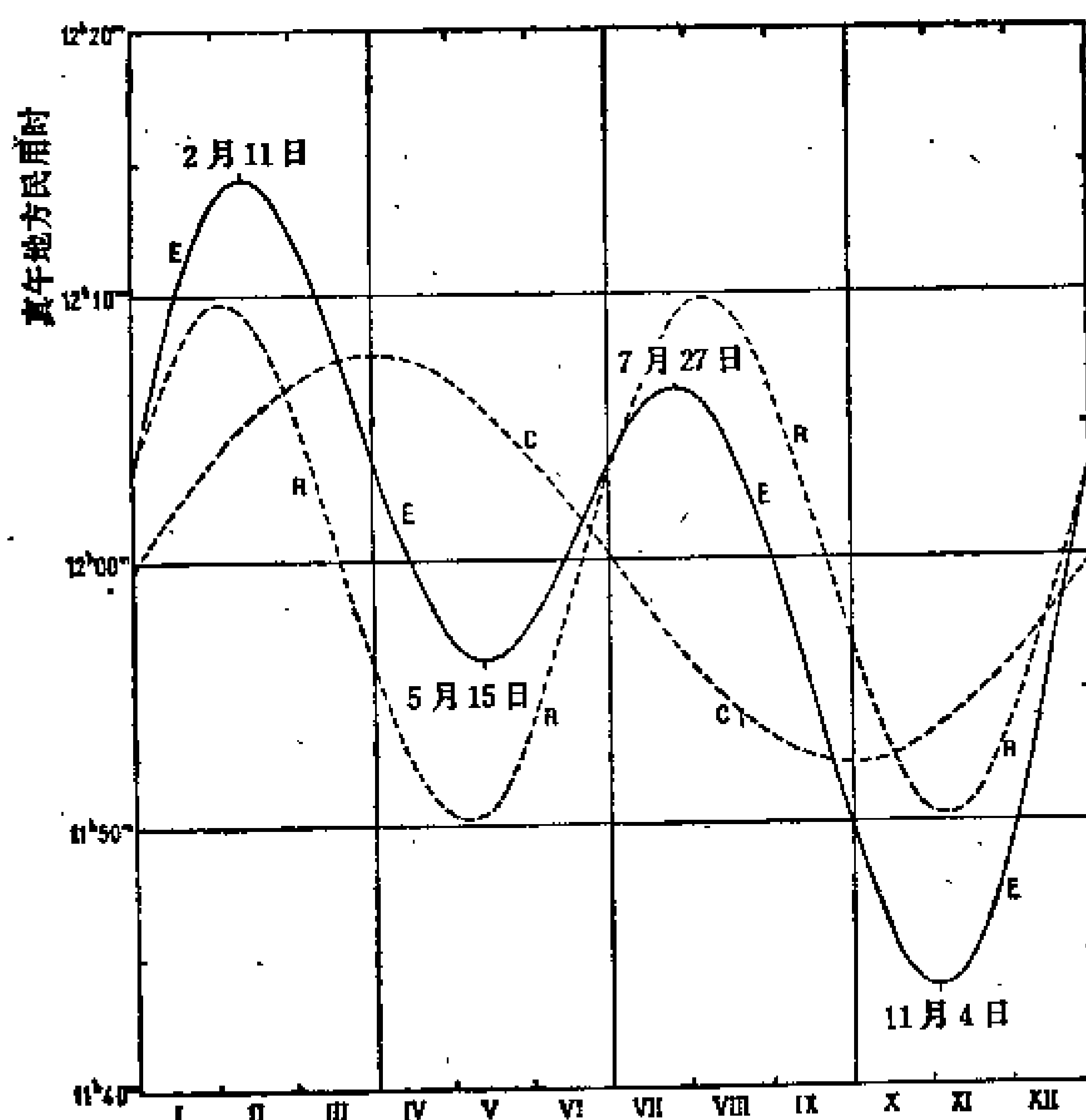


图 43　时差的年变化(曲线 E)．以虚线表示的 C 和 R 两曲线分别代表中心差与赤道订正

民用年与天文年之间的差异，这曲线每年稍有变化，但平均言之，曲线上的重要代表点如下(有一日的数量级的漂移)：

2月11日	$E=+14^m22^s$ 绝对极大	7月27日	$E=+\ 6^m23^s$ 极大
4月16日	0^m0^s	9月2日	0^m0^s
5月15日	-3^m47^s 极小	11月4日	-16^m23^s 绝对极小
6月15日	0^m0^s	12月25日	0^m0^s

随时差的变化而来的是真日的长短(即连续两个真正午之间的时间)的变化．由于真时比平时的差数为 E,因此当 E 在增长时真日比平日长；当 E 在损缩时，则情形相反．设 ΔE 表示 E 的周日变化，真日比平日长 ΔE．可是

$$E=2e\sin M-\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin2(\varpi+M)+\cdots$$

因此近似地，

$$\Delta E=2ne\cos M-2n\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\cos2(\varpi+M)+\cdots=7^s.9\cos M-20^s.4\cos2(\varpi+M)+\cdots$$

这公式提供真日的长短(可差十分之几秒)(图44)．下表列出几个特殊的数值：

2月11日	$\Delta E=\ 0^s$	7月27日	0^s
3月28日	$-18^s.4$ 极小	9月17日	$-21^s.4$ 绝对极小
5月15日	0^s	11月4日	0^s
6月20日	$+13^s.0$ 极大	12月23日	$+29^s.9$ 绝对极大

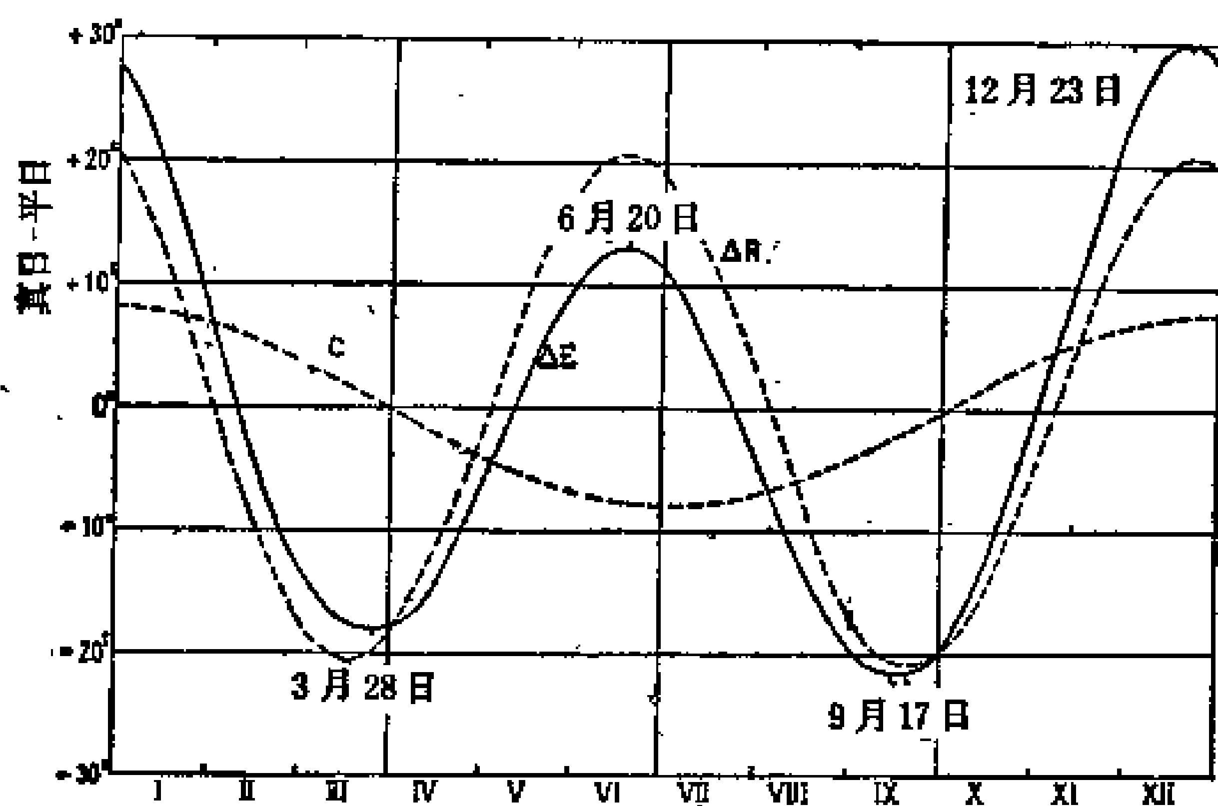


图44　真太阳日长短的年变化(实线所表的曲线)．由于中心差的变化 ΔC 与赤道订正的变化 ΔR，分别为以虚线表示的曲线

如果我们要制造一架走真时的钟，则在9月中应于每日走快 21^s，在12月末每日走慢 30^s，昔日曾利用范动轮(came)所控制的微差装置实现了这个意图．

§35　太阳的中天

我们已经强调过利用子午环观测太阳的基本意义，现在详细讨论太阳中天的情况．

为了测定太阳中心过子午圈的时刻，观测者记录下太阳两边沿(先西后东)中天的时

刻. 由于我们可以假设在不超过两分半的时间内,真时按平时的线性函数变化,太阳中心中天的时刻是这两个观测时刻的平均值.

设 s 表示太阳的视半径,则表示两边沿的时角之差的一半的 Δh 可以由下式给出:

$$\sin \Delta h = \sin s \sec \delta_0$$

我们知道一年里 s 常在变化,而且有

$$s = 960''(1+e\cos M) = 64^s.0(1+e\cos M),$$

偏心率 e 是 0.0168, s 在1月2日极大. 至于太阳赤纬的正割, 在二至日为极大, 等于 1.09. 可见, Δh 在冬至日附近为极大,可达 71^s.

太阳圆面通过子午圈的时间为 $2\Delta h$. 一年内任何一日, 在这时间内时差的变化绝不超过 $0^s.05$, 因此这一段过子午圈所经历的时间,以平时计亦可作为 $2\Delta h$. 下表列出在二分日、二至日附近这些数字的极值:

3月27日	$128^s.3$ 极小	9月17日	$127^s.6$ 绝对极小
6月20日	$137^s.5$ 极大	12月22日	$142^s.0$ 绝对极大

为了决定太阳中心中天时的天顶距,我们测量其上下两边沿的天顶距,分别加以蒙气差的改正,然后求其平均值. 由于不能在太阳中心中天时同时作这两个观测,一般常在这一时刻前后一会儿分别去做这两个观测,并仔细记录下每一观测的时刻,然后将它们归算到过子午圈的时刻(§ 17). 为了考虑到在这两个观测之间太阳赤纬的变化, 还须作第二次改正. 先说明这个改正是不可忽略的.

据已建立的关系式:

$$\sin \delta_0 = \sin \varepsilon \sin l_0$$

微分后得

$$\cos \delta_0 \, d\delta_0 = \sin \varepsilon \cos l_0 \, dl_0$$

或

$$d\delta_0 = \sin \varepsilon \cos \alpha_0 \, dl_0 = n \sin \varepsilon \cos \alpha_0 (1+2e\cos M) dt$$

这是赤纬的时变化,天文年历里载有其每日的变化值,以24除之,便得其每时的变化. 设不计入偏心率的效应,便得

$$\text{赤纬的时变化} = 58''.8 \cos \alpha_0$$

实际上, 春分日前几天这变化达 $+59''.3$, 秋分日后几天达 $-58''.5$. 设在这两个时期内,两边沿的天顶距的测量经历3分钟, 太阳赤纬在这3分钟内约为 $3''$. 因此,将这两个观测分别归算到过子午圈的情形,须考虑这一变化.

有一个与此类似的问题,即用在平经上可以移动的仪器,如经纬仪或六分仪,来测量太阳中天时的天顶距;不过解决的办法却不相同. 这里和前面一样,观测亦不能同时在子午圈上去做: 这时的时角 H 虽小却不是零. 对于这情形, 归算到子午圈的公式已经在§ 21内推出,但须加入与赤纬变化有关的一项. 设 z_0 为子午圈上的天顶距, 以时角 H 的函数表示:

$$z = z_0 - \frac{d\delta_0}{dt} H + \frac{\cos\varphi \cos\delta_0}{2\sin z_0} H^2 + \cdots$$

须注意的是 z 的极小值不发生于中天之时,而那时的时角为 H_m:

$$H_m = \frac{\sin z}{\cos\varphi \cos\delta_0} \frac{d\delta_0}{dt}$$

因那时的天顶距为

$$z_m = z_0 - \frac{\sin z_0}{2\cos\varphi\cos\delta_0}\left(\frac{d\delta_0}{dt}\right)^2$$

另一方面，已知平经的导数的表达式(§ 20)为

$$\frac{da}{dt} = \frac{\cos\delta_0\cos S}{\sin z}$$

由此推出对应于极小天顶距的平经：

$$a_m = \frac{d\delta_0}{dt}\sec\varphi$$

将这些公式应用到巴黎春分日太阳中天的情形：

$$\cos\delta_0 = 1 \qquad \tan\varphi = 1.14 \qquad \sec\varphi = 1.52$$

因赤纬的时变化为 $+59''.3$，于是

$$\frac{d\delta_0}{dt} = \frac{59.3}{15\times 3600} = 0.00110 = 227''$$

对于赤纬为零的情形，以上的公式便简化为

$$H_m = \frac{d\delta_0}{dt}\tan\varphi = 259'' = 17^s.2$$

$$z_0 - z_m = \frac{1}{2}\tan\varphi\left(\frac{d\delta_0}{dt}\right)^2 = 0.57\times 227''\times 0.0011 = 0''.14$$

$$a_m = \frac{d\delta_0}{dt}\sec\varphi = 345'' = 5'45''$$

再讨论另外一个问题，即过等高圈的问题．我们知道，每颗星每日过同一高度圈两次，在地方天球上经过这一圈的两点是以子午圈为对称的．对于赤纬在变化的太阳的情形，这两点不再是对称的，过等高圈的时刻 t_1 与 t_2 的平均值，不是真正午，由于同一原因，两平经的平均值亦不为零．

设 $-H$ 为第一次过等高圈的时角，$H+2\Delta H$ 为第二次的时角；$2\Delta\delta_0$ 为两次过等高圈之间太阳赤纬的变化，则很近似地有

$$\Delta H = \Delta\delta_0\frac{dH}{d\delta_0}$$

计算下式的导数，z 与 φ 是不变数：

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta_0 + \cos\varphi\cos\delta_0\cos H$$

$$\frac{dH}{d\delta_0} = \frac{\sin\varphi\cos\delta_0 - \cos\varphi\sin\delta_0\cos H}{\cos\varphi\cos\delta_0\sin H} = \tan\varphi\,\mathrm{cosec}\,H - \tan\delta_0\cot H$$

另一方面，

$$\Delta\delta_0 = H\frac{d\delta_0}{dt}$$

于是，

$$\Delta H = H\frac{d\delta_0}{dt}(\tan\varphi\,\mathrm{cosec}\,H - \tan\delta_0\cot H)$$

设过天顶距 z 之时，钟上的读数分别为 h_1 与 h_2，则相当于真正午的时刻为

$$h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) - \Delta H$$

这是表达由等高观测而得的中天时刻的公式．

在 H 的数值不大，可将 $\cos H$ 作为 1 的情形，很近似地有

$$\frac{dH}{d\delta_0} = \frac{\sin z_0}{\cos\varphi\cos\delta_0\sin H}$$

于是，
$$\Delta H=\frac{H}{\sin H}\cdot\frac{\sin z_0}{\cos\varphi\cos\delta_0}\cdot\frac{d\delta_0}{dt}$$

由于 $H/\sin H$ 可以取为 1，改正值 ΔH 最后等于上述天顶距极小时太阳的时角．容易证明，与此对应的平经亦很近似地等于天顶距为 z 的两点的平经的平均值．这好象天顶距为极小值的垂直面是太阳在地方天球上的周日轨道的对称面．

§36 民用时，世界时

由日规直接读出的真太阳时直到十八世纪之末仍为一般人所采用．到了1816年，巴黎的公用时钟才按平时调准．

快速的交通工具发展以后，又须作第二次改革：时间在全国的统一成为必需．巴黎所使用的平时，推广到法国各地，铁道线上车站的钟都拨准为这种时间．1891年3月15日法令颁布全国均采用巴黎的地方平时．

那时将一日分为上下午各12时，开始于子夜．以后将一日由0计至24时，并以子夜作为0时．自正午起算的平时便被废弃，而开始使用在平时上增加12时的*民用时*．

在某些情形，天文工作者仍然使用平时．为免混淆计，人们将这种平时叫做*天文时*．例如1950年1月1日9时(民用时)，便是天文时的1949年12月31日21时(这自然是指早晨9时)．天文时很少使用，如果使用须当特别表明．现今只在表明一个事件发生于*儒略周期*(§62)的日期时，才使用天文时．

各国内的时间统一须推广到全世界才算圆满．于是，1884年在华盛顿会议上提出时区制的办法．这方案的基本安排是采用格林尼治的子午圈为国际子午圈．现今天文工作者常用格林尼治民用时以记录天象，而把它叫做*世界时*．天文年历里提供每日世界时0时的恒星的位置．自1925年起，法国天文年历采用世界时，以TU(或UT)符号去代表它．

由于一般人不易改变习用的语言，还以不适当的格林尼治平时去称世界时，好象日子是开始于中午的．为了革除这种混乱，国际天文协会提议，概不使用T. M. G或G. M. T(格林尼治平时)这个说法．

从原则上说，零时区里所用的世界时，限于 $-7^{\circ}.5$ 至 $+7^{\circ}.5$ 之间的地区．一国的领土大部在这一区域内的，属于这一时区，均采用世界时．一国的领土紧邻在这一时区之东，即位置在 $-7^{\circ}.5$ 至 $-22^{\circ}.5$ 之间的地区采用世界时加上1时的区时(即东一区时或中欧时)；如此向东或西类推下去．

疆域很广的国家，如加拿大、美国与苏联，它们把国境分为若干时区，每一区的时刻比较其邻接的西边的时刻多一小时．*

由于时区制的规定，世界各处的钟表在同一瞬间有相同的分与秒，差异的只是时的整倍数．人们跨过边界或时区界限之时，只须将钟表拨早或拨慢整整一个小时．

事实上并没有这样简单．许多国家有两种法定时，分别使用于一年的夏、冬两段时期之内．由一种法定时过渡到另一种法定时，并无一定的规则．例如法国于1911年3月9

---

* 我国在解放以前，以东经120°经度圈为标准的时间叫做中原时，以东经105°的经度圈为标准的时间叫做陇蜀时，以东经90°经度圈为标准的时间叫做新藏时．这三个整时区之外还有两个半时区，即以东经127°.5的经度圈为标准的时间叫做长白时，以东经82.5°的经度圈为标准的时间叫做昆仑时．解放以后，全国一律使用东经120°经度圈的地方民用时，把它叫做北京时——译者注

日采用世界时，1916 年又创设了所谓夏季时(即世界时加上一小时)，与世界时轮换使用，直到 1940 年．自此以后，法国采用中欧时作为它唯一的法定时．

除了上述几种保留的情形之外，欧洲国家都已采用时区制，可是地球上还有许多区域并未遵守这个制度．有些地方的法定时与该处的区时相差 30 分至 45 分，另外一些地方采用某一特殊经度圈上的地方时，与其区时的差异更是任意的．《法国经度局年鉴》里有关法定时的目录占了十页之多．阅览之后，我们会了解到，1884 年所提出的统一办法并没有取得所期望的成绩．

在 23 时的地区和已经是 0 时的地区之间的分界处，日子便差一天．时区分界处总是骤然跃过 15°，向西计算比较世界时常增加小时的整数倍．那些可能有两个日子的地区，应该东、西分开，于是在那些地区规定一条*国际日期变更线*．这条线从北极起，经过太平洋，不与任何陆地接触，而达南极．以下是这条线经过的路径：

纬度	经度	纬度	经度	纬度	经度	纬度	经度
+65° 0′	169° 0′ 西	+52°30′	170° 0′ 东	+48° 0′	180°0′	−5°0′	180°0′
−15°30′	172°30′ 西	−45°30′	172°30′ 西	−51°30′	180°0′		

这条线之西是亚洲，美拉尼西亚，密克罗尼西亚，新西兰与西波利尼西亚；这条线之东是夏威夷群岛与东波利尼西亚．

§ 37 太阳的升与落

由太阳赤纬的周年变化会造成昼夜长短的变化．读者在初级天文学书中已经看到过在各种纬度处昼夜长短的差异．这里我们只提到，在北极区和南极区，即纬度的绝对值超过 $90-\varepsilon$ 或 66°33′ 的地区，太阳可能成为拱极星．夏至日前后，北极区发生极昼，南极区发生极夜．冬至日前后，情况互易．在极夜与极昼(或极昼与极夜)之间的地区，每天总有昼夜的循环．

反之，在赤道区昼长总与 12 时相差不多．在赤道上太阳与其他天体的半日周弧总是等于 6 时．

所谓*蒙影*，是指太阳升起以前或落下以后黑夜尚未完全结束与完全开始的一段时间．*民用蒙影*起迄于太阳高度在地平下 6°(即天顶距 96°)之时，那时只有亮星才出现在天空，行车需要开前灯．*天文蒙影*起迄于太阳高度在地平下 18° ($z=108°$)之时，那时天刚黑尽．还有所谓*航海蒙影*，起迄于太阳高度在地平下 12° 之时．

为了计算太阳的升与落，可在天文年历里先找出这现象发生前后某一时刻的太阳的赤纬，利用 § 22 里的公式，计算其 $z=90°$ 时的时角；然后作蒙气差与视半径的改正(若我们所要的是太阳的上边沿而不是其中心升起的时刻[1),*])．设以 R 表蒙气差，s 表视半径，总改正值为

$$d_1H=\frac{R+s}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta_0)\cos(\varphi-\delta_0)}}$$

1) 法国经度局年鉴所载的是太阳的中心而不是其上边沿的升起的时刻．

* 我国紫金山天文台编算的中国天文年历中，日出日没时刻是太阳上边缘和地平线相切，也就是太阳中心的真地心天顶距为 90°50′ 的时刻，其中蒙气差改正值 34′，太阳半径 16′——译者注

我们从升起时的时角减去d_1H，在落下时的时角上加上d_1H. 由于对这现象不能作精密的测定，我们仅取R和s的平均值便足够了：

$$R=33' \qquad s=16' \qquad R+s=49'=196^s$$

上述微分公式亦可用以对民用蒙影作近似的计算（至少对于我们的纬度不能对天文蒙影作这样的计算）. 时角H要加上如下量的改正：

$$d_2H=\frac{24^m}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta_0)\cos(\varphi-\delta_0)}}$$

如上所述，由计算可得太阳升或落时(或民用蒙影起迄时)的地方真时. 若转换为世界时，还应加入

$$12^h+E+L$$

E代表时差，L代表经度(以国际经度圈之西为正).

例 求1937年1月1日斯特拉斯堡($\varphi=+48°35'$, $L=-31^m4^s$)日落时的世界时.

第一次近似计算求得日落在16^h40^m. 由法国天文年历读出这时：

$$\delta_0=-23°0' \qquad 12^h+E=12^h3^m39^s$$

于是(§ 22),

$$\sin\delta_0=-0.3907$$

$$\cos(\varphi+\delta_0)=0.9020 \qquad \cos(\varphi-\delta_0)=0.3159$$

$$\sin\varphi_0\sin\delta=0.2930$$

$$\tan H=+1.8222$$

$$H=4^h4^m58^s$$

$$d_1H=\frac{196^s}{0.5339}=6^m7^s$$

由此得上边沿没于地平下的世界时：

H	4^h	4^m	58^s
d_1H		6^m	7^s
12^h+E	12^h	3^m	41^s
L	$-$	31^m	4^s
日落时：	15^h	43^m	42^s (世界时)

民用蒙影的改正值为

$$d_2H=\frac{24^m}{0.534}=45^m$$

蒙影终于16^h22^m，因为它经历的时间为$d_2H-d_1H=39^m$

附表XVA与XVB是为了计算任何地点太阳的出没而列出的.

§ 38　日　　规

日规是一种简单的仪器，可用以读出地方真太阳时，即太阳的时角. 由于各种设计，人们可使它表示出任何子午圈上的真时，甚至法定时，可是这样就使仪器复杂化了.

日规主要部分是一个平面(这里不谈柱形的或球形的日规)，上面绘有许多条线(用途以下叙述)和一个遮着日光的屏，屏就投影在这平面上.

设 O 为遮光屏的中心(图 45). 在以 O 为心的球上绘出天赤道、子午圈、每时的时圈. 更以 S 点代表太阳. 屏影便投射在规面上的 S' 处(即 SO 直线的脚). 设在规面上已经绘出以 O 点为心的时圈投射在它上面的直线, 便可由 S' 点所在处立刻读出它的时角. 这些直线称为时线, 相交于连接两极点的直线 PP' 与规面相遇之点. 为了使读数比较精确,还可将时线增多,如每 10 分绘出一线.

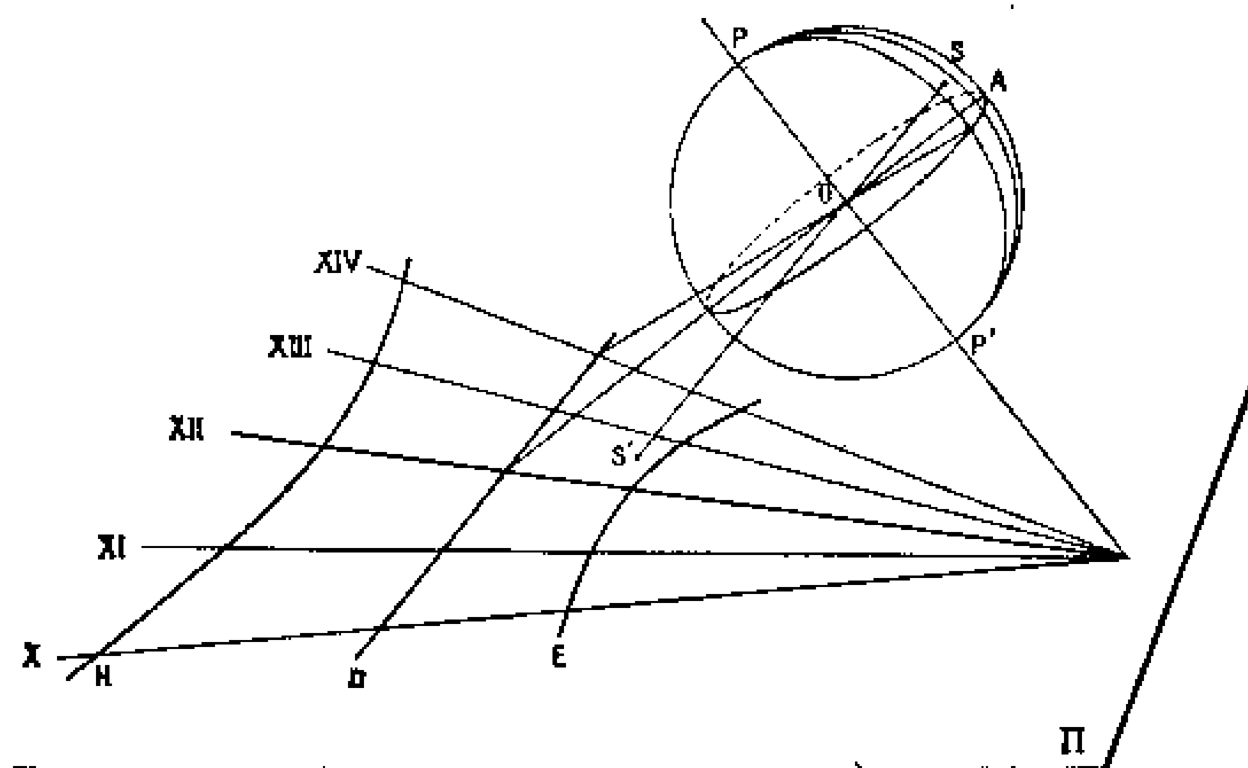


图 45 日规面的刻绘

设 D 代表天赤道在规面上的投影. 按太阳的赤纬为南或北, 日影 S' 的位置便在直线 D 的这一边或那一边. 日影 S' 不能越过赤纬圈 $+23°27'$ (称为北回归线) 的投影的一边,也不能越过赤纬圈 $-23°27'$(称为南回归线)的投影的另一边. 这两个界限之间还可绘上其他赤纬圈的投影, 如太阳进入某些宫的赤纬(如 $\pm11°29'$, $\pm20°20'$*)圈的投影, 这些线称为*宫位线*. 这些线在规面上是圆锥曲线,其性质视规面对于世界轴的位置而定. 由日影对于这七条线(即赤道、两回归线与以上的四宫位线)的位置可以知道太阳所在的宫与大略的日期.

有些日规上装有一个中心穿孔的圆轮,以代替遮着日光的屏,于是规面上出现一个椭圆形的光点, 其中心大约与日轮的中心相合. 遮光屏有时亦改换为一条平行于世界轴的针,其阴影与它所经过的时线重合;这样,便不一定要绘出宫位线.

按照制造日规的精粗程度, 真时的读数可精确到几分或几秒. 日规制造的技术叫做*规表学*,现已无人研究,但从前曾为技巧工人所掌握,所用的方法与工具都相当简单;读者如感兴趣,可阅读有关规表学的书籍.

现在扼要地叙述日规的几种主要类型. 最简单的一种是*赤道式日规*(图 46), 因其规面与赤道平行而得名. 因此它的最大斜率的阳光射线都平行于子午面. 规面倾斜度等于地方的余纬度(即纬度的余角). 规面上所绘的时线相当于真时的整倍数, 这些直线相交于指针 OA 的脚(OA 与规面正交), 相邻两线之间的角为 15°. 刻度的范围一方的界限在水平线 CL(相当于太阳升或落时 O 点的阴影); 另一方的界限是北回归线, 这条线可用以

* 同太阳的赤纬 $+11°29'$, $+20°20'$, $-11°29'$ 与 $-20°20'$ 依次相当的太阳的黄经为 30°, 60°, 240° 与 270°, 即太阳分别进入白羊、金牛、天蝎与人马四宫; 与之相当的节气依次为谷雨、小满、霜降与小雪, 而相当的日期则依次为阳历 4 月 20、21 日, 5 月 21、22 日, 10 月 23、24 日, 与11 月 22、23 日——译者注

$d\cot\varepsilon$ 或 $2.30d$ 为半径的圆周来表示(d 代表指针的长度)．其他宫位线的半径为 $2.70d$ 与 $4.92d$．这种日规只能用于春、夏两季．当太阳的赤纬为负时，须将规面的下方刻绘，并将指针穿过规面安置在下方．

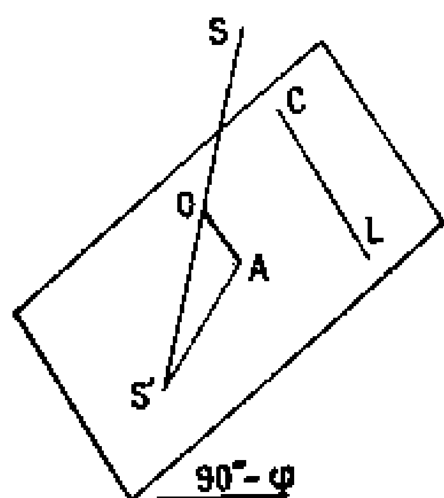


图 46　赤道式日规

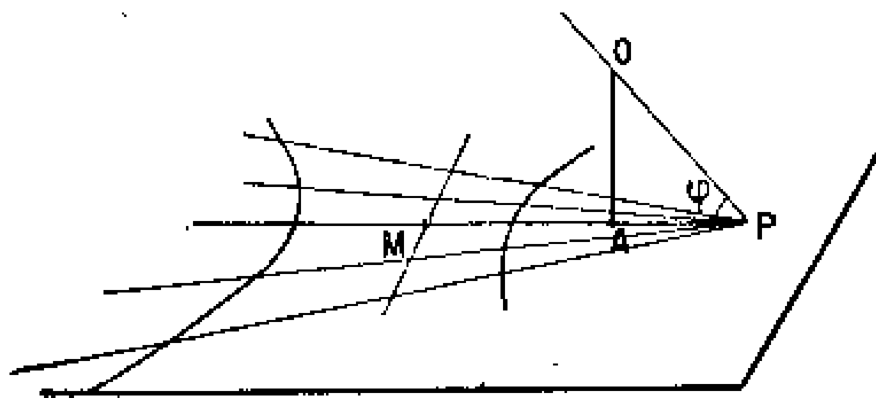


图 47　地平式日规

地平式日规(或圭表)的构造是高度为 d 的一根直立的杆或针(圭)(图 47)，其顶点 O 投射在水平位置的规面(表)上就是日影．时线相交于与世界轴平行的 OP 线的脚，AP 的延长线即子午线．赤道线在距杆脚 $d\tan\varphi$ 处．宫位线是双曲线的一段弧(至少对于我们的纬度是这样的)，其无限远处相当于太阳升或落时的情形．两条回归线相当于同一双曲线的两支，其顶点与杆脚的距离为 $d\tan(\varphi-\varepsilon)$ 和 $d\tan(\varphi+\varepsilon)$．由测量二至日杆影的长度，我们可以推算地方纬度与黄赤交角，古代天文学家便做了这样的工作．十七世纪以前地平式日规颇为流行，大建筑物里的砖石地上就雕刻有这样的规面，屋顶穿一小孔让日光射下，以代圭影．黄赤交角的长期变化便是由这样的观测而发现的．

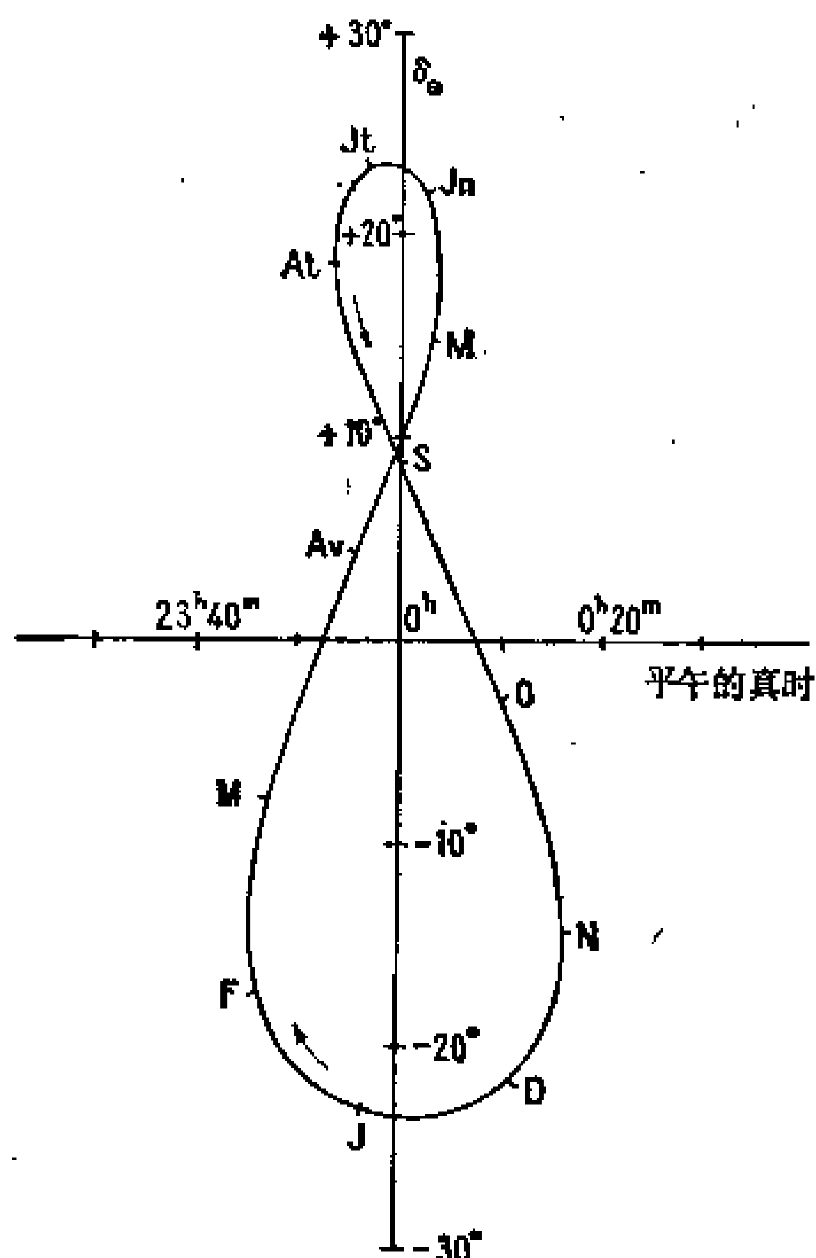


图 48　平时的子午线

常见的日规雕刻在直立的墙壁上面，按墙壁的方向它们可以分为几类．若墙的方向平行于子午面，日规便是**东西向的**．时线是一组平行于世界轴的平行线．这里，以平行于世界轴(因而平行于规面)的杆或针代替遮光屏．

若墙壁与子午面正交，日规便是**南北向的**；于是，赤道线投影在水平向上．最后，若墙壁的方向是任意的，则遮光屏将是倾斜的，而赤道线也不是水平的．为绘制以上几种情形里的时线，在确切地测定规面的方向与遮光屏的位置之后，还应当按照图 45 的图样，精细地刻绘．

为了直接读出本地子午圈以外其他经圈(例如格林尼治经圈)的真时，应将所有的时线推移一个等于本地经度的数量．

利用如下的设计，可以在日规上读出平时或民用时．设在地方天球上 S 代表太阳在平午时的位置，它的时角坐标便是：$H=-E$，$\delta=\delta_0$．这两个数在一年里不断地变化，从天文年历里取出这些数据，不难绘出 S 点的轨迹，这是一个 8 字形的曲线(图 48)，叫做**平时的子午线**．我们可以将这根由投影而成的

曲线雕刻在日规面上，人们可以直接读出地方平午的时刻．对于每天另一时刻亦可绘出类似的曲线，甚至推移一段相当于地方经度的量，而直接读出世界时．可是规面上刻绘线条过多，便不清晰而难于使用．

§ 39 地方恒星时与世界时的相互转换

为了结束有关时间的基本问题，现在回头来谈地方恒星时与世界时的相互转换，这一种计算的原则已经在 § 33 里讲述过了．

那一节里曾经表明，一个恒星日以平时计量为

$$0.9972696=1-0.0027304\text{ 平太阳日},$$

由于 0.0027304 的倒数是366.24（在第七章还要解释这一事实）．一个平日表示为恒星日则为[1]

$$1:0.9972696=1.0027379\text{ 平恒星日},$$

而 0.0027379 的倒数为 365.24(也将于第七章内说明)．

既知以上所说的关系，设我们来计算斯特拉斯堡(经度 $=-31^m4^s.50$)1950 年 1 月 7 日相当于恒星时 $3^h47^m23^s.92$ 的世界时．计算的程序已说明于 § 33．先在地方恒星时上加入(代数和)经度改正，面得格林尼治那时的恒星时；于是，从这结果里减去格林尼治 0^h 的恒星时而计算出自世界时 0^h 以后所经过的恒星时；最后，从这差数里减去两种时间转化的改正值(即这差数的 1/366.24 倍)．现在将这计算的布局列出如下：

斯特拉斯堡的恒星时	3^h	47^m	$23^s.92$
$+L$	−	31	4.50
格林尼治的恒星时	3	16	19.42
	+24		
格林尼治 0^h 的恒星时	7	3	57.31
差	20	12	22.11
改正值(−1/366.24倍)		3	18.62
	20^h	9^m	$3^s.49$(世界时)

现在讨论其逆问题，即计算 1950 年 1 月 7 日世界时 $20^h9^m3^s.49$ 在斯特拉斯堡的恒星时．先在这段自子夜以后所经过的时间上加入其值的 1/365.25 倍面转化为恒星时，再加入格林尼治 0^h 的恒星时，便得所讨论那一瞬间格林尼治的恒星时；然后减去经度改正值，而得地方恒星时．

世 界 时	20^h	9^m	$3^s.49$
改正值(+1/365.24 倍)		$+3^m$	18.62
格林尼治 0^h 的恒星时	7	3	57.31
$-L$		+31	4.50
斯特拉斯堡的恒星时	3^h	47^m	$23^s.92$

平时与恒星时相互转化的改正值，有表载于天文年历之内，本书末尾也有这两个表，即 XII 与 XIII 表，以供读者使用．

1) 这里我们故意用回归年(365.24 日)代替儒略年，它们的定义详见第七章．

第四章　基本面的移动(1. 岁差)

在这第四、五两章内，我们将讨论由于地球自转与公转受到摄动的影响而使基本面发生长期的或周期的移动效应．由于赤道和黄道的移动，恒星对于这两道的坐标缓慢地变化．若我们要将恒星的位置归算到绝对坐标轴去，这些变化是需要考虑的．

§40　恒星在天球上的坐标是变化的

以上两章内我们曾假设恒星的赤道或黄道坐标不变，并将黄道和赤道当做对于恒星是固定的．现在要说明，若将天象的描述推长到几时或几天以上的时期，上面的假设便不合理．这里只叙述古代和现代的几个发现，以表明以上给与周日运动的简单规律只不过是一种近似值而已．

(1) 恒星的黄经的长期变化叫做岁差，是公元前二世纪喜帕卡斯将他对于角宿一(即室女座 α 星) 测得的黄经与一个半世纪以前提摩卡里斯所测得之值加以比较而发现的．

不须说，由于没有计时钟，古人不能利用中天观测而决定恒星的绝对位置，可是他们可以测量角距离，以月亮或金星为中介标点，将恒星和太阳加以联系．恒星和月亮或金星的联系在夜里或晨昏蒙影中完成，至于使中介星与太阳的联系只能在昼间进行．提摩卡里斯与喜帕卡斯将这方法灵活应用，现在略述其成就于下．

月食之时，地影中心在黄道上之点，正与太阳在同一直径的相对两端，因而它的黄经是 $l_0+180°$；亚历山大城的天文学家便用这方法编制了一个太阳运行表．他们在月食时测量月亮附近黄道上恒星与被食的月亮之间的角距离，而决定恒星的黄经．公元前 273 年，提摩卡里斯便这样测得角宿一的黄经为172°；可是公元前 129 年喜帕卡斯所测得的数值是 174°．他便断定，这颗星在 144 年内对于春分点移动了 2°，而且移动的方向是逆行的．这颗星在 1950.0 年是 203°.8′，即在 2222 年内移动了 31° 或平均每年 50″.2．

喜帕卡斯根据这一观测将这种黄经增加的现象或岁差现象，解释为恒星天球围绕对于恒星是固定的黄极有一种顺向的转动．我们现在所采用的解说是哥白尼提出的：地轴的方向在空间不是固定的，但与黄道所成之角不变，它绕过一个旋转圆锥，因而天北极在恒星天球上所经行的轨迹是一个纬度为 $90°-\varepsilon$ 的小圆．♈点以每年 50″.2 的速率在黄道上移动，约 26,000 年移动一周；这也是赤极绕黄极运行的周期．

(2) 经过很久，人们以为恒星的黄纬与黄赤交角都是不变化的，因而断定黄道是固定的．但到了十七世纪，人们开始怀疑黄赤交角的不变性，根据古代天文学家对这个角的测量结果，得知它的数值作缓慢的减少．可是 J. 卡西尼(Cassini)在他的«天文学纲要»里还怀疑这个差异可能是由于古代观测之欠精确．但几年后，欧勒发展了行星对地球公转摄动的理论，证明黄道平面是移动的，因此黄赤交角缓慢地变小，约每百年 46″．这可由如下的测量结果而得着验证：

阿耳巴塔尼	约在 880 年	23°35′
第谷·布剌赫	1590	23°30′
布拉德勒	1750	23°28′.3
……	1950	23°26′.7

厄拉托塞尼(Eratosthene)、喜帕卡斯、托勒密等古希腊天文学家所测定的数值为23°50′，现今知道这数字大了十几分．事实上，自喜帕卡斯以来，黄赤交角只减小了16′．在同一时期里，随黄道的缓慢移动而来的有恒星赤纬的变化，至多亦达16′(这里自然没有牵涉到恒星自行的效应)．

(3) 十八世纪中叶，在以上所说的以外，布拉德勒更作出一个重要发现．他证明天赤道而也有周期性的移动，围绕其平均位置的变幅虽小，但却不可忽略．这叫数加在岁差上的章动现象，我们将在下章加以详细地讨论．

1725年布拉德勒对天棓四(天龙座γ星)作了一系列的观测，目的在寻找它的视差．他使用装置在大的刻度扇形轮上的望远镜测量这颗星的天顶距．由于视差太小，他不能发现它的效应，但是他于1726年发现了光行差(第六章)，以后更发现了章动．事实上，他于1727至1736年间查出这颗星的平均赤纬(改正了岁差效应之后)增加了18′，而在1736至1745年间又减少了相同的数量．他将北极这一周期性的变化叫做章动，而且他认为这是与月球轨道的交点逆行的周期相同的．布拉德勒更观测了另外几颗恒星也得着相同的结果．跟着，达朗贝尔(1717—1783)由万有引力说明岁差与章动两个现象的从属关系，他首先对地球的自转由于日和月的摄动而产生的效应作出了完善的理论．我们将在本书第十三章内对这理论加以扼要的叙述．这理论不但对布拉德勒所发现的章动，而且对许多短周期小变幅的其他移动，一并给出了说明，而真正的章动实际是这些移动的总和．

总之，观测给我们表明基本面是移动的．建立在引力定律上的理论为我们提供了计算的方法：已知 t_1 时基本面的位置，可以计算 t_2 时的位置．在图49里，A_1 与 A_2，E_1 与 E_2，和 γ_1 与 γ_2，分别是 t_1 与 t_2 两历元的两个赤道、黄道和春分点．如果已知 A_2 对于 A_1 的升交点 M 的位置，和 E_2 对于 E_1 的升交点 N 的位置(假设 t_2 在 t_1 之后，若 t_1 在 t_2 之前则应将升交点改为降交点)，则各基本面的位置以及两赤道间的交角 j 与两黄道间的交角 k 都决定了．

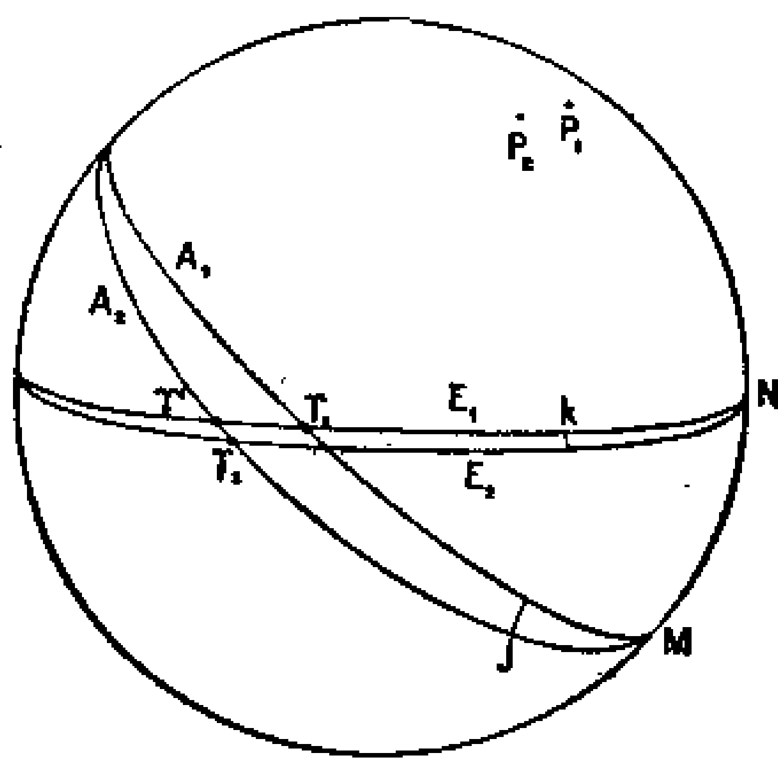


图 49

肯定地说，坐标的变化完全为 $\gamma_1 M$，$\gamma_1 N$ 和 j，k 等给出的数量所决定．这样，从一颗星 t_1 时的赤道坐标 α_1 和 δ_1 去计算 t_2 时的坐标 α_2 和 δ_2 在原则上是没有困难的．但在实际计算上，须遵守一些规则，这将叙述在这两章之内．

§41 岁差与章动

在我们所要作的计算里，时间 t_2-t_1 只是几十年的数量级，为确定起见，至多不过一

个世纪．例如将图 49 里的 j 角表示为时间的函数，其中出现一项表达喜帕卡斯的岁差，由于其周期长达 26,000 年，可以当做一个长期项．方便的法则是将这一项表达为时间 t 的展开式，而取其中的几项，一般常取到三阶项；这里有一个默契，即 t 的数值不是很大．

但在 j 的表达式里，有代表章动的短周期项，这些项便不能作同样的处理．我们应当照原样保留，暂以符号 $\Sigma(P)$ 代表它们．令 $t=t_2-t_1$，最后可以写为

$$j=at+bt^2+ct^3+\Sigma_t(P)-\Sigma_0(P) \tag{1}$$

$\Sigma_t(P)$ 表示周期项在 t 时的数值．

k 角，Υ_1M，Υ_2M，Υ_1N，Υ_2N 等弧以及恒星的坐标，均可表达为同类型的公式．

现在写出几个定义．不管所表达的量是什么，象(1)那样的公式，其中含有：

1．长期项，即时间 t 的幂级数的前几项；

2．周期项．

由以上的解说可见，这两类项并无根本上的差异，因为长期项亦可由很长的周期项的展开式而来．但是，也可能存在有真正的长期项，例如恒星黄经的表达式里就含有对应于岁差的包含 t 之项，它在 26,000 年才增加 360°．

不管怎样，在(1)式的数量里，直接与时间 t 及其前几个乘幂有关之项，一并通称为岁差项，不管这些项是真长期项抑或是由长周期项的展开式而乘的准长期项；至于照原样保留的周期项的总和，一概叫做章动项．

岁差的数值在初始历元为零、不断地增长(使用它的展开式时，时间 t 不能超过一定限度)；我们常以 t 的三次抛物线的弧去表达它．至于章动，其初始值一般不是零，其变化表现为一种波形曲线．图 50 是岁差 P、章动 N 以及它们的总和 S 的变化的示意图．

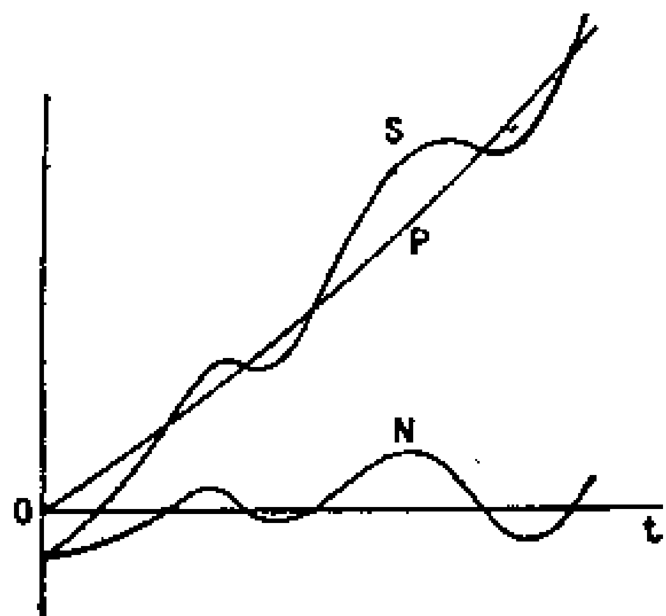


图 50

由此可见，将岁差与章动的计算分别处理比较有利．所谓*真面*是由观测而决定的基本面．这些面受岁差和章动的影响；所谓*平(均)面*是假想的面，平面和真面之差只是章动；换句话说，平面只有岁差而没有章动的影响．图 50 里的抛物线弧对应于一个平要素，而表示两个效应之和的曲线是对于同一名义(例如 j 角)的真要素．

最后，我们可以将一颗恒星的坐标归属于真面而得其*真坐标*，即经过岁差与章动改正后的坐标；或者得其*平坐标*，即只经过岁差的改正后的坐标．

我们还要仔细地讨论几点．所谓每瞬时的*真赤道*，就是与地球的瞬时轴正交的平面；我们知道，地球的瞬时轴是与其惯性主轴稍有偏离的．对于这平面的位置发生影响的岁差与章动，是由于太阳与月球对于地球自转所生的摄动作用．

黄道的定义需要比较详细地加以解释．每瞬时的真黄道是包含连结太阳与地球的向径和地球公转的速度向量的平面．但是，开普勒运动定律所应用的点不是地心，而是地-月系的质量中心或引力中心，其对地球的位置将在十三章内详细讨论．因此，真黄道是为太阳的中心、引力中心以及引力中心对于太阳的相对速度三者所规定的．

至于平黄道与真黄道之差，仅由行星摄动的短周期项引起，其中主要是来自金星和木

星的作用.

如果我们在这里要保留真和平均这两个词的一般意义,如以上所说的那样,便应将春分点定为真黄道在真赤道上的升交点. 章动(黄经上的和黄赤交角上的章动)的表达式含有由行星(主要是金星与木星)摄动而来的项. 在这里,另外一种习惯用法占了优势:真春分点成了平黄道在真赤道上的升交点.所谓真赤经或真黄经是归属于这种规定的春分点,因而真这个形容词在这里便没有它充分的含义. 天文年历里有所谓"对于真黄道的太阳黄纬",其实是属于移动的平黄道的黄纬;至于所谓"平黄纬",乃是属于1月0日的固定的平黄道的纬度. 这里,由于尊重传统而造成了语言的混淆,这是很显然的. 可是自1951年以来,法国天文年历只采用一种合理的词语了.

既在字义上作了辨别之后,我们便容易说明,为什么习惯上有这样的约定. 中天观测给我们以属于真赤道的天体的赤道坐标;但是,由于没有直接测定黄道坐标的方法,只好经过由赤道坐标而来的换算. 于是人们可以随意将黄道坐标归算到真黄道或平黄道;但为计算简便计,采用的是平黄道. 对于春分点,也有这样的看法,因为这是赤经的公认原点,也不是可由直接观测而得的;若不计入行星章动在赤经上的影响,便可简化计算,可是在正确的计算里,这是必须考虑的.

行星的轨道也须归属于动的平黄道. 受了摄动的引力中心的运动也须这样. 由此可见,若从太阳中心通过平黄道面,则引力中心的受扰轨道便不在这个平面之内. 于是,归属于移动平黄道(不适当地叫做真黄道)的太阳的黄纬便不为零. 精确地说,这黄纬包含有下列两部分:

(1) 太阳的真地心黄纬,一般是不为零的. 它与月亮的黄纬和地球到引力中心的距离有关. 它和月球的黄纬同时为零,因为引力中心在这两个天体的连心线上. 它从不超过$0''.6$.

(2) 由金星和木星而来的短周期摄动分别达到$0''.4$与$0''.2$,这些效应的总和不会超过$1''.2$.

当太阳的赤经由其赤纬而决定之时,须考虑它的黄纬(一般不为零). 因此需要对§29里(1)中的第二式加以改正.

由t_1时恒星的真赤道坐标过渡到t_2时的真赤道坐标演算过程须有三步步骤:首先从t_1时的真坐标减去那时的章动,而归算到同时的平坐标;跟着加上t_2-t_1期内的岁差,而得t_2期的平坐标;最后更加上t_2期的章动,便得所要求的真坐标.

§42 日-月岁差

地球自转的摄动理论将在第十三章内叙述,我们只在这里提到牛顿为了说明岁差的机制而作的几点几何学的解释. 假设地球是一个均匀的扁椭球. 太阳的引力对这椭球的自转发生的效应,容易表明,不只是一个使地球围绕太阳运行的力,而且还有一个力偶的矩,其作用在于使赤道与黄道有重合的趋势.

首先证明,对于一个以O为中心的在两极与椭球内切的球内的质量,太阳的引力可以表示为一个合力. 为此,我们讨论一个包含太阳的中心S与地轴的平面在这个球上截出的圆(图51). 令A和B为与图51的平面正交、并与中心O对称的两个相同的物质

元．太阳施于这两元素上的引力 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$，一般不是等值的，因为它们不能同时强度相等而又平行．它们可以合成为一个施于例如地心 C 的力和一个力偶，其矩量是在图面的法线上．设以同样的方式处理太阳施在另外两个元素 A' 与 B' 上的引力，这里 A' 与 B' 对于过 C 点而与 CS 正交的平面以及 A 与 B 是对称的．我们将从这里得出一个和 A 与 B 两个元素场合相同的合力与另外一个力偶，其矩量是与前一个力偶的矩量正相反的．由于整个球体的质量可以分解为象 A, B; A', B' 这样的群，因而总的力矩为零．

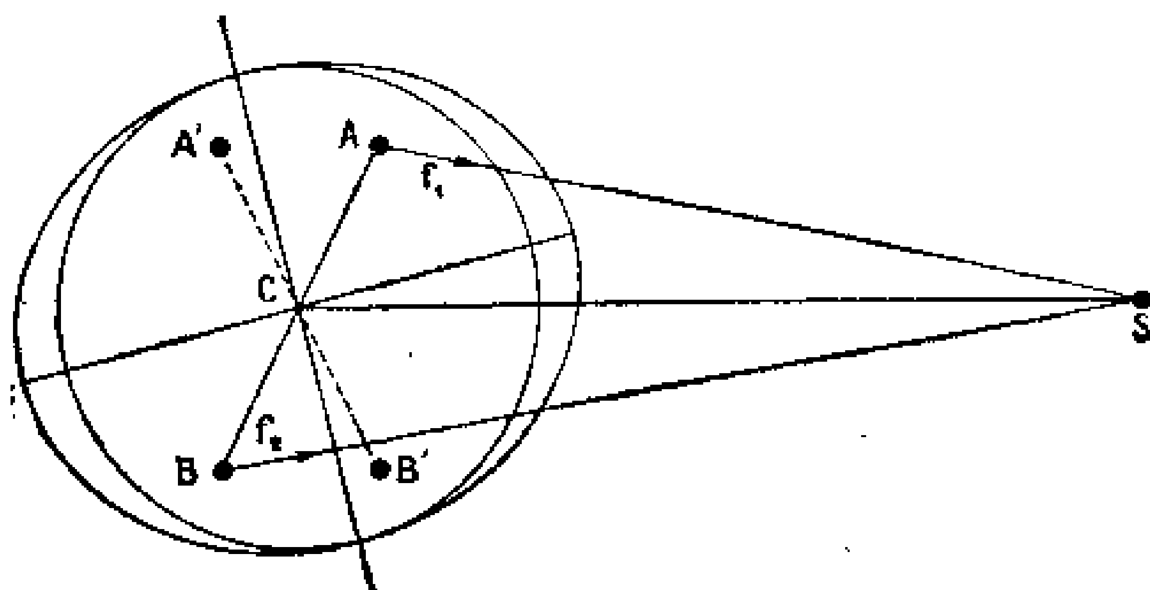


图 51

可是对于在这球以外、椭球以内的部分(牛顿叫做赤道突出带)，所得的力矩便不是这样的．这是由于这些部分不存在有抵消其力矩的相当的对称部分．因此，太阳对于整个地球的作用就综合成为一个假想施于地心 C 的力(这是使地球围绕太阳公转的力)与一力偶，后者的矩量在与 51 图图面正交的赤道面上．这力偶只在两个特殊情形下为零，即当引力心 S 在赤道上之时(对于太阳言，即在二分日)，或在椭球的旋转轴上(对于地球与太阳或月球，这是绝不会出现的)．

我们将在第十三章内证明，这力矩的作用是使地球的赤道有与黄道重合的倾向．现在只作如下的说明．设 V 与 W 为赤道突出带上的两个质点(图 52)，这两点在图的平面上对于地心 C 为对称．我们可将太阳施在质点 V 上之力 $\boldsymbol{f}_1$ 分解为两个分量，其一 $\boldsymbol{\varphi}_1'$ 在 CV 线上，对于 C 点的矩为零；另一分量 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 与 CS 平行．同样，可将施于 W 上的力 $\boldsymbol{f}_2$ 分解为 $\boldsymbol{\varphi}_2$ 与 $\boldsymbol{\varphi}_2'$ 两个分量．

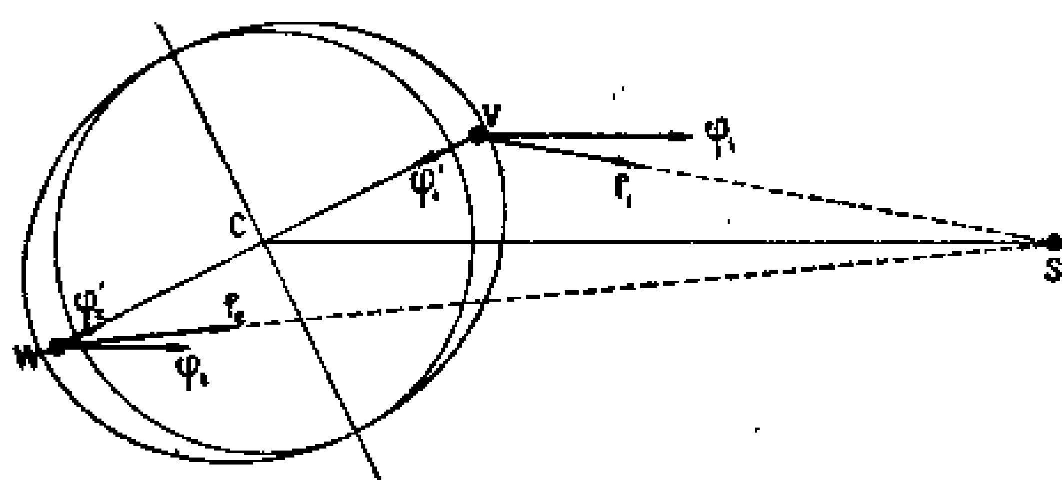


图 52

读者容易证明，平行力 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 与 $\boldsymbol{\varphi}_2$ 是和太阳至 V 与 W 的距离的立方成反比例的，而引力 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$ 则与距离的平方反比．因此，$\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$ 两力之矩可以用与图而正交的向量来表示，并指向图的后方，于是它的作用就是使 VW 线段循顺时针方向旋转，换句话说，即使赤道对于假设固定的黄道的交角变小．

总之，太阳施于均匀椭球体的地球的作用，有一个随太阳赤纬而变化的力偶，在二分日为零，在二至日为极大(太阳的行径没有与天极接近到使力偶达到其理论的极大值然后就减小)；这力偶向量在赤道上，其作用是使黄赤交角变小．

容易描绘出一个具有这些性质的向量．设在赤道面上(图 53) $\boldsymbol{M}_1$ 为一个指向 ♈ 点的无变化向量，$\boldsymbol{M}_2$ 为与 $\boldsymbol{M}_1$ 等长但可移动的向量；而这 $\boldsymbol{M}_2$ 与 $\boldsymbol{M}_1$ 对于和太阳的时圈 CS 正交的 CU 直线是对称的．容易看出，这两个向量之和 $\boldsymbol{M}$ 在二分日为零，在二至日极大，在一年内任何时候这个合向量的方向与上面所定出的方向相同．我们最好到第十三章

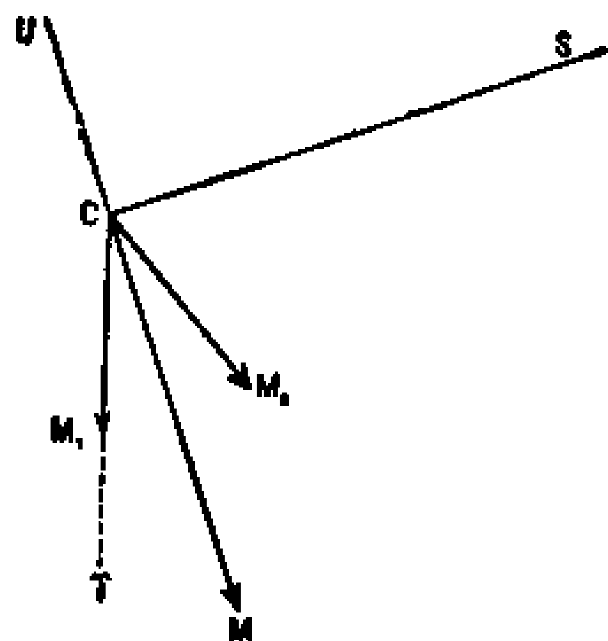


图 53

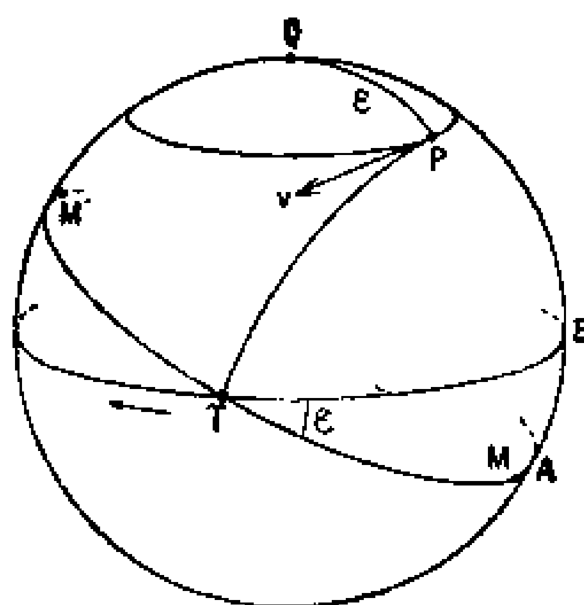


图 54

§ 123 再去验证这一表达法，这里将 $\cos\varepsilon$ 当作 1 ($\cos 23°27 = 0.92$)，是正确的.

试分别研究两个力矩 $\boldsymbol{M}_1$ 与 $\boldsymbol{M}_2$ 的效应. $\boldsymbol{M}_1$ 使地球围绕 C♈ 线按已标出的方向旋转. 但是，当地球围绕它的形状轴旋转时，它的角速度可以表示为指向北极 P 的一个向量. 所以由太阳引力所引起的摄动使极点 P 在天球上和♈点更加接近. 换句话说，旋转瞬时极移动的方式是使它的速度 $\boldsymbol{v}$ 常与过♈点的时圈相切(图 54). 可是，这时圈在 P 点亦和以黄极 Q 为心、以 $PQ=\varepsilon$ 为黄极距的小圆相切. 可见，速度 $\boldsymbol{v}$ 是在这大、小两圆的公切线上. 既然 Q 假设是固定的，则赤极 P 的行径是一个小圆，而以 PQ 弧量度的黄赤交角 ε 是不变的. 极点 P 在这小圆上的运动是匀速而逆行的. 至于天赤道，它的基本移动是围绕与时圈 P♈ 正交的 MM' 直径的一种旋转，因为 P点的速度 $\boldsymbol{v}$ 是在这时圈的平面内。

由于摄动力矩 M_1 的作用，一年内♈点逆行 15″.8. 极点 P 在以 Q 为心的小圆上相应的移动显然是 $15''.8\sin\varepsilon = 6''.3$. 这也是天赤道围绕 MM' 旋转的角度.

对力矩 $\boldsymbol{M}_2$ 的瞬时效应可作如下的说明. 若只有这一力偶的作用，P 点在天球上的速度向量将在象征力矩 $\boldsymbol{M}_2$ 之点的时圈上. 可是这一点在赤道上移动，它在一个回归年里走了两个完全的回归周. 在二分日它与♈点分别在对径的两端，在二至日它与♈点重合. 因此，P 点的速度向量在这点的天球的切平面上，围绕 P 点移动，一年完成两周. 所以：

(1) 由于力矩 M_2 引起的 P 点的位移在一个周期轨道上，这轨道对于半径为 0″.55 的圆周的偏离很少，周期为 6 个月.

(2) 这一种章动表现为♈点的周期移动与黄赤交角的周期变化. ♈点的章动的半幅为 1″.3，赤道的章动的半幅只达 0″.55. 黄赤交角在二分日极大，在二至日极小.

将太阳岁差与章动组合，极点的组合轨道是一个摆线形的曲线(图 55 里的 S)，它的尖点发生在二分日. 如上所说，这时摄动力偶为零，极点稳定(速度为零). 这些拱形曲线的幅为 3″.2，高度为 1″.1. 一年内极点走过两个拱形弧.

以上所说有关太阳的情形，也可用于月球. 由于摄动力与摄动体的质量正比，而与其间的距离的立方反比，因此由月球而来的摄动力偶是由太阳而来的摄动力偶的 2.2 倍. 月球的岁差因而是每年 34″.6，所以由于月球与太阳的加合作用，♈点的总位移每年是 50″.37. 这叫做*日-月岁差*. 至于牛顿算出的月球的章动，异常之小，它的周期等于月球回

归周的一半或13.7日. ♈点可以前进或后退0″.2,而黄赤交角可以增或损0″.09. 将月球的章动与其岁差综合,我们便得到只由于月球的摄动而使极点移动的轨迹;这还是摆线形的曲线,一年内约有27个拱形弧,与由太阳求出的类似,两者的相似比等于回归月与回归年之比更乘以2.2,即约为0.16(图55内的L). 为了求得真极的轨道,应将日-月岁差与日-月章动综合. 这便是牛顿用简易的方法而求得的结果. 由于两个章动的量很小,牛顿没有从观测去校核其存在.

牛顿假设月球在黄道上运行来发展他的理论,但是这种近似的假设是很不够的. 月球的轨道(白道)与黄道的交角平均为5°9′,其升交点逆行,周期为18.60年. 因此,白赤交角有相当大的变化,而白道与赤道的交点围绕♈点摆动可达13°. 在月球的情形,图53里的力矩$\boldsymbol{M}_1$(随着这交点摆动)不是总指着春分点,而力矩$\boldsymbol{M}_1$和$\boldsymbol{M}_2$的大小则随轨道的交角作周期性的变化. 所以,实际上还有比牛顿所讨论过的周期为18.60年的章动更大得多的另外一种章动,它同时影响♈点的位置与黄赤交角. 这一种章动逃过了牛顿的分析,但却被布拉德勒所发现. 这是我们在§40里已叙述过的,而且还将在下章内加以讨论.

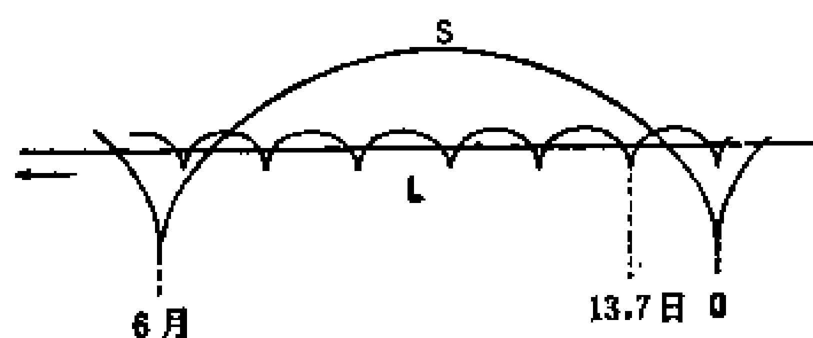
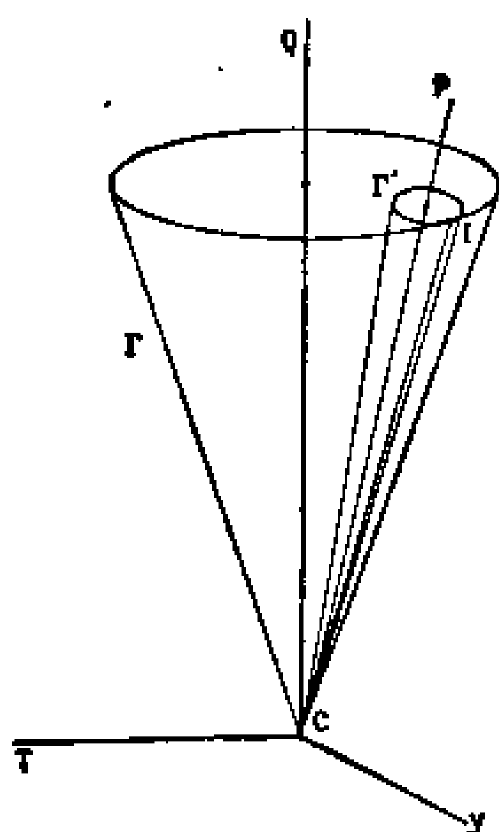


图 55

描绘地球围绕其惯性中心C的运动的完善理论,经普安索(Poinsot)提出,有如下的表达方式. 设CP表示地球的惯性主轴(图56);转动瞬时轴CI并不与它相合,OI围绕CP在一恒星日内扫过顶角为ζ的圆锥面Γ'. 但对于绝对轴如$C♈yQ$, OI扫过另一圆锥面Γ,其轴为黄道的法线CQ,其半顶角为ε. 圆锥Γ'带着地球在圆锥Γ的里面滚动而不滑动. 因此,比值$\varepsilon:\zeta$等于岁差周期里所含的恒星日(即约为950万日),于是

$$\zeta=0''.0090$$



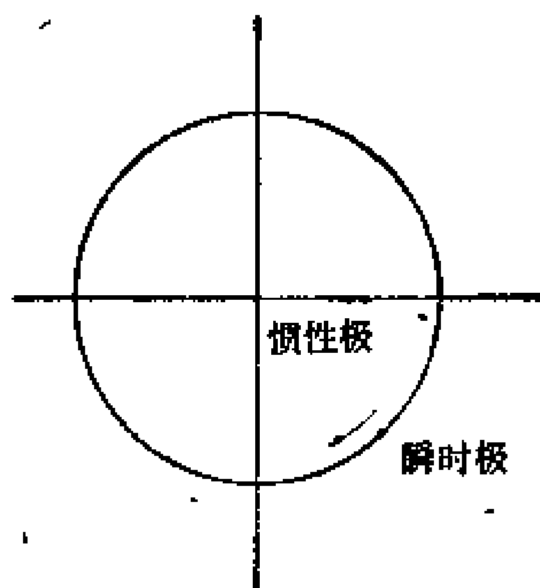


图 56

所以,地球的瞬时极于一恒星日内围绕惯性极逆行,在地面上描出一个半径为28厘米的圆(图53). 这效应比§26里所说的极移小得多,因而很难由直接观测去加以验证.

§43 由日-月岁差的效应引起的赤道坐标的变化

假设黄道的位置固定,黄赤交角不变,则在日-月岁差的效应之下,赤极P的行径将是一个以Q为极的小圆,♈点以每年50″.37的速率逆行(图57).

在无限小时间dt内,春分点逆行一段弧$d\lambda$;天赤道围绕与二分线正交的MM'转动一个角dj. 春分点从♈移到♈′. 赤极走过一段无限小的弧PP',可以当做是在过春分点

♈的时圈上．因♈♈₁弧量度 dj 角，故 $PP'=dj$[1)]．

我们将 $d\lambda$ 称为黄经上的岁差，$d\mu=$ ♈₁♈′ 弧为赤经上的岁差，$dj=$ ♈♈₁ 弧为赤纬上的岁差；方向的确定是使 λ，μ 和 j 为时间的增函数．显然有

$$d\mu=d\lambda\cos\varepsilon$$

$$dj=d\lambda\sin\varepsilon$$

令

$$m=\frac{d\mu}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\cos\varepsilon$$

$$n=\frac{dj}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\sin\varepsilon$$

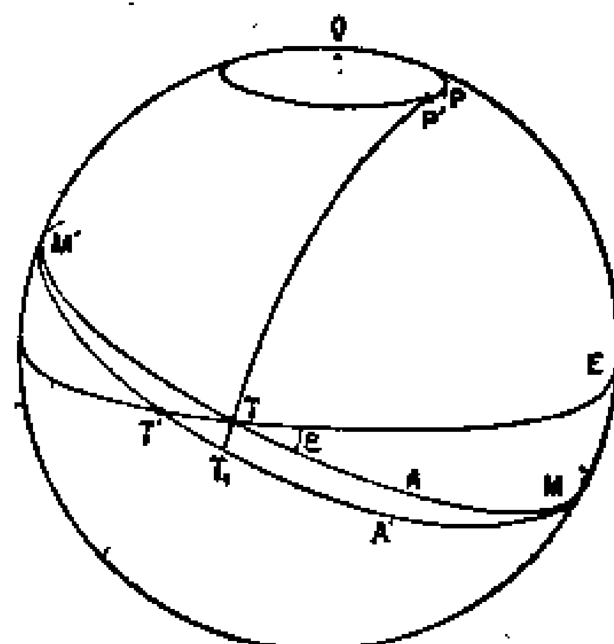


图 57

设以回归年为时间的单位，则有

$$m=46''.1\qquad n=20''.0$$

令 l 与 b 为一颗恒星的黄道坐标，则

$$\frac{dl}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\qquad\frac{db}{dt}=0$$

由此转化到赤道坐标 α 与 δ 的导数．由于（§28 公式 2）

$$\left.\begin{aligned}\sin\delta&=\cos\varepsilon\sin b+\sin\varepsilon\cos b\sin l\\\cos\delta\cos\alpha&=\cos b\cos l\\\cos\delta\sin\alpha&=-\sin\varepsilon\sin b+\cos\varepsilon\cos b\sin l\end{aligned}\right\}$$

设 ε 与 b 不变，取上式的导数：

$$\cos\delta\frac{d\delta}{dt}=\sin\varepsilon\cos b\cos l\frac{dl}{dt}$$

或

$$\frac{d\delta}{dt}=\sin\varepsilon\cos\alpha\frac{dl}{dt}=n\cos\alpha$$

第三关系式便给出 $\dfrac{d\alpha}{dt}$：

$$\cos\delta\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\sin\delta\sin\alpha\frac{d\delta}{dt}+\cos\varepsilon\cos b\cos l\frac{dl}{dt}$$

简化后得

$$\frac{d\alpha}{dt}=(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)\frac{dl}{dt}$$

最后有

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=m+n\sin\alpha\tan\delta\qquad m=46''.1=3^{s}.07\\\frac{d\delta}{dt}&=n\cos\alpha\qquad\qquad\quad\; n=20''.0=1^{s}.34\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

由公式组(1)容易看出每个坐标变化的方向．在 $\cos\alpha$ 为正时，以♈为极的整个半球上赤纬是增长的；在与此相反的半球上，赤纬是减缩的．这些结果是可以预见的．由于分界的大圆参加它的极点♈的运动，一颗给定的恒星的赤纬是以 26,000 年的周期轮流增和减．所以赤纬在一极大与一极小值之间变化．

至于赤经，由于 m 项之值比较起来很大，一般是增加的；但对于天球上某些点，赤经

1) 字母 j 在这里与 §41 的(1)式里的 j 含义不同．今后，j 表示这关系式里第二端内的长期项，而不含周期项．换句话说，它只表示岁差，而不表示岁差与章动之和．

是稳定或减缩的．对于下列方程式在某一给定时刻所规定之点，赤经是稳定的：

$$m+n\sin\alpha\tan\delta=0$$

这式可写为

$$\cos\varepsilon\cos\delta+\sin\varepsilon\sin\alpha\sin\delta=0$$

这个方程式表明以星和 P, Q 两极为顶点的三角形的星位角是直角．

若这是一个平面上的问题，则直角顶的轨迹是以 PQ 为直径的圆．可是在球面上，这顶点的轨迹将是通过 P, Q 两点的空间曲线．这曲线投影在与两极点方向的平分线正交的平面上是一个椭圆，其两半轴分别为 $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ 与 $\tan\frac{\varepsilon}{2}$．容易写出以球心为顶点面依附在这曲线上的锥面的方程式．赤经稳定之点的轨迹在南半球还有一条经过黄赤两极的闭合曲线．这两条曲线之间的区域里赤经减缩．在 26,000 年的周期里，北半球的那条曲线，扫过包含黄纬大于 $90°-\varepsilon$ 之点的整个球的帽顶．因而在帽顶区域里的星的赤经轮流地增和损，即在一极大与一极小之间作周期性的变化．在与这对称的南半球的帽顶里亦有相同的情形．黄纬的绝对值小于 $90°-\varepsilon$ 的星，其赤经作无限的增长．

只有在黄极的星，其坐标才没有变化（在北黄极，$\alpha=18^h$, $\delta=90°-\varepsilon$），自然，这是在黄道对于恒星是固定的假设之下．

§44 总 岁 差

前节里的公式是近似的，因为它们是在黄赤交角不变的假设下推出来的．为了更进一步，我们还该考虑黄道的移动，而给岁差以新的定义．为此，可参看图 49．假设那幅图代表历元 0 与历元 t 的平均基本面．我们以历元 0 时的要素为*固定的*，历元 t 的要素为*移动的*．

在黄道是面定的假设下，因太阳和月球的作用，面使春分点移动 ♈，♈′ 一段距离（表示为 ψ），我们叫它做*日-月岁差*．由于黄道的长期移动而使春分点移动 ♈′♈$_2$（表示为 χ），叫做*行星岁差*．

所谓*黄经上的总岁差*是 $\lambda=♈_2N-♈_1N$，*赤经上的总岁差*是 $\mu=♈_2M-♈_1M$．*黄纬上的岁差*是动黄道与定黄道之间的角 k，*赤纬上的岁差*是两赤道之间的角 j．为了决定动面对于定面的相对位置，便该知道 $\rho=♈_1M$ 与 $\varphi=♈_1N$ 两弧以及黄赤交角 ε 的数值．自然，以上所规定的这些量不是独立的，只有其中的一小部分才可以有任意的数值（见 §40 的结尾处）．

为了岁差的计算，需要知道以上所举之量的数值．设以回归年为时间的单位，并以 1900.0 为历元（这两个名词的含意将在第七章内说明），则

$$\rho=90°-23''.043t$$
$$\varphi=173°57'3''-8''.694t$$
$$\psi=50''.3708t-0''.000107t^2$$
$$\chi=0''.1247t-0''.000238t^2$$
$$\lambda=50''.2564t+0''.000111t^2$$
$$\mu=46''.0851t+0''.000140t^2$$
$$k=0''.4711t-0''.000003t^2$$

$$j=20''.0469t-0''.000043t^2$$

$$\varepsilon=23°27'8''.26-0''.4684t-0.0000006t^2$$

$$\varepsilon_1=23°27'8''.26 \qquad\qquad +0.0000061t^2$$

ε_1 表示动赤道对于定黄道的交角. 它的数值基本上没有什么变化，因为它的表达式里不含一阶项.

上表内的常数，其中由观测所提供的有初始黄赤交角与*岁差常数*（即黄经的总岁差的表达式里 t 项的因子）. 其他系数的数值都是天体力学所提供的.

应该指出，这些数字系数不是绝对的常数，例如岁差便不是一个绝对常数. 它们都是与它们所属的初始历元有关的变量. 换句话说，如果我们不取历元 1900.0 的平均面作为固定的赤道与黄道，而取 1900.0+τ 历元的平均面，则上表内的数字系数便应采取其他数值. ρ, φ, ψ 等量是 τ 和 t 两变数的函数，因为 τ 是定要素所属的历元，而 $t+\tau$ 是动要素所属的历元. 本书之末有表（表 XVI）列有作为这两个变数的函数的岁差的表达式. 这里只写出最重要的两个系数 μ 与 j 的表达式. τ 与 $\tau+t$ 是从 1900.0 起算，单位是回归年. 根据纽康，

$$\left.\begin{aligned}\mu&=mt+m_1t^2+m_2t^3\\ j&=nt+n_1t^2+n_2t^3\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式内

$$\left.\begin{aligned}m&=46''.08506+0''.27945\frac{\tau}{1000}+0''.00012\left(\frac{\tau}{1000}\right)^2\\ m_1&=0''.00013973+0''.00000012\frac{\tau}{1000}\\ m_2&=0''.00000003632\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}n&=20''.04685-0''.08533\frac{\tau}{1000}-0''.00037\left(\frac{\tau}{1000}\right)^2\\ n_1&=-0''.00004267-0''.00000037\frac{\tau}{1000}\\ n_2&=-0''.00000004180\end{aligned}\right\}$$

在结束本节以前还要证明，如果以变化很慢的时间的函数去代替常数 m 和 n，前节里公式组 (1) 还可表达恒星的赤道坐标的导数.

设 $Oxyz$ 表示历元 τ 时赤道参照系的位置（图 58）. 它在历元 $\tau+dt$ 时的位置由如下的方式面求得：先围绕 Oy 循逆向旋转 dj 角，再围绕 Oz 循逆向旋转 $d\mu$ 角. 坐标转换的公式便可写为

$$\left.\begin{aligned}dx&=-yd\mu-zdj\\ dy&=xd\mu\\ dz&=xdj\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

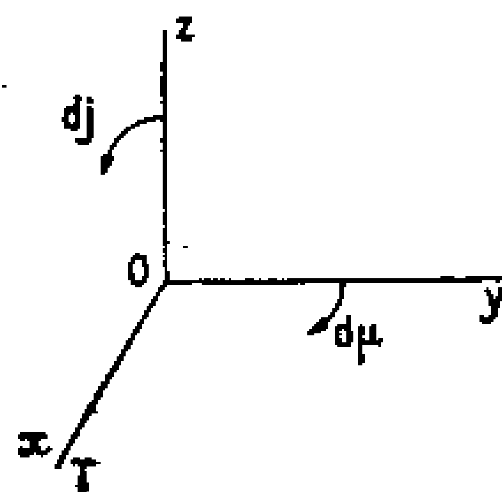


图 58

将这些公式应用到恒星的方向上去. 设 abc 为其坐标，则

$$\left.\begin{aligned}a&=\cos\delta\cos\alpha\\ b&=\cos\delta\sin\alpha\\ c&=\sin\delta\end{aligned}\right\}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\sin\delta\cos\alpha d\delta+\cos\delta\sin\alpha d\alpha=\cos\delta\sin\alpha d\mu+\sin\delta dj\\&-\sin\delta\sin\alpha d\delta+\cos\delta\cos\alpha d\alpha=\cos\delta\cos\alpha d\mu\\&\cos\delta d\delta=\cos\delta\cos\alpha dj\end{aligned}\right\}$$

由这方程式组得以解出

$$\left.\begin{aligned}d\alpha&=d\mu+dj\sin\alpha\tan\delta\\d\delta&=dj\cos\alpha\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

利用关系式(2)与前节的符号，便得

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_{t=0}=m(\tau)\qquad\left(\frac{dj}{dt}\right)_{t=0}=n(\tau)$$

于是重新求得前节的公式(1)：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=m+n\sin\alpha\tan\delta\\\frac{d\delta}{dt}&=n\cos\alpha\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

但是这里 m 和 n 两量是 τ 的函数.

我们还可用公式(3)解如下的问题：设 xyz 为一点的直角坐标，并属于历元 τ 的赤道参照系，求同一点属于历元 $\tau+t$ 的赤道参照系的坐标 $x'y'z'$. 由于

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-my-nz\\\frac{dy}{dt}&=mx\\\frac{dz}{dt}&=nx\end{aligned}\right\}$$

设讨论的岁差经历的时间很短，将 m 与 n 归属于历元 τ，我们可以写出

$$\left.\begin{aligned}x'&=x-(my+nz)t\\y'&=y+mxt\\z'&=z+nxt\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

若以弧度表示 m 与 n，则

$$\left.\begin{aligned}m&=0.000223427+0.00000135\frac{\tau}{1000}\\n&=0.000097190-0.00000041\frac{\tau}{1000}\end{aligned}\right\}$$

公式(6)特别适用于将天文年历里所载的太阳的直角坐标转化到任何一个春分点去.

§45 平坐标，近似公式

设我们要计算在历元 τ 和 $\tau+t$ 之间的岁差的那颗恒星不很挨近极点，而且时间 t 又不很长，我们可用近似公式，即将含 t 的函数的展开式写为如下的几项：

$$\left.\begin{aligned}\alpha-\alpha_\tau&=a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots\\\delta-\delta_\tau&=d_1t+d_2t^2+d_3t^3+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

实际上，按情况我们保留一、二或三项. 系数 a_1 与 d_1，a_2 与 d_2 等是历元 τ 时 α_τ 与 δ_τ 以

及 τ 本身的函数．现在推导其表达式．

前节求得表达赤道坐标的导数的公式(公式 4)：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=\frac{d\mu}{dt}+\frac{dj}{dt}\sin\alpha\tan\delta\\ \frac{d\delta}{dt}&=\frac{dj}{dt}\cos\alpha\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$d\mu$ 与 dj 是围绕 Oz 与 Oy 两轴作成坐标三面形的无限小的旋转．由此可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\alpha}{dt^2}&=\frac{d^2\mu}{dt^2}+\frac{d^2j}{dt^2}\sin\alpha\tan\delta+\frac{1}{2}\left(\frac{dj}{dt}\right)^2\sin2\alpha(1+2\tan^2\delta)+\left(\frac{d\mu}{dt}\right)\left(\frac{dj}{dt}\right)\cos\alpha\tan\delta\\ \frac{d^2\delta}{dt^2}&=\frac{d^2j}{dt^2}\cos\alpha-\frac{dj}{dt}\left(\frac{d\mu}{dt}+\frac{dj}{dt}\sin\alpha\tan\delta\right)\sin\alpha\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

容易由此推求更高阶的导数．

另一方面，我们已将 μ 与 j 两旋转写作

$$\left.\begin{aligned}\mu&=mt+m_1t^2+m_2t^3\\ j&=nt+n_1t^2+n_2t^3\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式内 m，n 等系数是 τ 的函数，其表达式已在前节推出．于是我们便计算出(1)式里的系数：

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\tau=m+n\sin\alpha_\tau\tan\delta_\tau\\ d_1&=\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_\tau=n\cos\alpha_\tau\\ a_2&=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_\tau=(m_1+n_1\sin\alpha_\tau\tan\delta_\tau)+\frac{1}{4}n^2\sin^2\alpha_\tau(1+2\tan^2\delta_\tau)+\frac{1}{2}mn\cos\alpha_\tau\tan\delta_\tau\\ d_2&=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_\tau=n_1\cos\alpha_\tau-\frac{1}{2}n\sin\alpha_\tau(m+n\sin\alpha_\tau\tan\delta_\tau)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

这些量依赖于三个参量 α, δ, τ，除对某一给定历元之外，不易写出数字表来．可是在 a_1 与 d_1 等起初几个系数里，m 和 n 的变化是容易计算进去的．本书后面的表 XVII 至 XXIII，提供了对于 1950.0 年春分点的下列数量：

$$\begin{array}{cc} n\sin\alpha & d_1\\ a_2 & d_2\\ a_3 & d_3\end{array}$$

例如，a_1 容易由下式算得：

$$a_1=m+(n\sin\alpha_\tau)\tan\delta_\tau$$

这些表是根据 J. 皮特斯(J. Petars)的岁差表[1]简化而编制的．我们更补充以两个附表(表 XVII)，一个给出 1850 至 2000 年间任何历元 τ 时 m 和 n 的数值；另一个提供应乘在 $n\sin\alpha_0$ 与 $n\cos\alpha_0$ 上的因子，以得出相当于同一历元 τ 的数值．因此，我们应以这因子乘以表 XVIII 与 XIX 所提供的数据．二阶与三阶项的变化，对于任何情形，在一个世纪内都未达到其数值的千分之一．因此，我们可以将其略去，而只用由这些项所算出来的、表中所载的 1850 至 2000 年间的数字．

1) J. Peters, Präzessionstafeln für das Äquinoktium 1950. 0; Berlin, 1934.

星表的编排，除了每颗星在某一历元 τ 的平坐标之外，还载有坐标的一阶与二阶导数．一阶导数常列在*岁差*的名义之下，使用者须将其乘以年为单位的时间 t，然后加在平坐标上．至于二阶导数，取其 100 倍(时间的单位仍然是年)，而列入*长期变项*的名义行下；因此我们应以 $\frac{t^2}{200}$ 乘平坐标．可是，现今的倾向对这习惯稍有修改，最近的星表在二阶导数里常给出其 50 而不是 100 倍的数字，因而对应的因子是 $\frac{t^2}{100}$．若恒星的赤纬超过 75°，经常须考虑三阶项；其数值一般从星表内取出而乘以 $\left(\frac{t}{100}\right)^3$．

如果能以时间的线性函数来表达一阶导数的变化，而且近似性很好的话(在 t 的数值不过大和极距相当大的时候常是这样的)，将这些导数在中间历元 $\tau+\frac{1}{2}t$ 的数值乘时间 t，便可得它们的积分的相当近似的数值．设 m', n', α' 与 δ' 是这一历元的 n, m, α 与 δ 的数值，便有

$$\left.\begin{aligned} \alpha-\alpha_\tau &= \int_\tau^{\tau+t} \frac{d\alpha}{dt}\,dt = (m'+n'\sin\alpha'\tan\delta')\,t \\ \delta-\delta_\tau &= \int_\tau^{\tau+t} \frac{d\delta}{dt}\,dt = n'\cos\alpha'.\,t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

我们可以从天文年历所刊布的每年的表里或从其他岁差表里取出 m' 与 n' 的数值．至于中间历元的坐标 α' 与 δ'，由于只须是近似的数值，可以利用如下的公式去求它们：

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_\tau+\frac{t}{2}(m'+n'\sin\alpha_\tau\tan\delta_\tau) \\ \delta' &= \delta_\tau+\frac{t}{2}\,n'\cos\alpha_\tau \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

对于很接近天极的星，或者经历的时间相当长，便应当使用下一节的精确公式．

例 1．计算天津四(天鹅座 α 星)1937.0 的平坐标，已知其 1925.0 年的平坐标为

$$\alpha_\tau = 20^h38^m52^s.408 \qquad \delta_\tau = +45°0'41''.97$$

这颗星距极相当远，而且经历的时间相当短，所以用以上的方法相当方便．由表 XVII 取出中间历元的数据：

$$\left.\begin{aligned} m' &= 46''.0937 = 3^s.07292 \\ n' &= 20''.0444 = 1^s.33629 \end{aligned}\right\} 1931.0$$

另外，

$$\left.\begin{aligned} \tan\delta_\tau &= +1.0004 \\ \sin\alpha_\tau &= -0.7692 \\ \cos\alpha_\tau &= +0.6390 \end{aligned}\right\}$$

再由公式(6)，

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= 20^h38^m52^s.4+18^s.4-6^s.2 = 20^h39^m4^s.6 \\ \delta' &= +45°0'42''+1'17'' = +45°1'59'' \end{aligned}\right\}$$

$$\tan\delta' = 1.00115$$

$$\sin\alpha' = -0.76362$$

$$\cos\alpha' = 0.63970$$

这颗星的年自行是

$$-0^s.0008 \qquad (\text{赤经上})$$

$$+0''.005 \qquad (\text{赤纬上})$$

应作相当于12年的改正. 最后得

$$\alpha = 20^h38^m52^s.408 + 36^s.875 - 12^s.339 - 0^s.010$$

$$\delta = +45°0'41''.97 + 2'33''.87 + 0''.06$$

$$\left.\begin{array}{r} 20^h39^m16^s.934 \\ +45°3'15''.90 \end{array}\right\} 1937.0$$

例 2 计算拱极星勾陈三(小熊座 ε 星)1937.0的平坐标. 从FK3星表中取出其在1925.0的平坐标与公式(1)里的系数(FK3里时间的单位一般是世纪,因此以下的系数都应以这个因子去乘):

$$\begin{array}{rr} 16^h53^m35^s.500 & +82°9'47''.36 \\ 100a_1 = -623^s.14 & 100d_1 = -572''.7 \\ (100)^2a_2 = +16^s.1 & (100)^2d_2 = -43''.3 \\ (100)^3a_3 = +0^s.47 & (100)^3d_3 = +0''.9 \\ 100\mu_\alpha = +0^s.63 & 100\mu_\delta = +0''.3 \end{array}$$

自行的两分量 μ_α 与 μ_δ 应加在 a_1 与 d_1 两因子内. 故以年表示 t, 便得

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \alpha_\tau = -6^s.2251t + 16^s.1\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0^s.47\left(\frac{t}{100}\right)^3 \\ \delta - \delta_\tau = -5''.724t - 43''.3\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0''.9\left(\frac{t}{100}\right)^3 \end{array}\right\}$$

或对于 $t=12$

$$\alpha - \alpha_\tau = -74^s.701 + 0^s.232 + 0^s.001 = -74^s.468$$

$$\delta - \delta_\tau = -68''.69 - 0''.62 + 0''.00 = -69''.31$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 16^h52^m21^s.032 \\ \delta = +82°8'38''.05 \end{array}\right\} 1937.0$$

这一节里没有讨论黄道坐标上的岁差. 自然, 在§43内开始处的初步解决方法是不够的, 特别是不能将黄纬当做是严格地没有变化. 这里所以没有将有关黄道坐标的公式加以推导, 因为这些公式对于恒星没有什么用处. 可是, 对于行星的要素便发生一个类似的问题: 行星的轨道面归属于移动的平黄道和平春分点, 因此这两个要素是随时间变化的. 这一特殊情形将于§86之末加以讨论.

§46 平坐标, 精确方法

当微分公式或近似公式不合用时, 即若恒星太接近天极, 或经历的时间过长, 则应使用如下的精确公式才能完全解决问题.

设 A 与 A'(图59)是历元 τ 与 $\tau+t$ 的平赤道, P 与 P' 为其极点, ♈ 与 ♈' 为其对应的平春分点. 用§44的符号, 可写出

$$♈M = \rho \qquad M♈' - M♈ = \mu \qquad \angle ♈M♈' = j$$

于是

$$♈'M = \mu + \rho$$

从此令

$$\rho = 90° - r \qquad \mu + \rho = 90° + s$$

r 与 s 是时间的函数在 $t=0$ 时为零, 其数字表达式列在后面.

设一颗星 X 在 τ 时的平坐标为 α_τ 与 δ_τ, 在 $\tau+t$ 时的平坐标为 α 与 δ.

在 $PP'X$ 三角形里:

$$PX=\mathscr{D}=90^\circ-\delta_\tau \qquad \angle XPP'=90^\circ+\alpha_\tau-\rho=\alpha_\tau+r$$

$$P'X=\mathscr{D}'=90^\circ-\delta \qquad \angle XP'P=90^\circ-\alpha+(\mu+\rho)=180^\circ-\alpha+s$$

$$PP'=j$$

图 59

令
$$A=\alpha_\tau+r \qquad A'=\alpha-s$$

在所讨论的三角形里便有

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\mathscr{D}'\cos A'=-\cos\mathscr{D}\sin j+\sin\mathscr{D}\cos j\cos A\\
&\sin\mathscr{D}'\sin A'=\sin\mathscr{D}\sin A\\
&\cos\mathscr{D}'=\cos\mathscr{D}\cos j+\sin\mathscr{D}\sin j\cos A
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

若星接近天极,(1)式中的第三方程便无实际用途. 我们将用一个例子来表明:在这一特殊情形,可利用 j, $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}'$ 是小角这一条件求解(1)式里的前两个方程式.

这三角形还可用内珀尔类比式去求解,一般的情形下有

$$\left.\begin{aligned}
&\tan\frac{1}{2}(A'+\omega)=\tan\frac{A}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathscr{D}+j)}{\sin\frac{1}{2}(\mathscr{D}-j)}\\
&\tan\frac{1}{2}(A'-\omega)=\tan\frac{A}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\mathscr{D}+j)}{\cos\frac{1}{2}(\mathscr{D}-j)}\\
&\tan\frac{\mathscr{D}'}{2}=\tan\frac{1}{2}(\mathscr{D}\mp j)\,\frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{1}{2}(A'-\omega)}{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{1}{2}(A'+\omega)}
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

我们还可不计算平坐标而计算岁差. (1)式里的头两个方程式分别先乘以 $-\sin A$ 与 $+\cos A$ 后乘以 $\cos A$ 与 $\sin A$, 再相加, 便得两个新的关系式如下:

$$\begin{aligned}
\cos\delta\sin(A'-A)&=\sin\delta_\tau\sin j\sin A-\cos\delta_\tau\cos A\sin A(1-\cos j)\\
&=\cos\delta_\tau\sin j\sin A\left(\tan\delta_\tau+\cos A\tan\frac{j}{2}\right)\\
\cos\delta\cos(A'-A)&=\cos\delta_\tau-\sin\delta_\tau\sin j\cos A-\cos\delta_\tau\cos^2 A(1-\cos j)\\
&=\cos\delta_\tau\left[1-\sin j\cos A\left(\tan\delta_\tau+\cos A\tan\frac{j}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

由此得到

$$\left.\begin{aligned}
&\tan(A'-A)=\frac{\sin j\sin A\left(\tan\delta_\tau+\tan\frac{j}{2}\cos A\right)}{1-\sin j\cos A\left(\tan\delta_\tau+\tan\frac{j}{2}\cos A\right)}\\
&\alpha-\alpha_\tau=A'-A+s+r
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

赤纬上岁差直接由下列内珀尔类比式给出:

$$\tan\frac{\delta-\delta_\tau}{2}=\tan\frac{j}{2}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)} \tag{4}$$

下表(取自表 XVI)提供计算所需的一切数据:

$$r=(23042''.53+139''.73\tau+0''.06\tau^2)t+(30''.23-0''.27\tau)t^2+18''.00t^3$$

$$s=r+(79''.27+0''.66\tau)t^2+0''.32t^3$$

$$j=(20046''.85-85''.33\tau-0''.37\tau^2)t+(-42''.67-0''.37\tau)t^2-41''.80t^3$$

这里时间 τ 从 1900.0 起算,以千回归年为单位,对于 t 亦用相同的单位.

例 (数据取自纽康) 计算勾陈一(即北极星,小熊座 α 星)2100.0 的平坐标,已知其 1900.0 的坐标为

$$\alpha_\tau=1^h23^m0^s.47 \qquad \delta_\tau=+33°46'27''.27$$

因

$$\tau=0 \qquad t=0.2$$

$$r=1°16'49''.86$$

$$s=1°16'53''.03$$

$$j=1°6'47''.33$$

$$A=22°1'53''.91$$

$$\mathscr{Q}=1°13'32''.73$$

利用公式组(1). 由于 $\cos\mathscr{Q}$ 很近于 1, 不须计算. 在前两式里将小角的正弦表示为角秒(利用表 III):

$$\cos A=0.9269714 \qquad \cos j=0.9998112 \qquad \cos\mathscr{Q}=0.9997712$$

$$\sin A=0.3751321 \qquad \sin j=4007''.078 \qquad \sin\mathscr{Q}=4412''.393$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\mathscr{Q}'\cos A'=\ \ 83''.229\\ \sin\mathscr{Q}\sin A'=1655''.230\end{array}\right\}$$

$$\cot A'=0.0502824 \qquad A'=87°7'17''.26$$

$$s=1°16'53''.03$$

$$\alpha=88°24'10''.29=5^h53^m36^s.69$$

$$\sin\mathscr{Q}'=1657''.32 \qquad \delta=90°-1657''.34$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=5^h53^m36^s.69\\ \delta=+89°32'22''.66\end{array}\right\}2100.0$$

这方法比较迅速.

应用公式组(2)解相同的问题(可用 7 位对数表,如 Schrön 表):

$\log\tan\frac{A}{2}$	$\bar{1}.28930892$	$\log\tan\frac{A}{2}$	$\bar{1}.28930892$
$\log\sin\frac{1}{2}(\mathscr{Q}+j)$	$\bar{2}.30982989$	$\log\cos\frac{1}{2}(\mathscr{Q}+j)$	$\bar{1}.99990952$
$\text{colog}\sin\frac{1}{2}(\mathscr{Q}-j)$	3.00757148	$\text{colog}\cos\frac{1}{2}(\mathscr{Q}-j)$	0.00000022
$\log\tan\frac{1}{2}(A'+\omega)$	0.60671029	$\log\tan\frac{1}{2}(A'-\omega)$	$\bar{1}.28921866$

$$\frac{1}{2}(A'+\omega)=76°6'26''.75 \qquad \frac{1}{2}(A'-\omega)=11°0'50''.42$$

$$A'=87°7'17''.17$$

$$s=1°16'53''.03$$

$$\alpha=88°24'10''.20=5^h53^m36^s.68$$

$\log\tan\frac{1}{2}(\mathscr{Q}-j)$	$\bar{4}.99242872$	$\log\tan\frac{1}{2}(\mathscr{Q}+j)$	$\bar{2}.30992036$
$\log\cos\frac{1}{2}(A'-\omega)$	$\bar{1}.99192591$	$\log\sin\frac{1}{2}(A'-\omega)$	$\bar{1}.28114462$
$\operatorname{colog}\cos\frac{1}{2}(A'+\omega)$	0.61960396	$\operatorname{colog}\sin\frac{1}{2}(A'+\omega)$	0.01289367
$\log\tan\frac{\mathscr{Q}'}{2}$	$\bar{3}.60395859$	$\log\tan\frac{\mathscr{Q}'}{2}$	$\bar{3}.60395865$
$\frac{\mathscr{Q}}{2}=$	$0°13'48''.67$	$\frac{\mathscr{Q}'}{2}=$	$0°13'48''.67$

$$\mathscr{Q}'=0°27'37''.34$$

$$\delta=89°32'22''.66$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=5^h53^m36^s.68\\ \delta&=+89°32'22''.66\end{aligned}\right\}2100.0$$

§47　较差岁差

随基本面的移动而来的是坐标轴在天球上的移动，因而一点对于他一点的较差坐标随时间作缓慢的变化．这种变化叫做*较差岁差*．

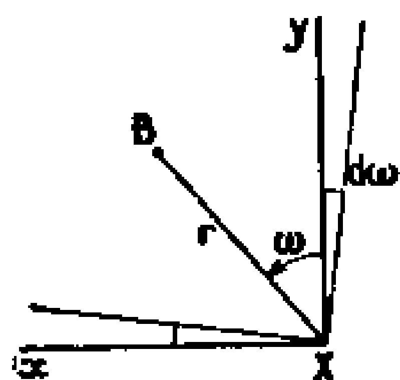


图　60

设 P 与 P' 为 t_0 与 t 两时的天极(图 59)．已知

$$PP'=n(t-t_0)\qquad n=20''.05=0°.0056=0.000097$$

X 点的时圈在 dt 时内转过一个角 $d\omega$(图 60)，其正方向与方位角(§11)的方向相反计算．因此

$$\cos\delta\frac{d\omega}{dt}=n\sin\alpha\tag{1}$$

若在 t_0 时，B 点对于 X 点的方位角是 ω_0，在 t 时它的数值是

$$\omega=\omega_0+n\sec\delta\sin\alpha\cdot(t-t_0)\tag{2}$$

B 点的较差坐标的表达式(§11)为

$$\left.\begin{aligned}x&=\cos\delta\Delta\alpha=r\sin\omega\\ y&=\Delta\delta=r\cos\omega\end{aligned}\right\}$$

微分之得

$$\left.\begin{aligned}&\cos\delta d(\Delta\alpha)-\sin\delta\Delta\alpha d\delta=\Delta\delta d\omega\\ &d(\Delta\delta)=-\cos\delta\Delta\alpha d\omega\end{aligned}\right\}$$

而

$$d\delta=n\cos\alpha dt\qquad d\omega=n\sec\delta\sin\alpha dt$$

简化以后，便得较差坐标的导数为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Delta\alpha}{dt}&=n\sec\delta(\Delta\alpha\cos\alpha\sin\delta+\Delta\delta\sin\alpha\sec\delta)\\ \frac{d\Delta\delta}{dt}&=-n\Delta\alpha\sin\alpha\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

公式(2)可用以改正方位角所受的较差岁差的影响．所以如要根据相隔时间很长的观测，决定双星的轨道时，便须将方位角归算到相同的一个春分点．所以在测量的方位角上须减去以下的改正值：

$$n\sec\delta\sin\alpha(t-t_0)=0^\circ\!.0056\sec\delta\sin\alpha(t-t_0)$$

式内 t 与 t_0 分别表观测时的历元(表为回归年)和取为原点的历元．

当已知其在历元 t_0 的坐标的数值时，公式(3)可用以计算历元 t 的较差坐标．如果这两颗星的相对自行已经知道，便须计算进去．

例 1． 将双星贯索西增三(北冕座 η 星)(1900.0: $\alpha=15^h19^m$，$\delta=+30°39'$)归算到 1900.0 的方位角，已知这方位角在 1823 年是 $25^\circ\!.89$.

因 $\sin\alpha=-0.764$ $\sec\delta=1.162$ $t-t_0=-77$ 年

须减去的改正值为 $0^\circ\!.38$，故归算后的方位角为

$$25^\circ\!.89-0^\circ\!.38=25^\circ\!.51$$

例 2． 设两颗星的近似平坐标为

$$\left.\begin{array}{ll} 2^h12^m53^s & +56°51'26'' \\ 2^h11^m22^s & +56°32'49'' \end{array}\right\} 1900.0$$

用精密测微器量得它们对于同一历元的赤纬差为

$$\Delta\delta=1116''\!.49$$

设相对自行可以忽略，试计算对于任何历元这两星的赤纬差．

公式(3)可以解决这个问题．这里须使

$$n=0.000097 \qquad \Delta\alpha=1^m31^s=1365'' \qquad \sin\alpha=0.5423$$

立刻求得 $\Delta\delta=1116''\!.49-0''\!.072(t-1900.0)$

式内 t 以年表时期．若时间间隔很长，便须将二阶项计算进去．

这里所说的两颗星在英仙座 h 星团内，常用以校订动丝测微螺旋上的刻划纹路．

第五章　基本面的移动(2. 章动)

§48　白道交点的逆行

岁差里的周期差项一并叫做章动，除了由白道交线的长期移动而引起的部分之外，章动的变幅很小.

白道与黄道的交角为 $5°9'$(若不计入其周期性的小变化)；白道与黄道相割于交点线，升交点是月球的黄纬由负变正的一点. 太阳所施的摄动作用，其机制与岁差的机制不无类似之处，这作用的效应使交点线循逆向转动. 这种转动相当大，其平均值达每年69629″，或每日 191″. 所以白道的升交点在黄道上移动的周期是

$$\frac{1296000}{69629}=18.60\text{ 年}$$

这一周期常近似地写为 $18\frac{2}{3}$ 年. 在一朔望月里升交点约移动 1°.5，即约为月亮的视直径的 3 倍. 所以月亮在恒星天球上所运行的曲线绝不是闭合的；由此可以了解到黄道上的一颗恒星只能在连续几个朔望月里被月亮掩着.

由于交点的移动，白道与天赤道的交角是在相当大的范围内作周期性的变化；而且白道与赤道的交点在 ♈ 点两旁亦有相当大的移动.

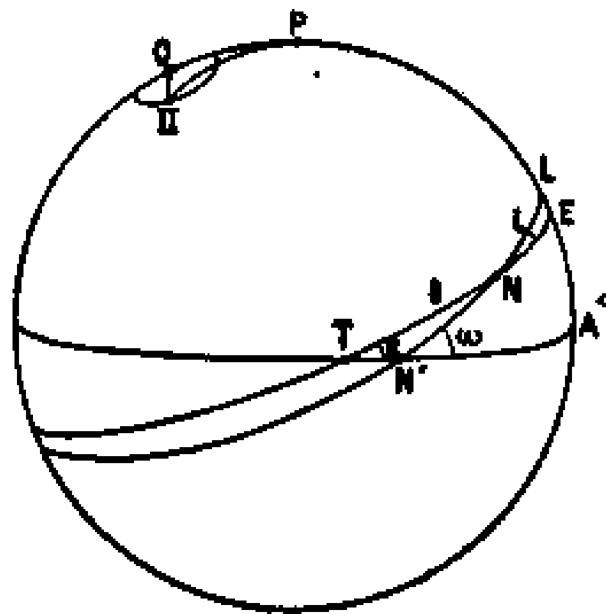


图 61

设以 Q 表黄道 E 的极(图 61)，白道 L 的极 Π 将在黄极距为 i 的小圆上移动. 白道与赤道 A 的交角以 $P\Pi$ 弧量度. 设 N 表白道在黄道上的升交点，N' 表其在赤道上的升交点.

令：　　$P\Pi=\omega$　　$♈N=\theta$

$♈NN'$ 三角形的角为 $\angle\varepsilon$，$\angle180°-\omega$ 与 $\angle i$. 于是待求的白赤交角为下式所给出：

$$\cos\omega=\cos\varepsilon\cos i-\sin\varepsilon\sin i\cos\theta$$

式内　　$\varepsilon=23°27'$　　$i=5°9'$　　$\theta=259°8'-69629''(t-1900.0)$

时间 t 以回归年计算. 当 θ 为零时，升交点N 与 ♈ 点重合，于是

$$\omega=\varepsilon+i=23°27'+5°9'=28°36'$$

若不考虑周期差之项(见十三章)，这便是白道与赤道的交角的极大值[1]. 这交角的极小值

$$\omega=\varepsilon-i=23°27'-5°9'=18°18'$$

1) 当交点的黄经为 0 时 (1932, 1950, 1969)，月亮的赤纬可达 ±28°36′. 若计入短周期差之项，这数值还可增加 9′. 由此可见，在我们的纬度地方，冬季的望月离天顶甚近，而夏季的望月则距地平不远.

由于 1950 年 8 月 18 日交点的平黄经为零，9 月 6 日月亮的赤纬达 +28°43′ 而 19 日则为 −28°44′. 1969 年以前月亮的赤纬不会达到这样的极值.

发生于升交点与秋分点重合之时.

另一方面 N' 点亦不与♈点重合. 设 α 为 N' 点的赤经,则它为下式所给出:

$$\sin\alpha=\frac{\sin i\sin\theta}{\sin\omega}$$

由于 α 也是 $PQ\Pi$ 三角形在天极的角,当这三角形的 Π 角为直角时,它的数值是绝对的极大. 于是

$$\pm\sin\alpha=\frac{\sin i}{\sin\varepsilon}=0.2254$$

由此得
$$\alpha=\pm 13^\circ\!.0$$

可见 N' 在赤道上春分点两侧摆动,幅度为 13°, 周期为 18.60 年.

交角 ω 的变化引起月球施于大地水准面的摄动力偶的变化. 因此在太阴岁差(据定义是常数)上,更重合有♈点的周期差,即黄经上的章动. 此外,每瞬时由太阴岁差的效应而引起的极移,其速度向量不在♈点的,而在 N' 点的时圈上. 因面这第二效应引起交角上的章动.

这两个现象便是布拉德勒所发现的(§ 40); 它作成真正章动的主要部分. 我们将讨论其性质于下.

§ 49　章动的主要项(布拉德勒)

设于某一给定瞬间, E 表平黄道(见 § 41), A_m 表平赤道(即没有章动时赤道应占的位置), A_v 表真赤道(图 62). 据定义,黄经上的章动是 $♈_m♈_v$ 弧,循逆向量为正. 它与升交点的黄经的关系为

$$N=-17''\!.23\sin\theta$$

另外,真交角与平交角之差为

$$\Omega=\varepsilon_v-\varepsilon_m=9''\!.21\cos\theta$$

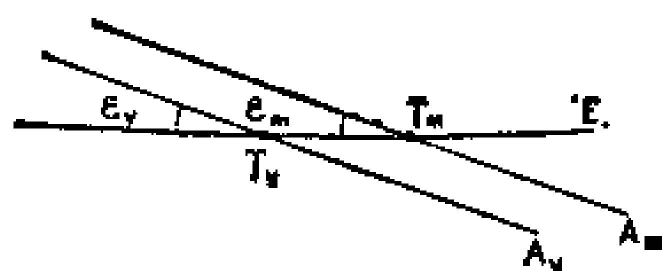


图 62

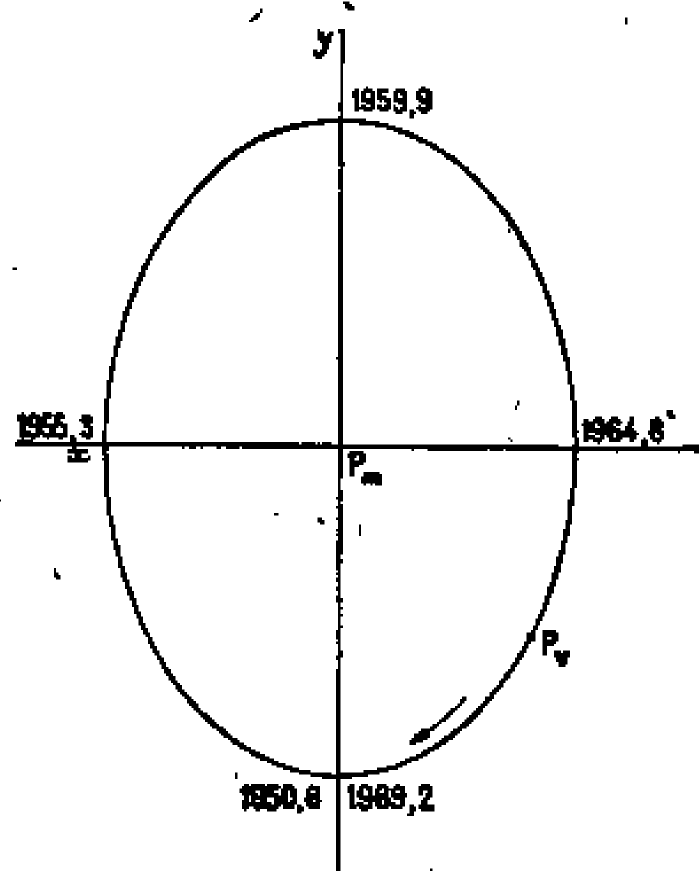


图 63

设 P_m 为平极,它围绕黄极走一个黄纬为 $90°-\varepsilon$ 的小圆,更设 xP_my 为平极所带动的直角坐标系, 其 P_my 轴指向黄极, P_mx 轴指着赤极的岁差的运动方向上(图 63 是假设从天球的外面看的情况). 真极 P_v 对于这两轴的坐标是

$$\begin{cases}x=N\sin\varepsilon=-17''\!.23\times0.3979\sin\theta=-6''\!.86\sin\theta\\ y=-\Omega=-9''\!.21\cos\theta\end{cases}$$

真极对于平极的轨迹是一个椭圆,其两半轴之长分别为 $6''\!.86$ 与 $9''\!.21$, 这叫做*章动轴*. 由

于θ角随时间增长而缩小，这椭圆在18.60年内循逆向作成．升交点的黄经在1950.6年为零，因此可以在图63里标出真极过椭圆四顶点的时期．达朗贝尔证明章动两轴之比为$\cos 2\varepsilon : \cos \varepsilon$（见十三章）．

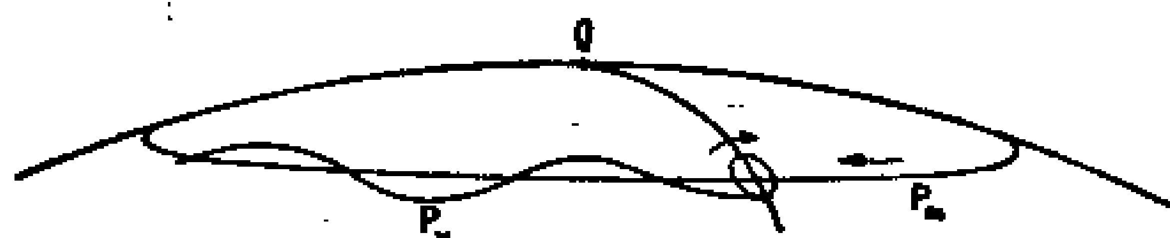


图 64

将岁差与章动综合，便得真极的轨迹是正弦形的而非环圈形的曲线，平极在18.6年内移动373″（图64）．

例如1950年1月1日：

$$\theta = 12°7'$$
$$\sin\theta = +0.2099$$
$$\cos\theta = +0.9777$$
$$\left.\begin{aligned} N &= -3''.62 \\ \Omega &= +9''.00 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= -1''.44 \\ y &= -9''.00 \end{aligned}\right\}$$

天文年历里所给出的数值与此稍有差异，因为在N与Ω的符号里不只含有以上所说的周期为18.60年之项，还有周期短、变幅小之项，我们将在下面提到．

§50　章动的短周期项

在章动的主要项上还须加入周期短、变幅小的若干项，牛顿所预见的由日-月而来的章动表达式为

$$N_1 = -1''.272\sin 2\odot - 0''.204\sin 2☾$$
$$\Omega_1 = +0''.551\cos 2\odot + 0''.089\cos 2☾$$

符号⊙与☾分别表太阳与月亮的黄经．太阳项的周期为6个月，月亮项的周期为13.66日（月亮的分至周之半）．本书末尾有一表记载有计算章动的一切项的表达式，并包括不可忽略的数值．N里有14项，Ω里有10项（表XVI）．这些项的系数之和（不包含在主要项内），对N是$2''.1$，对Ω是$0''.8$．它们在这些量的数字值里，用以作平位置与真位置的相互转换．总之，一方面我们分别提供周期超过4个月的项之和（这些是与交点的黄经或与太阳的黄经有关的项）；另一方面提供完全依靠月亮的黄经的短周期项之和．这些短周期项在天文年历里分别以dN和$d\omega$符号表示，至于符号N与Ω里的项概属长周期项．

这种区分法，由以下的事实看来，是合适的．天文年历里载有基本恒星每十日的位置．如果在这里而包括短周期的章动项，例如周期为13日的项，那么，便不能取内插值．所以这些表示位置的数字里只有长期项，而让观测者去估计观测日的短周期项之值．可是，对于拱极星却是例外，它们每日的位置是对于格林尼治的上中天而给出，并已将短周期项计算进去了．

如在§44里已经讲过的，没有行星章动项，因为平春分点与真春分点皆被认为在移动的平黄道上，而真黄赤交角亦是对平黄道而定的．

§51　恒星的真坐标

恒星的平坐标上加入章动的改正值，便得其真坐标．

黄经上的章动 $N+dN$ 可分解为坐标三面形绕 OZ 轴的旋转$(N+dN)\cos\varepsilon$，与绕 Oy 轴的另一旋转$(N+dN)\sin\varepsilon$；至于黄赤交角 $\Omega+d\omega$ 的变化是与上相同，循逆向绕 Ox（或 $O\Upsilon$）轴的一个旋转．设恒星的方向余弦为 a, b, c，我们可以如下推出其坐标的转换式：

$$\left.\begin{aligned}\Delta a&=-(b\cos\varepsilon+c\sin\varepsilon)(N+dN)\\ \Delta b&=a(N+dN)\cos\varepsilon-c(\Omega+d\omega)\\ \Delta c&=a(N+dN)\sin\varepsilon+b(\Omega+d\omega)\end{aligned}\right\}$$

而

$$\left.\begin{aligned}a&=\cos\alpha\cos\delta\\ b&=\sin\alpha\cos\delta\\ c&=\sin\delta\end{aligned}\right\}$$

由此得含 $\Delta\alpha$ 与 $\Delta\delta$ 的方程式为

$$\left.\begin{aligned}&-\cos\alpha\sin\delta\Delta\delta-\sin\alpha\cos\delta\Delta\alpha=-[\cos\varepsilon\sin\alpha\cos\delta+\sin\varepsilon\sin\delta](N+dN)\\ &-\sin\alpha\sin\delta\Delta\delta+\cos\alpha\cos\delta\Delta\alpha=(N+dN)\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\delta-(\Omega+d\omega)\sin\delta\\ &\cos\delta\Delta\delta=(N+dN)\sin\varepsilon\cos\alpha\cos\delta+(\Omega+d\omega)\sin\alpha\cos\delta\end{aligned}\right\}$$

从上面的前两式里消去 $\Delta\delta$，便得

$$\cos\delta\Delta\alpha=(N+dN)[\cos\varepsilon\cos\delta+\sin\varepsilon\sin\alpha\sin\delta]-(\Omega+d\omega)\cos\alpha\sin\delta$$

由此得转换式为

$$\alpha_v-\alpha_m=(N+dN)(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)-(\Omega+d\omega)\cos\alpha\tan\delta$$

$$\delta_v-\delta_m=(N+dN)\sin\varepsilon\cos\alpha+(\Omega+d\omega)\sin\alpha$$

这两式亦可用作逆转换．由于右端的项相当小，在 $\tan\delta$ 的数值不大的情形下，可以用平坐标或真坐标去计算．

例　求勾陈三（小熊座 ε 星）1937 年 1 月 1 日的章动改正值，已知其平坐标为（§ 45）

$$\alpha_m=16^h52^m21^s.032$$

$$\delta_m=+82°8'38''.05$$

天文年历给出这颗星当天的

$$N+dN=+17''.62+0''.24=+17''.86$$

$$\Omega+d\omega=-1''.48+0''.06=-1''.42$$

另外　$\sin\varepsilon=0.3979$　$\sin\alpha=-0.9568$　$\tan\delta=7.247$

　　　$\cos\varepsilon=0.9174$　$\cos\alpha=-0.2909$

$$\alpha_v-\alpha_m=\frac{1^s}{15''}17''.86(0.9174-0.3979\times0.9568\times7.247)-\frac{1^s}{15''}1''.42\times0.2909\times7.247$$

$$=-17^s.86\times0.1228-1^s.42\times0.1405=-2^s.193-0^s.200$$

$$\delta_v-\delta_m=-17''.86\times0.3979\times0.2909+1''.42\times0.9568$$

$$=-17''.86\times0.1157+1''.42\times0.9568=-2''.07+1''.36$$

$$\begin{cases}\alpha_v-\alpha_m=-2^s.393\\ \delta_v-\delta_m=-0''.71\end{cases}$$

章动亦如岁差一样影响较差坐标，但除对天极附近的星以外，这影响很小．由于很少使用较差章动，我们便不在这里列出表达它的公式，但用 § 47 求较差岁差的方法，读者不难推出这些公式．

第六章　相对运动的一种光学效应(光行差)

岁差与章动使恒星的坐标随时间变化，本质上是由于坐标系的移动.

光行差是性质不同的另外一种效应：这是由于观测者对于天体的相对运动而引起它们在方向上的视变化；说确切些，光行差随观测者对于天体的相对速度而变化. 光行差的第一个效应是罗梅尔于1676年所发现的.

假使一切天体都是相对的静止，或者假使光循直线传播不需时间，则其视位置与几何位置便无区别. 事实上，这两种位置是分开的，这种偏离叫做光行差，十七世纪之末由于罗梅尔的工作，人们已经知道太阳有这个现象，但在恒星上观测得这现象的，却是1726年布拉德勒的成就.

本书所陈述的光行差理论，建立在相对性原现上面. 利用这一原理，运动物体的光学现象，便为罗梅尔、惠根斯(Huygens)与其同时代人所简单认识[1]，可是到了十九世纪，这现象的解释反而复杂化了. 无疑，光的弹性机械波动理论须假设有一种绝对不动的"以太"，这理论虽然可以说明一阶项的光行差，但却异常繁复，我们便不从这方面去叙述它了.

§52　太阳的光行差

设 T 表地球(图65)，S 表太阳，并将太阳的相对轨道设为以 T 为心、a 为半径的圆. 太阳的相对速度是

$$V = na^*$$

这速度对于光速算是小量. 光经过距离 a 的时间 τ 叫做光行差时或光行时差. 于是

$$\tau = \frac{a}{c}$$

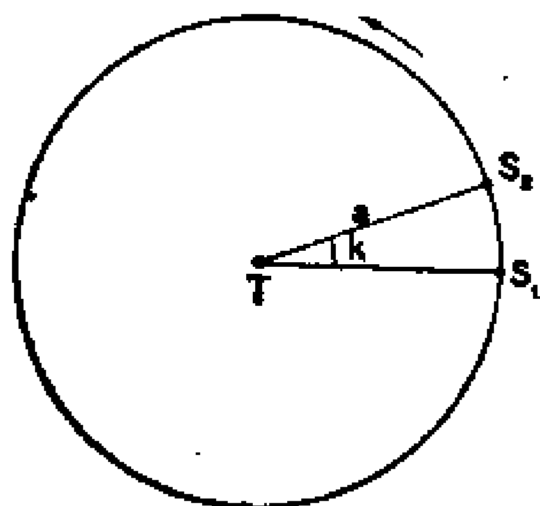


图　65

太阳在 S_1 处时所发的光，经过 τ 时达到地球. 但在这段时间里，太阳由 S_1 运动到 S_2，所经行的一段弧等于 $n\tau$. 当太阳在 S_1 处所发的光达到观测者之时，观测者看见太阳在 S_1(视位置)，但太阳的几何位置那时却在 S_2. 视位置与几何位置之间的差角 k 叫做太阳的光行差，其值为

$$k = n\tau = \frac{na}{c} = \frac{V}{c}$$

罗梅尔首先发现光按这种方式传播，并且测定了光行时. 十七世纪里木卫被木星掩蔽，为人利用以测定地面的经度(见§19末的脚注)，因而为这一实际用途，天文学家编制了木卫运行表. 那时罗梅尔在巴黎天文台工作，从事木卫被食时刻的观测，并与卡西尼的木卫运行表所载的被食时刻比对. 他发现，当木星在方照附近时，星表相当准确地表达了现象，但在冲与合时便发生了误差. 冲时木卫食发生的时刻早于表载的时刻十几分钟，合

1) 相对性原理，是十七世纪末惠根斯提出而加以应用的.

* n 的意义见§30，即太阳每日的平均角速度——译者注

时则迟于表载的时刻十几分钟. 设以 L 和 l 分别表示太阳与木星的黄经，卡西尼表所载木卫食的时刻，应该加上等于 $\tau\cos(L-l)$ 的改正量. 罗梅尔认为，常数 τ 是光在日地之间传播所需的时间. 设 a 与 a' 分别表地球和木星到太阳的距离，木星的地心距离大约等于 $a'+a\cos(L-l)$. 这距离在一会合周期内改变 $2a$(图 66).

罗梅尔估计的光行差时，起初为 11 分，后来减到大约 8 分. 由此推出 k 的数值约为 20″. 1726 年布拉德勒发现恒星的周年光行差时，他也求得这常数为 20″，这就使他将自己所发现的现象解释为由于光的传播需要时间，和光速与地球公转的速度综合而成的现象.

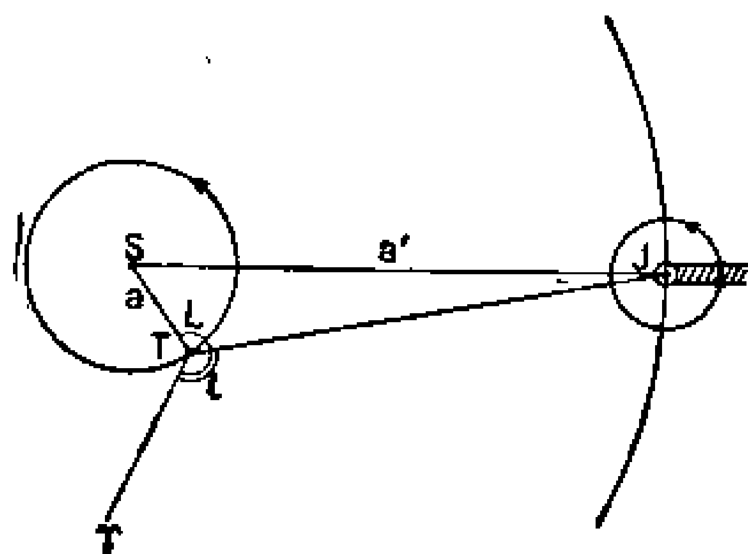


图 66

在决定 k 的更精确的数值以前，我们先介绍太阳的相对轨道的偏心率. 在 § 30 的末尾处曾提到，开普勒运动是两个向量之和，一个与向径正交，其长度为

$$\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$$

另一个与拱线正交，其长度为

$$\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}$$

这两个向量间的角等于真近点角 v. 因而与向径正交的速度分量的表达式为

$$\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v)$$

太阳的光行差便等于这速度分量与光速的比，即

$$k(1+e\cos v)$$

式内设

$$k=\frac{na}{c\sqrt{1-e^2}}$$

这叫做*光行差常数*. 设以⊙与 ϖ 分别表示太阳与其近地点的黄经，则

$$\odot_{视}=\odot_{真}-k[1+e\cos(\odot-\varpi)]$$

太阳的赤经也应加上同样的改正值. 下章内所说的"太阳时"便是对视太阳而言. 至于与偏心率有关的项，它出现在"时差"内，但改变了符号.

我们利用下列的数据来计算 k:

$$n=3458''.19 \qquad e=0.0167301(1950) \qquad c=299792 \text{ 公里/秒}$$

还须决定 a; 这是第八章内要详细讨论的. 设 ϖ_0 表太阳的地平视差，R 表地球的赤道半径，则

$$a=R/\sin\varpi_0$$

因 ϖ_0 的最新决定值有不同的结果，我们根据这个常数的两个数值来计算 τ 与 k:

ϖ_0	τ	k
8″.79	499ˢ.27	20″.506 = 1ˢ.367
8.80	498ˢ.70	20″.483 = 1ˢ.365

自 1896 年以来，计算天文年历所用的 $k=20''.47$; 这是根据当时采取的光速的数值而决定

的. 一年内太阳的光行差的两个极端值为

$$k(1+e)=20''.83,\ (1月2日)\qquad k(1-e)=20''.14,\ (7月2日)$$

周年项的系数 ke 为 $0''.343$ 或 $0''.023$.

我们不能根据太阳的观测去决定 k, 但可从黄道星的视向速度的年变化的测量, 而得出这个数值. 因在恒星光谱里所选出的谱线的波长, 在西方照时为 $\lambda-\Delta\lambda$, 在东方照时为 $\lambda+\Delta\lambda$, 据多普勒效应, 得以下的等式

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{v}{c}=k,$$

这结果乘以 206265 便表为角秒. 我们还可用不太直接但却更可靠的方法, 从行星的视向速度去推算 k. 这方法应用于金星, 得出的结果: $k=20''.514$(B.Guinot, 1958).

§53 恒星光行差概论

光行差是相对运动的一种光学效应, 确切一些地说, 是速度的光学效应, 它不只表现于太阳上. 罗梅尔与其同时代人好像已经了解到这一点. 我们现在陈述对匀速直线运动最简单情形的理论于下:

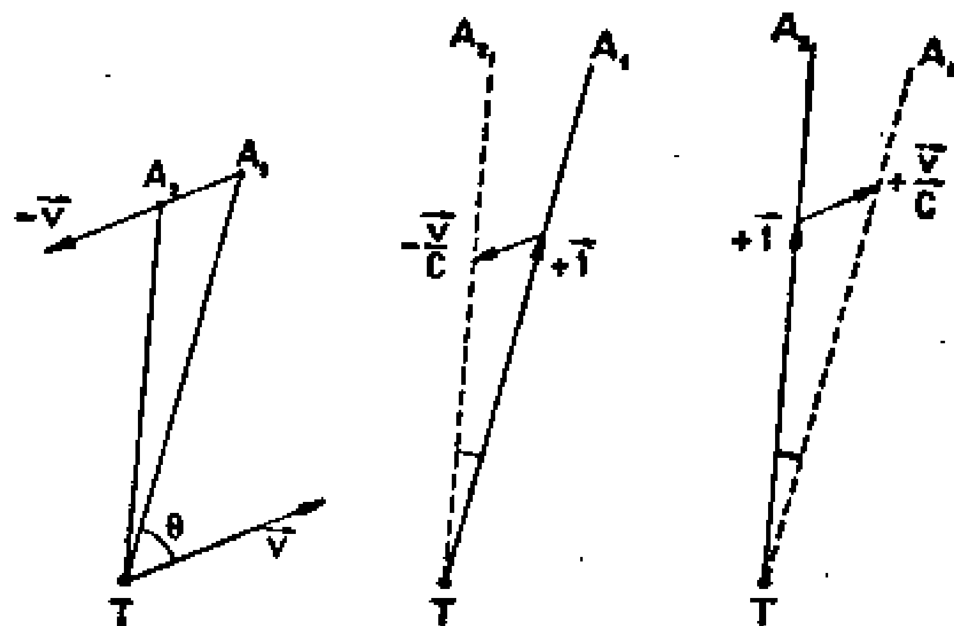


图 67

设 T 表地球(图 67 左), A_1 表所观测的恒星, $\boldsymbol{v}$ 表地球对于恒星的速度, θ 表 $\boldsymbol{v}$ 与 TA_1 间的角.

星在 A_1 时发出的光, 经过时间 $\tau=A_1T:c$ 达到地球, 这颗星对于地球的速度为 $-\boldsymbol{v}$, 星在 A_1 发出的光到达地球之时, 它已运动到 A_2. 星的几何方向既然是 TA_2, 而视方向是 TA_1; 于是光行差在此可以表为

$$\sin A_2TA_1=\sin\theta\frac{A_1A_2}{TA_1}=\frac{v}{c}\sin\theta$$

若已知相对速度, 我们可用以下的作图法, 将视位置转换到几何位置: 在视方向上取一单位向量, 再与向量 $-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c}$ 组合, 其合向量便指向几何位置(图 67, 中).

相对性原理发现以前, 人们讲授运动物体的光学, 常使用作反方向的图解法: 在设为已知的几何位置的方向上, 取一单位向量; 再与向量 $+\dfrac{\boldsymbol{v}}{c}$ 组合, 便得视方向(图 67, 右). 读者不难证明, 这两种作图法在欧几里德几何学上是不相同的; 但是在这两个情形里, 对于光行差角所得的数值之差是很小的, 其数量级为 $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2$. 因此, 我们无差别地使用这两种作图法, 而且第二法比第一法还更常用[1].

若星的距离遥远, 以致它的速度在随时间的进程中仍然不会使其几何方向改变, 那

1) 就一阶项言, 这两种光学提供的光行差, 数值是相同的. 我们在此可以回忆迈克耳孙与莫雷做过的具有高灵敏度的干涉实验, 以期表明旧理论所预见的二阶项. 实验的结果是负的(1887). 于是爱因斯坦根据这个结果, 终于发现了相对性原理(1905).

么，它的视方向也不改变．若相对速度的大小或方向有变化，情况便不是这样了；视位置对于几何位置发生移动，于是这现象便可以被观测到．我们暂且肯定以上的公式仍然有效，这时 v 表示观测者在观测时的瞬间速度．

§54 长期光行差

设观测者 T 对于恒星群体作匀速 v 的直线运动．试在恒星 $A, B, C, \cdots$ 的几何方向上，从 T 点取一个单位向量(图 68)，然后在这些线段的末端作向量 $+\frac{v}{c}$；于是这些合成向量的末端 $A', B', C'\cdots$ 皆在半径为 1 的球上，其中心便是向量 $\frac{v}{c}$ 的末端 V，而 T 是这向量的原点．

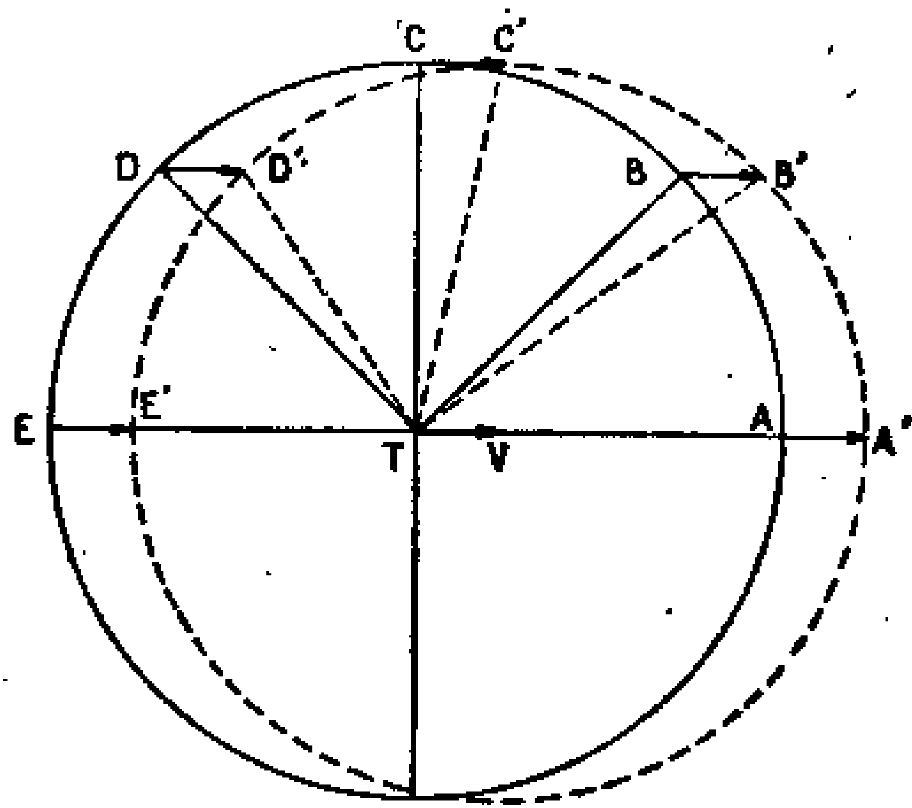


图 68

由此可见，一切视位置比其几何位置更接近于向点 A(速度方向所指之点叫做向点)．若恒星的几何分布是均匀的，其视分布则不是均匀的：以向点为极的半球上的星要比另一半球多．若速度 v 之值是光速的相当大的一个分数，那么，恒星好像在向点方向集中，而背点方向的星便显稀疏了．

太阳与其行星系对于近的恒星有一种平移运动，其速度为 20 公里/秒，向点在武仙座内．对应的光行差常数 v/c 只有 $14''$．这对于恒星在天球上的视分布没有显著的影响；由于每颗星的光行差在方向与大小上是没有变化的，因而它不能直接由观测去验证出来．

§55 恒星的周年光行差

地球在轨道上运行的速度变化很少，而方向的变化在黄道上一年转动一周．这样便表现出我们所觉察的周年光行差．

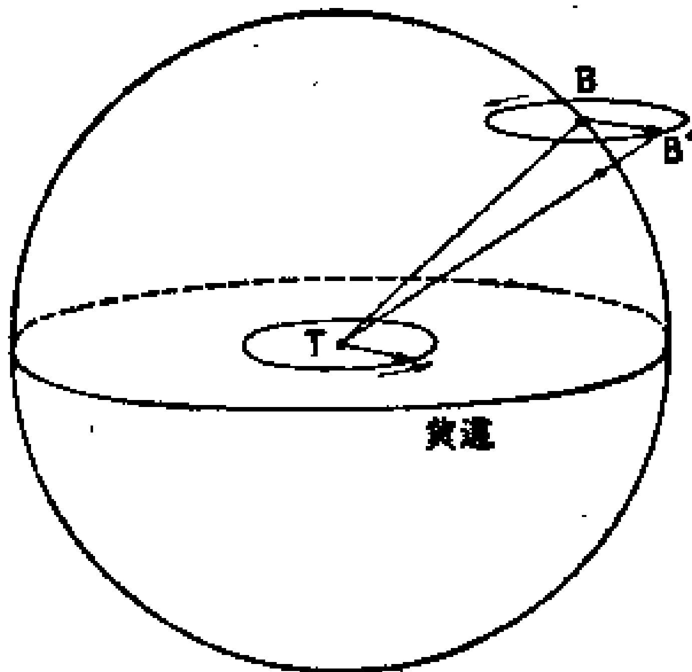


图 69

暂时略去轨道的偏心率；速度 v 的值等于 na，而其方向与地-日向径成 $-90°$ 的角，所以向点的黄经为 $\odot-90°$．

于是对于黄道坐标为 l 与 b 的恒星 B(图 69)，应用前节的作图法．由 B 所作的向量 $\frac{na}{c}$ 的末端 B'，于一年内绕过以 B 为中心而与黄道平行的一个圆周．表示视方向的直线 TB' 便是以 T 为顶点、B' 所划的圆周为底圆所作成的圆锥的母线．对于观测者 T，恒星 B 的视位置于一年内在天球上好像绕过一个椭圆，这椭圆即 B' 所作之圆在天球上的投影，它叫做*周年光行差椭圆*，其长轴是与黄

道面平行的.

若星在西方照，它的视位置将重合在椭圆短轴接近黄道面的顶点；向量$-\frac{v}{c}$指向天球的外面(图 70). 另一顶点则与东方照对应. 长轴的两个顶点分别在冲(东顶点)与合(西顶点)时达到. 图 70 表示地上观测者所看见的光行差椭圆. 至于描成这椭圆的方向则与黄纬的符号有关.

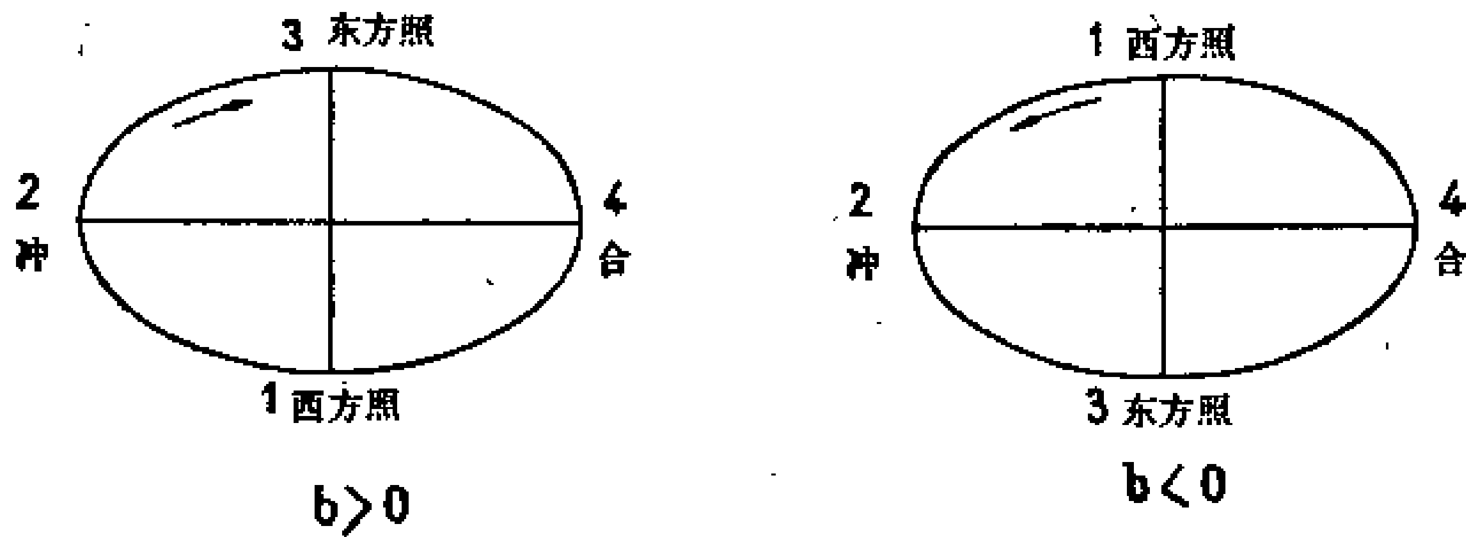


图 70

周年光行差常数是椭圆的半长轴，以弧度计，等于 $v/c=k$; 即以上(§ 52)对于太阳求得的光行差. 至于半短轴，数值为 $k\sin b$; 因此黄道上的星在黄道上 $2k$ 长的线段内按正弦规律而运动，而在黄极的星每年在以 k 为半径的小圆上运动.

现在引入地球轨道的偏心率.运动的速端曲线还是一个圆，但其半径等于$na/\sqrt{1-e^2}$. 因此，常数 k 的确切值是对太阳的情形所计算得的：

$$k=\frac{na}{c\sqrt{1-e^2}}$$

速端曲线的中心不与绘这曲线的极点相合(见图 108)，而在与近地点循逆向(或与近日点循正向)正交的直线上面、距离为 kec 处的一点. 对于速度的这一不变的分量，有一不变的光行差，其常数等于 $ke=0''.343$，指向黄道上黄经为 $\varpi-90^\circ$ 之点(ϖ 表太阳的近地点的黄经).

在上面，我们是假设太阳的中心与太阳系的质量中心重合. 对于邻近恒星，质心以直线匀速运动，而太阳的中心，以每秒 15 米的速度绕质量中心作环状轨迹运行. 在需要高精度场合，必须计入相应的光行差. 自 1960 年起，有的天文年历中已经施行.

北极星(小熊座 α 星)的光行差已经早为巴黎天文台的皮卡尔(Picard)预测其存在，但 1684 年他死去后，他对这一研究的观测计划，没有人继续进行. 1726 年布拉德勒从事天棓四(天龙座 γ 星)的视差的测定，发现这颗星有一种周年性的位移，但却与他所期待的结果很不相同. 这颗星由视差而生的位移，赤纬应在合与冲时为极大(见第八章)；布拉德勒所观测到的光行差，赤纬却在方照时为极大；这时天龙座 γ 星的赤纬离开它的平均位置达 20″ 之多. 由于这颗星接近黄极(1950.0：$17^h55^m26^s.6$, $+51^\circ29'39''$)，光行差椭圆与圆相差很少. 布拉德勒注意到这种恒星光行差与太阳光行差有相同的数值，他很快就得到他所发见的现象的解释. 至于天龙座 γ 星的周年视差太小，不是布拉德勒所掌握的方法所能探测得出的. 图 71 表示天龙座 γ 星在黄白交点转动一周期内视坐标的变化. 从图内不难分辨出岁差(这里因接近黄极面减少)、章动与光行差三种效应；后一效应表现在曲线

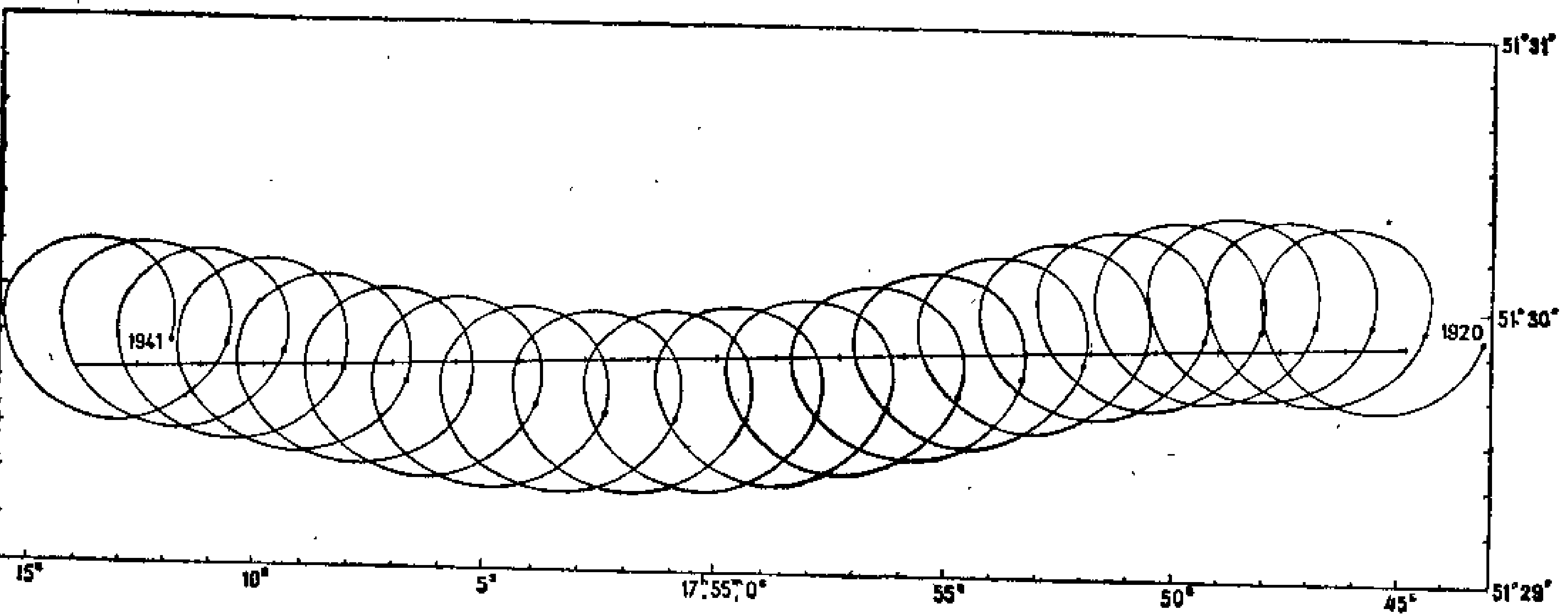


图 71

的周年环圈上，前两效应由于参照系的移动而来，但后一效应则是一种视位移．平位置的轨迹以实线表达，差不多是直线的．至于每一回归年开始时的视位置以圆点表示．这些点绘出的曲线呈正弦式的曲线，这是章动的表现．

布拉德勒的方法，可以不根据地球轨道的大小(天文单位)与光速，而测定常数 k. H. R. 摩根(Morgan)由拱极星 4000 个赤纬观测的讨论得出

$$k=20''.479$$

由普尔科沃天文台为决定纬度变化而作的天顶距观测所给出的

$$k=20''.512$$

这两个数值都未消掉系统差．分光方法似更可靠，但由这方法推出的 k 值(§ 52)，其所根据的观测资料还不够多．

光行差使恒星之间的角距离改变，这样便使光行差的效应与岁差和章动的效应分开；后两效应虽然也改变恒星的视坐标，但却不改变它们的相对位置．因此有人由适当选择的"星对"的角距离作周年的测量，而决定常数 k. 不幸，蒙气差也改变恒星间的角距离，故在观测的归算上，便有了两个未知数(光行差常数与蒙气差常数)的方程式．但要同时测定两个不能分开的常数总是不利的．这句话也可用在根据天顶距观测来求纬度变化与光行差常数这两方面上；所以我们说，这些方法不能避免系统误差．

§ 56 视位置的黄道坐标的计算

这节讨论已知恒星的真坐标，计算同一时期的视坐标，或其逆问题．

设 E 表黄道(图 72)，♈表春分点，X 表一颗恒星，其真坐标为 l 与 b. 地球在轨道上运动的向点，照以上的说明，是黄道上一点 V，其黄经等于太阳的黄经减 90°. 若考虑轨道的偏心率，这一命题仍然有效．在现在情形下，我们只保留公转速度与向径正交的分量．因 VX 弧等于 θ，光行差 XX' 之值为

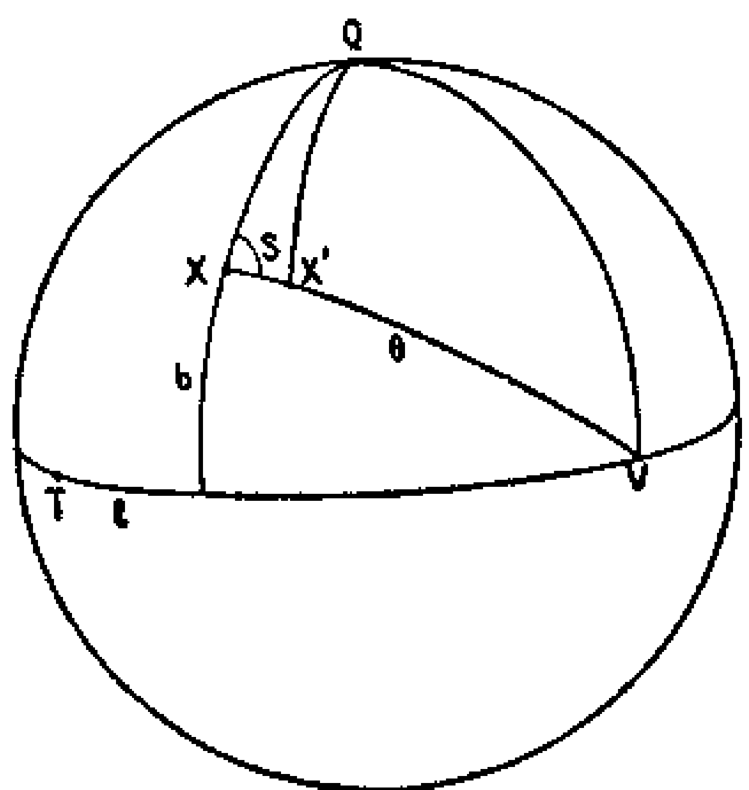


图 72

$$XX'=k\sin\theta$$

正如我们在 § 53 里所求得的．X' 点比 X 点更和 V 点接近．设视坐标，即 X' 点的坐标，为 l' 与 b'，令

$$\Delta l=l'-l \qquad \Delta b=b'-b$$

§ 11 里的公式应用在这里，就是求 X' 对于 X 的较差坐标；令 S 表 QXX' 三角形在 X 点的角，则

$$\left.\begin{aligned}\cos b\Delta l=XX'\sin S=k\sin\theta\sin S\\ \Delta b=XX'\cos S=k\sin\theta\cos S\end{aligned}\right\},$$

但对 VQX 三角形，可以写出如下的关系式：

$$\sin\theta\sin S=\sin\angle XQV=\sin(\odot-90^\circ-l)=-\cos(\odot-l)$$

$$\sin\theta\cos S=-\cos QX\cos\angle XQV=-\sin b\cos(\odot-90^\circ-l)=-\sin b\sin(\odot-l)$$

如以 x, y 表真位置对于视位置的直线坐标，它们便为以下的关系式所给出：

$$\left.\begin{aligned} x = \cos b\Delta l &= -k\cos(\odot - l) \\ y = \quad \Delta b &= -k\sin b\sin(\odot - l) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

这是半轴为 k 与 $k\sin b$ 的椭圆的参量方程式.

若将偏心率引入这些表达式，则必须注意与略去的*速度分量相当的向点的黄经为 $\varpi - 90°$(因近地点的地心黄经为 ϖ). 故在关系式(1)里以 ϖ 代$\odot$以 ke 代 k, 便得对应的项为

$$\left.\begin{aligned} x = \cos b\Delta l &= -k[\cos(\odot - l) + e\cos(\varpi - l)] \\ y = \quad \Delta b &= -k\sin b[\sin(\odot - l) + e\sin(\varpi - l)] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

观测得的椭圆中心的较差坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -ke\cos(\varpi - l) \\ y_0 &= -ke\sin b\sin(\varpi - l) \end{aligned}\right\}$$

这中心是不与恒星的几何位置相重合的(图 73).

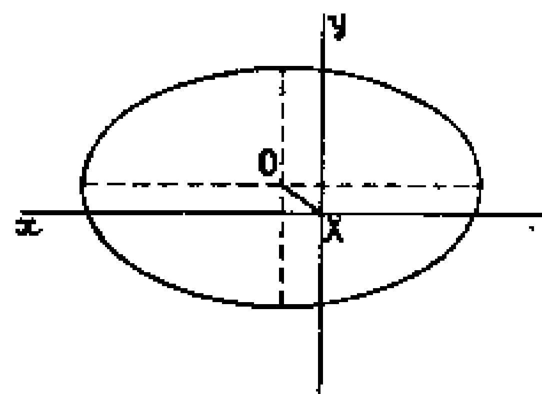


图 73

§ 57 视位置的赤道坐标的计算

象前节那样首先暂时略去偏心率.

设 X 星的真坐标为 α 与 δ, 其视位置 X' 的视坐标为 α' 与 δ'. V 点的坐标(图 74)与黄道上黄经为 $\odot - 90°$ 的一点的坐标相同；若将其表为 a 与 d, 则

$$\left.\begin{aligned} \tan a &= -\cos\varepsilon\cot\odot \\ \sin d &= -\sin\varepsilon\cos\odot \\ \cos d &= \sin\odot\sec a \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

从 S 表 VXP 角, 且令

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$$

$$\Delta\delta = \delta' - \delta$$

§ 11 里的公式在这里可以写为

$$\cos\delta\Delta\alpha = XX'\sin S = k\sin\theta\sin S$$

$$\Delta\delta = XX'\cos S = k\sin\theta\cos S$$

式内 $\qquad \theta = XV \qquad S = \angle PXV$

图 74

VXP 三角形的元素之间有如下的关系:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\sin S &= \cos d\sin(a - \alpha) \\ \sin\theta\cos S &= \sin d\cos\delta - \cos d\sin\delta\cos(a - \alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

将(2)式展开, 并用(1)式加以简化, 不难得着给出视位置对于真位置的直线坐标 ξ 与 η:

$$\left.\begin{aligned} \xi = \cos\delta\Delta\alpha &= -k[\sin\alpha\sin\odot + \cos\varepsilon\cos\alpha\cos\odot] \\ \eta = \quad \Delta\delta &= -k[\sin\varepsilon\cos\delta\cos\odot + \cos\alpha\sin\delta\sin\odot - \cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta\cos\odot] \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

现在介入偏心率. 如前节末尾给出的与地球速度分量 kec 相当的光行差常数的公式,

---

* 此略去之项，即指与拱线正交的速度分量 $\frac{ena}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos v)$. 在简化为圆轨道情况下，此项略去；但在讨论地球椭圆运动对光行差影响时，则必须计入——译者注

它们从有关光行差变化部分的公式推出，是将太阳近地点的黄经代替太阳的黄经，且以 e 乘各项．令

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 = \cos\delta\, d\alpha &= -ke[\sin\alpha\sin\varpi + \cos\varepsilon\cos\alpha\cos\varpi]\\ \eta_0 = \quad d\delta &= -ke[\sin\varepsilon\cos\delta\cos\varpi + \cos\alpha\sin\delta\sin\varpi - \cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta\cos\varpi]\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

将 $d\alpha$ 与 $d\delta$ 分别加在 $\Delta\alpha$ 与 $\Delta\delta$ 上，便得周年光行差的完全表达式．

天文工作者进行归算时，一向就不计算 $d\alpha$ 与 $d\delta$；1938 年国际天文协会正式认可这个做法． 由观测而得的一颗星的视位置，只须用(3)式里所给出的光行差的变化部分来改正；自然，改正后的位置不是几何位置，它与几何位置之差是(4)式所表达的光行差的常数部分，即光行差椭圆的中心． 相同的注释也应用在平位置特别是在星表所载的位置． 于是发生一个有利之点，即解决逆问题：已知星表所载的坐标求视坐标时，便不须计算(4)式了．

还须注意黄经 ϖ 不是常数．对于固定的平春分点，ϖ 现时每年增长 $11''.63$(§61)，这样它的恒星周期为 110,000 年． 设在这周期里偏心率不变，光行差椭圆的中心走了一个椭圆，其半长轴平行于黄道，等于 ke，半短轴等于 $ke\sin b$． 但是偏心率是变化的，它现时在损缩中，与 e 有关之项按复杂的规律变化． 容易校核光行差椭圆的中心在一千年间的位移不超过 $0''.02$． 这样小的位移，一般是略去的；也许在恒星自行的系统研究里，当精度增高时是须考虑的．

一颗星对于他颗星的较差坐标，也因光行差而有变化． 所谓*较差光行差*是视较差坐标与真较差坐标之间的差异． 由于很少使用的原故，我们不在这里写出较差光行差的表达式，但是它们很容易由公式(3)推出，这些改正数等于坐标 ξ 和 η 的增量(当我们给与 α 和 δ 以等于第一颗星对于第二颗星较差坐标的增量之时)．

§58 归算到当天

在这一章及四、五两章内，我们推出了将一颗星在一给定期的平位置转化到另一时期的视位置(或其逆问题)所需的一切公式． 我们将这些结果汇总在这里，为计算简便起见，设计出应遵循的步骤如下：

首先，设在某一星表里取出一颗星对于某年 1 月 0 的平坐标，我们将其作自该年 1 月 0 至要得出视坐标的那一天的岁差改正，这是在 §45 与 §46 内已经讨论过的问题． 做了这一计算之后，再考虑这颗星的自行(如果已经知道的话)，便得出对于年首的平坐标 α_m 与 δ_m^*．

其次，还须将 α_m 与 δ_m 顺次先改为给定当天的真坐标，然后改为视坐标；计有以下四个步骤：

1．从 1 月 0 到所规定历元的岁差改正；

2．章动的改正；

3．光行差的改正；

4．有时还须作自行的改正．

所谓*归算到当天*便是前三种改正的总和． 其表达式可由 §45 与 §51 以及前节的(3)

* 更准确地说，是对于年首的观测当天平坐标——译者注

式而求得

$$\Delta\alpha=(m+n\sin\alpha\tan\delta)t+N(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)-\Omega\cos\alpha\tan\delta$$
$$-k\sec\delta(\sin\alpha\sin\odot+\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\odot)$$
$$\Delta\delta=nt\cos\alpha+N\sin\varepsilon\cos\alpha+\Omega\sin\alpha$$
$$-k(\sin\varepsilon\cos\delta\cos\odot+\cos\alpha\sin\delta\sin\odot-\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta\cos\odot)$$

在这两式里，t 表示自 1 月 0 所经历的时间，即从太阳的平黄经为280°之时(见 § 61)起算到给定日期的时间．由于这些改正项都很小(对于赤极附近的星，某些不是很小的项除外)，我们可用平坐标或视坐标去计算这些项．因此，以上的公式可用以作双向的转换．时间 t(表为回归年的分数)的计算可利用本书后面的表 IX 与 X.

天文年历里提供一些数字表，以便利归算到当天的计算．按照白塞耳的符号，设

$A=t+\frac{N}{n}\sin\varepsilon$	$a=m+n\sin\alpha\tan\delta$	$a'=n\cos\alpha$
$B=-\Omega$	$b=\cos\alpha\tan\delta$	$b'=-\sin\alpha$
$C=-k\cos\varepsilon\cos\odot$	$c=\cos\alpha\sec\delta$	$c'=\tan\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta$
$D=-k\sin\odot$	$d=\sin\alpha\sec\delta$	$d'=\cos\alpha\sin\delta$
$E=N\left(\cos\varepsilon-\frac{m}{n}\sin\varepsilon\right)$		

容易校验有下列两式：

$$\Delta\alpha=Aa+Bb+Cc+Cd+E$$
$$\Delta\delta=Aa'+Bb'+Cc'+Dd'$$

白塞耳日数 A, B, C, D 和 E 与恒星的位置无关，可以对于近似的时期刊布在天文年历里，事实上是以格林尼治每日的 0 时为准[1]．其他的量，如 a, $b\cdots$, a', $b'\cdots$皆与恒星有关；由于岁差的原故，它们随时间很缓慢地变化．如果星不是太接近赤极，在一段相当长的时间内，我们可将这些量看为常数．有些星表在平坐标与岁差的要素后面，还载有这些量．

按习惯，章动的月亮项 dN 与 $d\omega$ 作另外处理：或在白塞耳日数 A 与 B 上加入年历里所给出的 A' 与 B' 两改正项[2](E 量一般很小，无改正的必要)，或用下列公式计算：

$$d\alpha=JdN+Kd\omega$$
$$d\delta=J'dN+K'd\omega$$

式内 dN 与 $d\omega$ 是章动的短周期项，表示为角秒，J, K, J' 与 K' 等量代表以下四式的值，年历里载有它们对于每颗基本星(非拱极星)的数值：

$$J=\frac{1^s}{15''}(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\tan\delta\sin\alpha)\qquad J'=\sin\varepsilon\cos\alpha$$

$$K=-\frac{1^s}{15''}\tan\delta\cos\alpha\qquad K'=\sin\alpha.$$

完全的改正数是

$$\Delta\alpha+d\alpha$$
$$\Delta\delta+d\delta$$

1) 我国的天文年历所给出的白塞耳日数是对于每天历书时(见 §65)0^h 与每天恒星时 0^h 两种数值——译者注

2) 我国天文年历所给出的有 $A+A'$, $B+B'$, A', B' 四种数值——译者注

为校验由计算所得的结果，比较好的办法是使用不同的公式再计算一次．天文年历里除了白塞耳日数之外，还有另一套数字（独立日数），可用以作归算到当天的计算．如下的方式组合 $\Delta\alpha$ 与 $\Delta\delta$ 内的各项：

$$\Delta\alpha = mt + N\cos\varepsilon + [(nt + N\sin\varepsilon)\sin\alpha - \Omega\cos\alpha]\tan\delta$$
$$- k\sec\delta[\sin\alpha\sin\odot + \cos\alpha\cos\varepsilon\cos\odot]$$
$$\Delta\delta = [(nt + N\sin\varepsilon)\cos\alpha + \Omega\sin\alpha]$$
$$- k\sin\delta[\cos\alpha\sin\odot - \sin\alpha\cos\varepsilon\cos\odot] - k\sin\varepsilon\cos\odot\cos\delta$$

令

$$f = mt + N\cos\varepsilon$$
$$g\sin G = -\Omega$$
$$g\cos G = nt + N\sin\varepsilon$$
$$h\sin H = -k\cos\varepsilon\cos\odot$$
$$h\cos H = -k\sin\odot$$
$$i = -k\sin\varepsilon\cos\odot$$

以上两式便可写为

$$\Delta\alpha = f + g\sin(G+\alpha)\tan\delta + h\sin(H+\alpha)\sec\delta$$
$$\Delta\delta = g\cos(G+\alpha) + h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta$$

对于短周期项，同样会

$$f' = dN\cos\varepsilon$$
$$g'\sin G' = -d\Omega$$
$$g'\cos G' = dN\sin\varepsilon$$

则有

$$d\alpha = f' + g'\sin(G'+\alpha)\tan\delta$$
$$d\delta = g'\cos(G'+\alpha)$$

天文年历载有 f, g, h, i, f' 和 g' 等量以及 G, H 和 G' 等角每天的数值．

白塞耳公式在编制基本恒星的星历表时，使用比较方便（只是 A, B, C, D, E 等量随日改变）．若只作个别恒星的计算，则用独立日数 f, g, h 等比较迅速．

例 1 求将勾陈三（小熊座 ε 星）归算到 1937 年 1 月 1 日 0 时当天的视坐标．已知其对 1 月 0 的平坐标为（§ 45）

$$\alpha_m = 16^h52^m21^s.032 \qquad \delta_m = +82°8'38''.05$$

先按归算到当天所须经历的步骤分别计算：

(1) 回归年 1937 比民用年早 0.225 日开始，因此以回归年计：

$$t = 0.00063\ 年$$

周年岁差的值为

$$-6^s.19 \qquad -5''.83$$

故对于时间 t 为

$$-0^s.004 \qquad 0''.00$$

(2) 包括短周期项的章动，已经求得为（§ 51）

$$-2^s.393 \qquad -0''.71$$

(3) 计算光行差：

$$k = 20''.47 = 1^s.365$$
$$k\cos\varepsilon = 18''.78 = 1^s.252$$
$$k\sin\varepsilon = 8''.14 = 0^s.543$$

从平坐标出发得

$$\sin\alpha=-0.9568 \qquad \sin\delta=0.9906$$

$$\cos\alpha=-0.2909 \qquad \cos\delta=0.1367$$

$$\sec\delta=7.316$$

最后，天文年历给出

$$\odot=280°10'32''$$

因而 $\sin\odot=-0.9843 \qquad \cos\odot=0.1767$

将这些数据代入 § 57 里的公式(3)，容易求得所需要的光行差为

$$-8^{s}.933 \qquad -9''.15$$

(4) 归算到当天，便是须将以上计算得之量取代数和，即

$$\Delta\alpha=-0^{s}.004-2^{s}.393-8^{s}.933=-11^{s}.33$$

$$\Delta\delta=-0''.71-9''.15=-9''.86$$

故视坐标为 $\alpha_{视}=16^{h}52^{m}9^{s}.70$

$$\delta_{视}=+82°8'28''.19$$

这正是年历里这颗拱极星在格林尼治上中天的视位置，在 0 时的内插值。

例 2 用白塞耳日数解相同的问题．在年历星立刻找出

$$A+A'=0''.3503+0''.0047=0''.3550$$

$$B+B'=1''.48-0''.06=1''.42$$

$$C=-3''.32$$

$$D=20''.15$$

$$E=0^{s}.003$$

由与恒星有关之量算出以下的数字：

$$\sin\delta=0.9906 \qquad m=3^{s}.0730$$

$$\cos\delta=0.1367 \qquad n=1^{s}.3362=20''.043$$

$$\tan\delta=7.247 \qquad \sin\alpha=-0.9568$$

$$\sec\delta=7.316 \qquad \cos\alpha=-0.2909$$

$$\tan\varepsilon=0.4338$$

右下表内以 15 除 b, c 与 d，将其与之对应的乘积化为时秒：

$$a=-6^{s}.193 \qquad a'=-5''.831$$

$$\frac{1}{15}b=-0^{s}.140 \qquad b'=+0''.957$$

$$\frac{1}{15}c=-0^{s}.142 \qquad c'=+1''.007$$

$$\frac{1}{15}d=-0^{s}.467 \qquad d'=-0''.288$$

于是为归算到当天得出下列的数值：

$$\Delta\alpha+d\alpha=-2^{s}.199-0^{s}.199+0^{s}.471-9^{s}.410+0^{s}.003=-11^{s}.33$$

$$\Delta\delta+d\delta=-2''.070+1''.359-3''.343-5''.803=-9''.86$$

结果完全与以上相合．

例 3 用含独立日数 f, g, h, i 等的公式，解相同的问题．

由天文年历取出以下的数据:

$f=+1^s.079$

$g=0^s.4784=7''.18 \qquad G=0^h47^m.6$

$h=1^s.3615=20''.42 \qquad H=23^h22^m.6$

$i=-1''.44 \qquad G'=22^h.0$

$f'=0^s.015$

$g'=0^s.0073=0''.11$

$G+\alpha=17^h40^m.0 \qquad H+\alpha=16^h15^m.0 \qquad \tan\delta=7.247$

$\sin(G+\alpha)=-0.9962 \qquad \sin(H+\alpha)=-0.8969 \qquad \sin\delta=0.9906$

$\cos(G+\alpha)=-0.0872 \qquad \cos(H+\alpha)=-0.4423 \qquad \cos\delta=0.1367$

$\sec\delta=7.316$

$G'+\alpha=14^h.9$

$\sin(G'+\alpha)=-0.69$

$\cos(G'+\alpha)=-0.72$

$\Delta\alpha+d\alpha=1^s.079-3^s.454-8^s.934+0^s.015-0^s.037=-11^s.33$

$\Delta\delta+d\delta=-0''.626-8''.947-0''.197-0''.080=-9''.85$

§59 周日光行差

另外一种不可忽略的光行差,是由于地球的自转运动而来,称为周日光行差. 地球赤道上一点的自转速度为

$$v_0=\frac{2\pi R}{86164}=0.4651\text{ 公里/秒}$$

在纬度 φ 处这速度为

$$v=v_0\cos\varphi$$

对应的光行差常数之值为

$$\varkappa=0''.320\cos\varphi=0^s.0213\cos\varphi$$

周日自转运动的向点是地平上的东点,因而它的时角坐标为

$$H=18^h \qquad \delta=0$$

按照§57的方法,容易算出天球上任何一点的周日光行差;现在只将这计算的结果列出

$$\Delta\alpha=\varkappa\cos H\sec\delta$$
$$\Delta\delta=\varkappa\sin H\sin\delta$$

这两个公式很少用于子午圈之外的观测;在子午圈上时,

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\alpha=\varkappa\sec\delta\\ \Delta\delta=0\end{array}\right\}\quad H=0$$

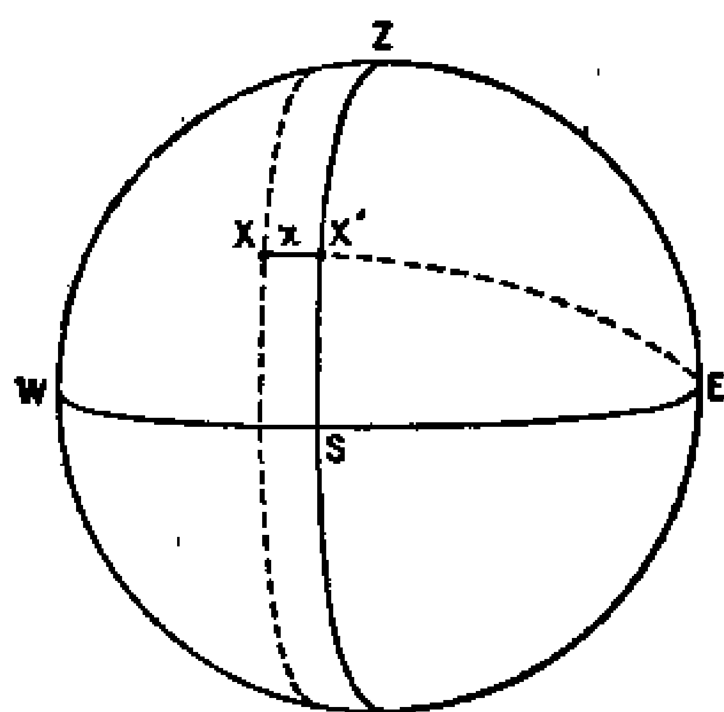


图 75

当视位置 X' 在子午圈上时,则假设不受周日光行差影响的位置 X 已过子午圈(图 75),而在距离这大圆 $\varkappa$ 处. 用子午仪观测的人常在中天的时刻上加一个 $c\sec\delta$ 这样形式的改正值,c 表示望远镜的

准直差(是一种仪器差)．要将周日光行差考虑进去，只须在准直差 c 上减去常数 $\varkappa$．故改正值对于上中天为

$$(c-\varkappa)\sec\delta$$

对于下中天将这改正数改号使用．

§60 行星光行差

设 T 表示地球(图 76 左)，$\boldsymbol{V}$ 表示它绕太阳公转的速度，P 表示行星或彗星，$\boldsymbol{V}'$ 表示它的公转速度．最后设 C 表示行星对于地球的相对轨道(图 76 右)，$\boldsymbol{v}$ 表示行星在其轨道上的速度，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}'-\boldsymbol{V}$$

在某一给定时刻，光源的几何位置在 P_1 时所发出的光，到达观测者 T 时，光源已转移到 P_2．光在时间 τ 内经过行星的地心距离 Δ，故

$$\tau=498^s.7\Delta=0^d.005771\Delta$$

(Δ 以天文单位表示)．

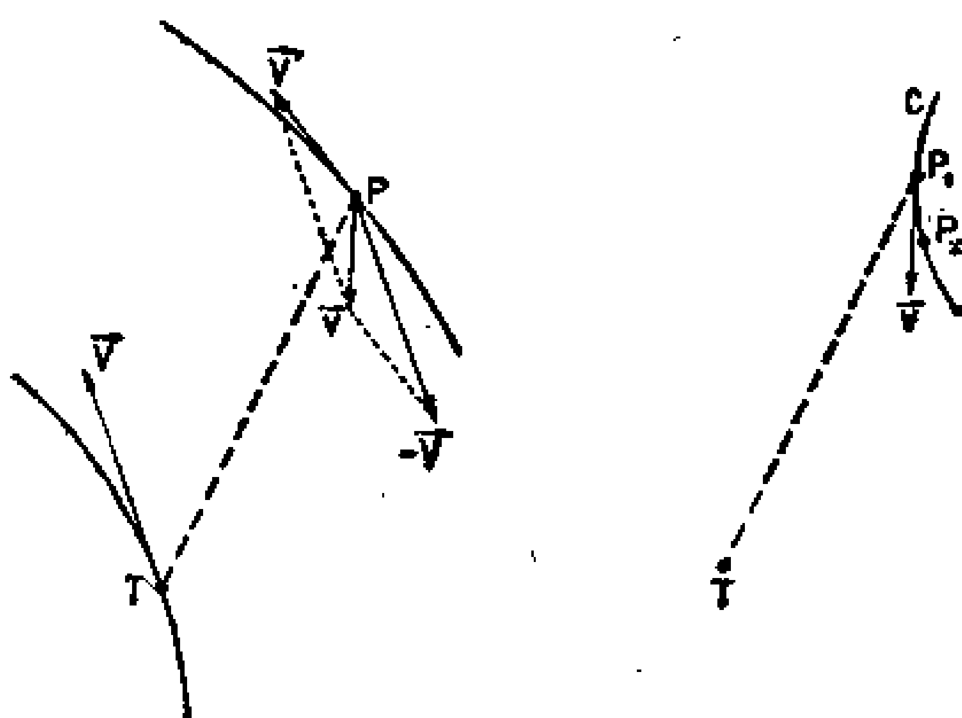


图 76

我们可以说，t 时行星的地心位置与 $t-\tau$ 时它的几何位置相合；换句话说，它的视方向与 $t-\tau$ 时联接地球和行星的直线的方向相合．

如果要编制行星的星历表，以比较观测和计算的结果，我们可从表内取出 $t-\tau$ 时地球与行星的日心位置，由此推出的地心位置将是 t 时的视位置．这样，我们可以计算 t 时的几何坐标或真坐标以及这些坐标对于时间的导数，于是

$$\alpha_{视}=\alpha_{真}-\tau\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\delta_{视}=\delta_{真}-\tau\frac{d\delta}{dt}$$

这里好象不须引入 §55 与 §57 所研究过的恒星光行差的改正．但是为便利计，我们常从观测所提供的行星与彗星的视坐标里减去对于恒星归算到当天的改正值，而这一改正值里包含有周年光行差的变化部分．这样改正后的位置有什么几何学上的意义呢？

由于这一改正值抵消速度为 $\boldsymbol{V}$ 的地球运动的光学效应，改正后的方向归属于 t 时地球的位置．但是由于速度为 $\boldsymbol{V}'$ 的行星公转的效应没有被抵消，因而改正后的方向是联接 t 时地球的位置与 $t-\tau$ 时行星的几何位置的直线方向．故这里不再属于同时的几何位置的问题了．

以上这些解释为星历表的计算提供第三个方法：我们将 t 时地球的日心位置和 $t-\tau$ 时行星坐标联系；我们再在这上面加入恒星的周年光行差，转化为地心视坐标．

因此，行星或彗星的视位置加以归算到当天的计算(即自 1 月 0 日的岁差、章动与恒星的光行差)，合适地命名为它的平位置．正如刚才所说过的，相应的方向不属于地球与行

星同时的位置.

在十一章内,我们还要讨论行星和彗星的平坐标的测定,这里只对这问题作一些概括的说明,以便对于要讲的一个特殊情形有所了解. 设如在照像底片上作测量,我们选择一些已经知道的某一时期的平位置的恒星,作为定标星. 星像的位置的测微计的测量,直接提供(而不须任何改正)行星或彗星对于同一春分点的平位置, 这里所采取的归算方式消去了较差光行差与蒙气差. 但求得的位置属于定标星的位置, 而后者是受了光行差常数项的影响的. 因此,我们还应当将这样求得的行星或彗星的平位置加以改正.

反过来说, 设如我们要计算行星的星历表, 去与照像观测作直接的比较, 便应当将与偏心率有关的光行差加在天体力学所提供的几何方向上去. 所谓天体测量坐标, 便是经过这样改正以后而属于一给定的固定平春分点的.

公式(4)给出与偏心率有关的光行差项(§57). 由于其数值很小, 常被略去不用, 但如果轨道的决定要求很精确的确定根数之时,便应当将它考虑进去.

第七章　时间与地球自转的变化

近三十年来，时间的概念受到深刻的改变，我们已经在导论的第二节里大略叙述过了．我们曾经说明，世界时的尺度就动力学的意义言，不是均匀的，这等于说，这一时间尺度不能用以对太阳系里的天体的运动作确切的研究．反之，利用这些运动倒可以决定一种时间尺度，以保证观测的位置与根据天体力学的理论所推出的位置，得到很好的相合．只有这种尺度才能描述月球与行星的运动．我们已经肯定，世界时的尺度被经典理论所未料到的地球（一向假设是不变形的刚体）自转之有差数所破坏．新的时间尺度，叫做历书时，提供一种与绝对时十分逼近的、实际可用的尺度．

本章前四节讨论地球自转的变化与其效应．为相互比较计，世界时与历书时各有其精确的定义[1]．时间的基本单位——秒，与历书时和回归年相联系．本章内对地球的自转作了详细的讨论之后，我们将叙述历书时的测定方法，然后计算平日、太阳、日、平恒星日与地球对于恒星的自转周期等，以及真恒星日上的短周期的差数．

最后一节，以简略地讨论历法作为结束．

§61　世界时，历书时，回归年与时间的基本单位

§2 里曾经讲过，天体的运动，其理论完备到足以编制一个高精度的星历表的，都可用以规定一种时间尺度．直到本世纪中叶，人们为决定时间尺度所采取的运动，是地球的自转，换句话说，即据基本星的观测以决定*恒星时*．在写出推导世界时的方程以前，我们先仔细研究下列两点：1．从此以后，我们应该区别*真恒星时*（真春分点的时角）与*平恒星时*（动的平春分点的时角），这两个角的差数是赤经上的章动 $N\cos\varepsilon$．2．由于世界时是一种民用时，我们将其减去 12 时，以化为所谓平时，而且我们不以平日（如在 §33 里那样），而以 36525 日的儒略世纪为单位，从 1900 年 1 月 0 日（即 1899 年 12 月 31 日）格林尼治平午开始去计算它．经过这样转换后的时刻，本章内概以 θ 表示．于是以日及其分数计，便有下式

$$\text{世界时}=1900\text{ 年 }1\text{ 月 }0.5+36525\,\theta$$

为了补充说明 §33 里所讲过的概念，我们再深入地加以讨论．将地球作为一个刚体而发展其自转的理论，并利用有关太阳的理论的某些常数，我们便可将格林尼治的平恒星日，表为 θ 的整幂级数，只须到二阶项便可使用几个世纪；这上面再加上章动 $N\cos\varepsilon$，便得真恒星时．由于改变了单位，T_1 的数值，这里与 §33 内不同：

$$T_m=T_0+T_1\theta+T_2\theta^2 \tag{1}$$

$$T_v=T_0+T_1\theta+T_2\theta^2+N\cos\varepsilon \tag{2}$$

对于基本星作中天与中天外的观测，可以求得一给定时刻的 T_v，方程(2)便提供对应的 θ，因而可以算出世界时．事实上，这方程之解，简化为天文年历里所刊布的格林尼治恒星时

1) 1952 年以前，历书时称为牛顿时．本书 §2 里还保留这个名称．

表的内插计算(参看 § 39).

在怎样的程度上，我们可以将这样决定的时刻 θ，当做是力学的均匀时呢？这决定于地球自转的均匀度，换句话说，决定于在怎样程度上地球可以比拟为完全不变形的刚体。为了解决这个问题，我们须掌握与地球自转无关的他种时间尺度．不久以前，我们用有关物理学的频率标准：氨钟、铯钟等，但自前几个世纪以至最近几年，天体的运动是我们唯一的标准．以下几节内将再回来讨论这个基本问题，我们要表明月球与水星的古代观测的重要性，以及对于现在的实际价值，但在讨论原则的这一节里，我们只举太阳的观测来作说明．

根据牛顿定律(第十章)，我们可将太阳的视平黄经写为如下的展开式，和恒星时一样，仅至二阶项而止：

$$L_0 = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \tag{3}$$

式内 t 表以儒略世纪计算的力学时，从 1900 年初 L_0 之值为 A_0 的瞬间开始计算．由于(2)与(3)两方程内的常数项 T_0 与 A_0 有相同的数值，t 与 θ 两尺度的原点彼此很接近，但据逻辑而言，绝不敢说它们是绝对密合的．这是我们需要核对的一点．

在 § 29 里我们曾经说明由子午环的观测求得太阳的赤纬之后，可以计算它的赤经 α_0．如果以 $\Sigma(P)$ 表示这赤经上的周期差(理论提供这些差的数字表达式)之和，因而我们可以计算 $\Sigma(P)$，于是可以求得

$$L_0 = \alpha_0 - \Sigma(P) \tag{4}$$

再据 L_0 之值解方程(3)便可得 t．这样求得的时间尺度与自转无关，称为历书时(TE)，这是 1952 年国际天文协会所采用的名词(以前叫做牛顿时)．据定义，t 的原点是 1900 年 1 月 0 日，历书时 12 时．

方程式(1)与(3)含蓄地规定了世界时与历书时建立的基础，前者在地球的自转与公转的理论上，后者只在公转的理论上．因此如果我们发现对于同一瞬间所得的 t 与 θ 的数值，除了观测的误差之外，还不是一致的，而且这偏离不能化为 t 的线性函数，这便表明地球的自转不是均匀的，亦即说明地球受到变形．于是我们不得不放弃世界时，而将历书时用作研究太阳系里天体运动的参照标准．原来天体运动是遵循动力学定律与牛顿定律的，以后还要说明这个时间尺度，用以研究水星、金星与月球(在一些保留下)在轨道上的运动，和对于地球一样的适宜．

天文学家曾经利用二千年来的日月食观测，来比较 t 和 θ 两种尺度，但这比较只在西欧大型天文台建立以后(巴黎 1667，格林尼治 1675)，才得着需要的精确度．下面简略地叙述已经获得的结果，其详细的情况参看以下一节．

1．由古代日月食的讨论，发现地球的自转有长期性的变缓，因此使平日的长度，每世纪增加 0.00164 秒．

2．计算了这个长期变化之后，地球的自转还有不规则的起伏，这种缓慢的变化由于其偶然性无法预测．下列的数字使我们明了其数量级：1681 年 -23 秒，1785 年 $+27$ 秒，1897 年 -29 秒，1918 年 -19 秒，1955 年 -41 秒(参看图 77)．

3．最后，天文时与由高精度的计时钟所提供的物理时之比较，表现地球自转有一种季节性的变化．即世界时有一个短周期的差数，可用一个改正值 ΔS 去抵消它，这偏离在 6 月初达 $+0.042$ 秒，在 9 月末达 -0.023 秒．

总之，地球自转的恒星周期不是常数，而且它的变化并不遵循一个简单的规律．因而世界时不是均匀的，如果从高精度的要求来说，它对于天体力学与物理学都不合用．

但是，我们不应该因此认为世界时从此就没有科学上的用途了，由于世界时与太阳时相当接近，当然它将继续支配我们的社会生活．还须记住，陆上、海上和空中经度的测定，是据地方时与接收授时台发播的世界时号的比较而作成的．这便说明，世界时在科学上还有其重要性．为了实用的目的，无线电发播出去的时刻是消除了它的短周期的差数的，第一将它归化到平极（§26），其次改正了季节性的变化 ΔS．经过这两种改正的时刻，我们将它叫做 $TU2$[1]．它里面还含有地球自转长期变化及缓慢起伏．

现在再回去讨论历书时．据纽康认为，太阳的视平黄经的表达式为

$$L_0 = 279°41'27''.54 + 129602768''.13t + 1''.089t^2 \tag{5}$$

这方程含蓄地规定了 t，因而也规定了历书时，这方程也决定了时间的原点与其基本单位．讨论最后这两个论点以前，先作几个注解．

如果我们用历书时的尺度去记录天文现象发生的时刻，则关系式(5)内的系数之值，失却了经验性的意义，而变成任意的或约定的常数．例如，若将太阳的观测以这种时间尺度去记录，观测必然满足(5)式，即(5)成为一个恒等式．但我们不能凭这结果的相合，而认为是历书时有均匀性的论证；可是以后我们要说明，若以历书时记录太阳以外其他天体，如月球、水星和金星的运动，便可以使用世界时记录的结果里所表现的偏离，一概消逝．换句话说，这些天体轨道上的运动与太阳的视运动相同，皆引导到同一种时间尺度．于是有人便夸张地认为，历书时即是力学时．那么，这节开始提出的问题不是已经解决了吗？但是这两种时之间也可能有差异，其偏离之微小虽然现今还观测不到，但由于观测与实验技术的进步，将来也许会发现的．若我们相信某些宇宙论，则我们所理会的天文时和由原子或分子标准而来的物理时是不能相互约化的．但是历书时比世界时更能满足天体力学的需要，则是无可怀疑的事实．

再回来讨论时间 t 的原点与时间的基本单位——秒．零历元是与 1900 年初太阳视平黄经过 A_0 值那一瞬间．我们将这一瞬间记为 1900 年 1 月 0 历书时 12 时．这瞬间实际是 1899 年 12 月 31 日格林尼治平午（世界时的原点）附近，但这两个原点并不相合，它们相差达 4.5 秒，可从图 78 看出．

至于“秒”，我们不能再将其定为一个平日的 1/86400，因为这个天然的标准在几十年间受到 10^{-7} 数量级的变化，原来人们已经能够用精准到 10^{-9} 或 10^{-10} 的频率标准去作相互的比对了．但方程(5)为我们提供一个比平日更可靠的天文标准，这便是太阳平黄经增加 360° 的一段时间——*回归年*．用 A_1 与 A_2 之值，将这段约定的时间长度计算为日与秒：

$$\left.\begin{array}{l} 365^{d}.242198781\cdots - 0^{d}.000006138\cdots t \\ 31556925^{s}.9747\cdots - 0^{s}.5303\cdots t \end{array}\right\} \text{回归年}$$

回归年在每世纪大约减少半秒，但这变化，由于其大小已经确定，并不引入任何困难，因

1）天文工作者以 TU0 表示地方时上加以观测站的平经而得的格林尼治民用时．再在这上面加以 §26 里所说的改正值 ΔL，将其改为对于平极的时刻，称为 TU1．然后更加以由季节性变化而来的改正值 ΔS，便得

$$TU2 = TU1 + \Delta S$$

此方程 (5) 或由其他天体运动而来的同类的方程，便是我们实际用以决定时间尺度的方程.

由于国际天文协会的建议，国际度量衡委员会于 1956 年公布了秒的定义："秒是对于 1900 年历书时 1 月 0 (历元)的回归年长度的 1/31556925″.9747.

恒星年是太阳的平黄经对于定春分点增加 360° 所需的时间. 它比回归年长；原来两者之差等于太阳的平黄经对于定春分点增加一个回归年内黄经上的岁差之量，即 $50''.25641+0.022229\,t$. 因此求得这差数为

$$0^{d}.014163945+0^{d}.000006265\,t$$

这样，恒星年从历书时表示之，为

$$365^{d}.25636273\cdots+0^{d}.000000127\cdots t$$

这段时间基本上没有变化，其长期变化还不及 0.01 秒[1].

现在可以更精确地计算太阳对于恒星的平均运动:

$$n=\frac{1296000''}{365.25636273}=3548''.19281$$

在讨论行星摄动的一节里，我们将对于这个常数作出一个重要的解说.

由于其不变性，我们原想采用恒星年作为时间的标准. 但以回归年有一种习用值的意义，而恒星年的计算须引入可能受到修改的岁差常数(参看前页注 1)，而且一定受到银河系自转的改正，何况恒星年不是一个可由观测直接求得的数据.

假设地球轨道的拱线是不变的，则太阳连续两次过近地点的时间等于恒星年. 但是由于行星的摄动，近地点每年前进 11″.63. 因此近地点的黄经对于动的平春分点每年增加 61″.89. 于是，与地球的平近点角 M 相关的近点年，比回归年与恒星年都长. 其长度在 1900 年为 365.259641 日，每世纪增加 0.263 秒. 四季的长度随近地点与春分点的相对位置而变化，这两点每经 21000 年重合一次.

§62 地球自转的变化

古希腊人的天文学，如亚里士多德所倡导的、托勒密所阐发的宇宙论，基础建立在匀速圆周运动上，天球的周日运动便是一个典型的例子. 到了哥白尼才将周日运动解释为由于地球绕其本身的轴转动所引起的现象，但他仍然认为这运动是匀速的. 开普勒首先提出与前人相反的意见，他在其著作里常谈到地球自转可能有一些偏差不匀. 牛顿在其《原理》书中(1686)曾经说过：由太阳观测所提供的真时表现有差数，天文学家须用"时差"去加以改正，这是由摆钟的观测和天体的运动(特别是木卫的运动)的研究而发现的. 牛顿更小心地加上这一句："自然界里可能没有均匀的运动，去用以精密地测量时间"，这句话无疑可用于地球的自转. 1754 年康德提出潮汐可能使日子变长的看法. 拉朗德在其《天文学》书中(第一版刊布于 1764 年)，对地球自转的均匀性提出了怀疑；我们可以引用他书中的几句话，以窥见他的思想(见 1771 年再版本 950, 951, 972, 2464 几节)："地球的自转所以假设为匀速的，主要是由于我们还没有观测到它表现有偏差的现象……可是地

1) 纽康曾经由于对岁差采用了另外一个暂用值，算得恒星年之长为 $365^{d}.25636042$；以后他也没有修改. 由此可见恒星年不能用以作为时间的自然标准.

球自转在一年内可能有2或3秒之差,只是不能为观测所发觉而已". 跟着作者提出形成这不均匀运动的机械原因(月-日引力)或地球物理的原因(大气与海洋的流动),"在长期的作用下,可能影响地球的自转运动,因而稍微改变日子的长短". 由于那时的观测精度不高,无法证实这些见解,因而很快就被人忘记了. 以后费雷耳(Ferrel)与德洛勒也作过同样的假说. 直到十九世纪之末,天文学家仍以为恒星日长度的变化,唯一原因是赤经上的岁差(含t^2之项,见§64).

经过了长期的期待之后,事实的证据终于引起了天文学家的注意. 潮汐效应的研究,在数学上与物理学上均有很大的困难;康德的假说很迟缓地才有成果,是不奇怪的. 由于经历许多年人们无视于拉朗德提出的地球物理现象在这问题上的重要性,更使成果难于出现. 极移的发现(1888)与地壳潮(陆潮)的发现(1902—05)使人终于放弃地球是不变形的刚体的见解. 可是纽康在其最后的论文里还说:如果要将天体运动的起伏解释为由于地球自转的变化,则地球变形的程度将大到令人难于相信的境界;虽然他是前面假说的一位热烈提倡者,而且这假说终于得着了证实.

这种怀疑今天已消释了. 我们已经证明,这些起伏真的存在,一个世纪里其相对值可能达到10^{-7}. 一年里的起伏,在某些情形下,可能达到拉朗德所给予的数量级. 导至这些成果的近代研究,其出发点是1870年纽康(1835—1909)所作的一个提示. 1857年汉森(Hansen)所刊布的月离表(§122),在1750至1850年间很能代表观测的位置,可是对于以后的观测便表现了离差;1870年已相当显著,到了1875年黄经上的离差竟达8″. 几年以后,纽康更发现1750年以前的观测亦与近代的观测一样,不能为理论值所代表,他在这一研究里使用了巴黎天文台所保存的月掩星的观测记录. 可是,汉森的月球运动的分析理论比其前人的完善得多,因而不能将这离差认为是由于理论之欠完善. 于是纽康提出一些值得称赞的解释;他特别指出可能是由于地球自转之有变化,并且说明要使这一假说得以成立,应先证明一切天体的运动和月球一样,皆有类似的起伏变化. 因此,我们便应该对于太阳、行星与其主要卫星(月球自然在内)的观测加以一番普遍的讨论. 这自然是一个很庞大的工作,因而这一研究至1926年,即纽康死后17年,始见成效. 这问题先由布朗加以肯定,1927年由德·西特尔(De Sitter)继续深入,最后由斯宾塞尔-琼斯得到解决(1939),更为N. 斯托伊科(Stoyko)所补充(1937).

如上节所述,今天我们将地球自转运动的不均匀性分为三类:

(1) 长期的转慢,表现于平太阳日的长期性的增长,其原因是潮汐的摩擦,主要发生在狭窄的浅海里;

(2) 不规则的起伏变化,迄今还不能分析出原因,故无法预测;

(3) 季节性的变化,外貌象是有规则的;原因可能是由于气象的变化.

长期变缓与无规起伏可由天体运动上同时发生的、合于纽康的判别标准的视偏差显露出来. 假设日的长度改变,则这时间内行星与其卫星在轨道上的运动也有同方向、同比例的变化. 换句话说,日子的长度的起伏变化,由这些天体的平均运动里按比例的视变化而表现出来. 这种由于采用为标准的时间长度之欠稳定而生的视变化,是可以借观测去发现的.

事实上,我们将这判别标准应用于轨道上运行迅速的天体,例如月球的运动,太阳的视运动,以及水星和金星的日心运动;其他天体的运动,不是由于过于迟缓,便是因为它们

的理论还不很完善（例如木卫的情形）．斯宾塞尔-琼斯明确地证明了上述四个天体的运动的差数，彼此符合得很好．以下就月球的情形加以仔细的讨论．

虽然水星、金星与太阳(实际是地球)在轨道上的运动，既不受地上潮汐的影响，也不因地球物理或地质现象，使地球变形而消耗其自转的能量．月球的运动虽亦不受地质现象的影响，但潮汐却对它有相当大的作用．业已说过，潮汐使日子作长期性的变长，因此在天体的运动上产生长期加速度的视现象．于是我们意料，在水星、金星和太阳上求得的平均运动的变化，当与运动本身成正比例，至于月球的长期加速度所遵循的规律更加复杂．现在对这一点稍加阐发．

月球运动上的长期加速度已经被哈雷所猜测到，但直至十八世纪中叶，由于对自古以来日月食观测记录的讨论，始确切证实其存在．为了表达这些观测，月球黄经的表达式里须保留含 t^2 的经验项

$$☾=n't+\varepsilon'+bt^2+\cdots$$

(见第十三章)．若时间的单位是世纪，b 的数值大约是 $10''$．这加速度[1]现今认为有如下的解释：

(1) 系数 b 内很微小的一部分，相当于黄经上的岁差的二阶项．

(2) 比较大的一部分，形成于地球轨道偏心率的变化．这效应为拉普拉斯所发现，将于§118里加以研究．由于这一机制产生的加速度的分量，经布朗计算为 $7''.14$．

(3) 为了表达古代的观测，德•西特尔主张，在以上的数字里还应加上数值为 $5''.22$ 的一个附加加速度，而为天体力学所不能解释的．这个附加加速度便被认为产生于潮汐的摩擦，因而形成日子的长期性的变长．但是，这是不完整的．

(4) 潮汐不但阻滞地球的自转，而且阻滞了月球在其轨道上的运动．还没有一个完备的理论说明这个复杂的现象．主要是由于缺少地上某些区域的潮汐数据；这理论本身有很大的困难．可是我们可以说明(至少定性地，潮汐不但引起能量耗散，同时还引起月球的平均距离与其轨道的偏心率增加；据开普勒第三定律，距离的增长又引起平均运动的减少．

总之，月球的长期加速度起源于日子的逐渐变长，其一部分被由同时发生的轨道变形的长期真变缓所抵消．观测为我们提供这两个效应之差为每世纪 $5''.22$，但是它们的比值在理论上还不确定．

因此我们不应从月球，而应向水星、金星和太阳去求日子的长期增率．反之，对于别的现象，由月球的运动去探寻却更有利，因为它的运动是最迅速而且最容易观测的．

现在对以上所列举的地球自转的各种差数作定量的研究．仍如上节，我们将 t 与 θ 都表为36525日的儒略世纪，从1900年1月0日12时所讨论的时间起算．

(1) 日子的长期性增长由观测所提供的太阳运动上的长期加速度而发现与测定．根据斯宾塞尔-琼斯，若我们以世界时来记录观测，则由太阳赤纬的观测计算得的黄经，与其在纽康表上的数值之差 $0-c$ (观测值减计算值)，可以下列一式来表达它的长期变化部分(即不管以后要论到的不规则的或季节性的部分)：

$$\Delta_1 L_0 = +1''.00+2''.97\theta+1''.23\theta^2 \tag{1}$$

---

1) "加速度"在天文学上表示随时间 t 的二乘方变化的差数项的系数，但在运动学上，例如落体的情形，则是这系数的两倍．

可见太阳的平均运动 A_1，表面上增加了 $2''.97+2''.46\theta$ 这个量．我们可将其写为如下的形式：

$$(A_1+2''.97)(1+0.0000000190\,\theta)$$

事实上，这形成世界时的日子的绝对长度 J_m 的变化，它在每个世纪里增加之量为

$$86400^s\times0.0000000190=0^s.00164 \tag{2}$$

太阳的平黄经增加 Δ_1L_0 所需的时间为 $\Delta_1L_0:n$，或以数字表示为

$$\Delta_1\theta=+24^s.349+72^s.318\theta+29^s.950\theta^2 \tag{3}$$

（我们假定，Δ_1L_0 的系数按约定值是精确的）．

从 1900 年起，每 10 个儒略世纪，这一改正有如下的数值：

$t=-20$	$+2^h55^m58^s$
-10	$+0^h38^m16^s$
0	$+0^h00^m24^s$
$+10$	$+1^h02^m22^s$
$+20$	$+3^h44^m10^s$

由此可见，古代的观测精度虽不高，却足够表明这个相当大的效应．如果不将地球的长期性转缓考虑进去，则不能正确地表达历史上的日月食．

设将这些改正值应用于观测的时期上去，黄经上的离差自然地得到减少．其所以不完全消除，那是因为第一改正值里还含有其他的起伏变化，这将在后面进行讨论．

剩下的便是校核以上由太阳而得的结果，即须在水星和金星的观测上证明也有这种为天体力学所不能解释的附加加速度，而且它是与平均运动成正比例的．如果真是这样，我们应该求出这两个行星的加速度等于太阳的加速度分别乘以 4.15 与 1.63 之积，即

水星……$5''.10\,\theta^2$

金星……$2''.00\,\theta^2$

由已经观测了三百多年的水星凌日，为这颗行星提供了很好的位置．至于金星，我们只有一个世纪的优良子午观测；因此，金星比水星的数据权数较轻．可是这两颗行星的结果都很令人满意．根据斯宾塞尔-琼斯，纽康表里的黄经，虽以世界时记录，但若加以如下的改正：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{水星} & +4''.96+13''.08\,\theta+5''.10\,\theta^2\\ \text{金星} & +2''.26+5''.39\,\theta+2''.00\,\theta^2\end{array}\right\} \tag{4}$$

则可以很好地表达观测；这里没有考虑不规则的或季节性的变化．正如对于太阳的情形，这里所说的加速度是虚构的，若我们用历书时去记录观测，它们便消逝了．换句话说，理论与观测之间的系统差便取消了，这便是天体力学的一个重要成就[1]．

月球的平均运动 13.37 倍于太阳．故月球加速度的虚构部分达到每世纪 $16''.4$，假使如上所言，这部分加速度不为另外一种真实的长期减速度（由地上潮汐效应形成轨道变形而使月球运动变缓）抵消了一些的话，由此实际观测到的加速度只有 $5''.22$．斯宾塞尔-琼斯将以世界时记录的观测与布朗表之差表示为下式

$$\Delta☾=+4''.65+12''.96\,\theta+5''.22\,\theta^2 \tag{5}$$

这些改正式里除虚构加速度之项外，还有常数与含 θ 之项，是不奇怪的，原来这两项是对

1）更确切地说，是按照相对论修改的天体力学．参看 § 109．

初始历元的黄经和平均运动的改正，因而所有轨道根数之值都应同时加以修改.

至于由潮汐摩擦使地球转慢的机制引起不少有趣的研究，我们只谈一点吉弗雷斯(H. Jeffreys)的工作．众所周知，高潮生于月球中天后一些时间．假设地球是盖满海洋的均匀球体，海面可以当做是一个长椭球面，由于摩擦的效应，其长轴并不与联接地-月的向径相合．但反转过来，月球施于椭球上的引力，表现为一个力偶矩，有抑制地球自转的作用．如果只考虑这一大概的说法，便只能解释观测到的效应的一微小部分．事实却与这个过于简化的设想是有出入的．在窄狭的浅海里，比在广阔的大洋里，潮汐的振幅要大得多，因而由摩擦损耗的能量，在浅海里很大．吉弗雷斯根据他所掌握的知识，计算了浅海里潮汐的效应，求得白令海峡在这能量的消耗上，便提供了总量的十分之七．据定性说，吉弗雷斯的结果大致说明了天文观测的结果，由潮汐摩擦计算出的地球转缓度与由观测求得的，在数量级上是符合的.

(2) 不规则的起伏变化改正了月球平黄经上的长期变化之后，其结果仍然与理论有离差，但其形式是不规则的，而且变幅也相对大．纽康发现了这些离差，认为这里面有一个来源不明的、周期为 257 年的周期性摄动，他以下列的经验式去代表它：

$$10''.71 \sin(140^\circ t + 240^\circ.7) \tag{6}$$

将这一项纳入月球运动的分析理论，作过的一切努力均告失败；而且以后的观测也不能证实必须介入纽康的经验项，因此人们扔掉了它．可是布朗却将其纳入他的月离表，所以将表内数字和观测比较时，须将它消去．事实上，月球的这些起伏是视变化，它们反映地球自转的无规则变化.

图 77 表示月球自 1677 年以来的起伏变化 B，即其观测的黄经超过布朗表里的黄经[在加入(5)式的改正和消去纽康的经验项之后]的数值．图中左边的标尺是弧秒(符号 B 是按习惯以这尺度表示月球的变化)；右边的标尺是时秒，比例是 1ˢ.821 相当于 1″，因为月球的平黄经在每秒钟内增长 0″.549；因此我们得在这幅图上读出仅与不规则变化对应的地球时的差数.

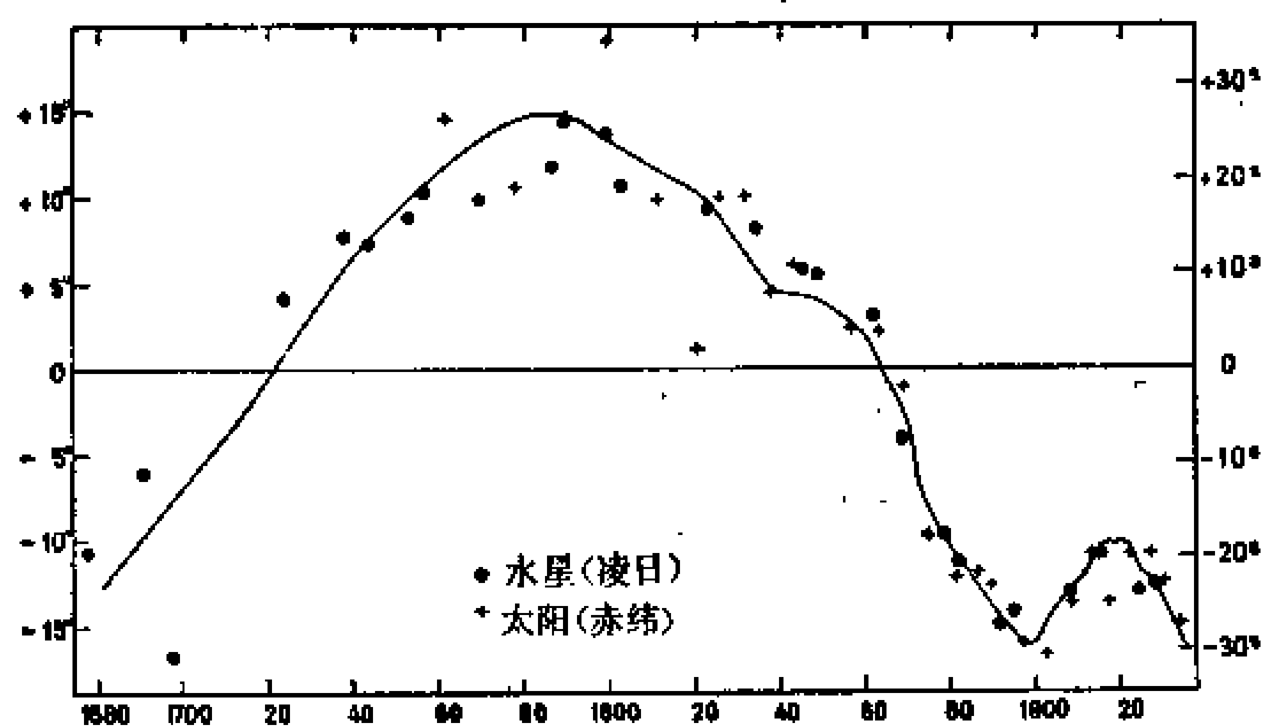


图 77 月球(曲线)、水星(圆点)、太阳(十字)，自 1677 年以来黄经的变化(见斯宾塞尔-琼斯的论文，载 M. N. 99, 1939)．左边的标尺表示为弧秒．右边的标尺以时秒给出地球时的对应的变化.

在这些不规则的起伏变化上(而且在某些时期里改变其方向)，要寻出潮汐的效果，是不可能的．人们认为，这变化的原因是由于地质或地球物理现象，这些现象改变了地球的

转动惯量，而不影响月球的运动．因此，一切天体运动都应该表现出相同的变化，而且按照纽康的判别标准，与它们各自的平均运动成正比例．

事实上，这正是太阳和水星在观测里所表现的情形（金星的现代观测也是这样）．我们将这些观测的起伏变化绘在图 77 内，以使其与月球的变化情形直接比较．圆点代表由凌日观测得出的水星的起伏，而乘以 3.23（即月球与水星的平均运动之比）．十字代表太阳的观测（集合为若干组，由于太阳的观测比月球少），而乘以 13.37．如果考虑到观测误差，也和纵标一样，被倍上相同的因子，我们对于这三个天体的变化一般相合到这样的情况，应当认为满意．这些变化满足了纽康的判别标准，因此我们有权将它们认为是表现地球自转的起伏变化．

设以 $\Delta_2 L_0$ 表示太阳的起伏变化 $0.07480B$，则太阳的黄经的总改正值为

$$\Delta L_0 = \Delta_1 L_0 + \Delta_2 L_0 = +1''.00 + 2''.97\theta + 1''.23\theta^2 + 0''.0748B \qquad (7)$$

下表给出自 1681 年以来的 B 之值（根据斯宾塞尔-琼斯）以及与之对应的世界时上的改正值 $\Delta_2\theta = 1.821B$，这应加在 $\Delta_1\theta$ 上去．

月球黄经的起伏变化

	B	1.821B	TE–TU		B	1.821B	TE–TU		B	1.821B	TE–TU
1681.0	$-12''.72$	$-23^{s}.2$	$-13^{s}.6$	1857.5	$+2''.40$	$+4^{s}.4$	$+3^{s}.4$	1924.5	$-11''.82$	$-21^{s}.53$	$+22^{s}.34$
1710.0	−3.92	−7.1	−12.1	62.5	+0.91	+1.7	+3.1	26.5	−12.11	−22.06	+23.55
27.0	+2.15	+3.9	−7.2	67.5	−1.57	−2.9	+1.2	28.5	−12.90	−23.50	+23.89
37.0	+5.97	+10.9	−3.1	72.5	−6.38	−11.6	−4.9	30.5	−13.83	−25.19	+24.00
47.0	+8.49	+15.5	−0.7	77.5	−9.38	−17.1	−7.5	32.5	−14.81	−26.97	+24.04
55.0	+10.34	+18.8	+1.3	82.5	−11.31	−20.6	−8.0	34.5	−15.98	−29.11	+23.75
71.0	+13.54	+24.7	+5.6	87.5	−13.05	−23.8	−8.0	36.5	−16.48	−30.02	+24.72
85.0	+14.84	+27.0	+7.8	91.5	−14.34	−26.1	−7.7	38.5	−17.57	−32.00	+24.63
92.0	+14.53	+26.5	+7.7	94.5	−15.23	−27.7	−7.3	40.5	−18.48	−33.66	+24.89
1801.5	+13.09	+23.8	+6.0	97.5	−15.99	−29.1	−6.6	42.5	−19.08	−34.75	+25.75
09.5	+11.80	+21.5	+4.9	1900.5	−15.87	−28.9	−4.2	44.5	−19.53	−35.57	+26.89
13.0	+11.28	+20.6	+4.7	03.5	−14.50	−26.4	+0.5	46.5	−20.22	−36.83	+27.62
21.8	+10.02	+18.3	+4.4	06.5	−13.43	−24.5	+4.7	48.5	−20.46	−37.27	+29.19
31.5	+6.85	+12.5	+1.3	09.5	−12.78	−23.3	+8.2	50.5	−21.13	−38.49	+30.02
37.4	+4.91	+8.9	−0.2	12.5	−11.62	−21.2	+12.7	51.5	−21.48	−39.12	+30.41
43.1	+4.31	+7.9	+0.8	15.5	−10.35	−18.8	+17.4	52.5	−21.77	−39.65	+30.92
48.8	+3.97	+7.2	+2.4	18.5	−10.20	−18.6	+20.2	53.5	−22.02	−40.11	+31.50
52.5	+3.37	+6.1	+2.9	21.5	−10.18	−18.5	+22.7	54.5	−22.26	−40.54	+32.11
								55.5	−22.51	−41.00	+32.71

结束这些起伏变化的讨论以前，再谈一下为什么我们能将天体运动上的长期视加速度和不规则变化的加速度分析开来．初看去好象这是一个不定的问题；但须指出，月球的加速度能够从两千年来的日月食观测而推出，这样就大大地便利了本节所叙述的研究．另外，月球、太阳、水星与金星的起伏变化与其加速度为纽康的规则所联系，这种不定性实际是解除了．

(3) *季节性的变化* 1937 年斯托伊科从几个天文台的高精度的天文钟运行情况里同时表现的周年差，查出地球自转有季节性的变化．1934 至 1937 年间巴黎与华盛顿两天文台的摆钟以及柏林物理技术研究所的石英钟，在那几年里的平均运行情况有一种共同

的趋势：在6至11月间走快，11月至次年6月走慢．由于钟上的这种变化，不可能在钟的本身，N. 斯托伊科才断定是起因于地球自转的周年变化．其后几年也得着类似的结果，例如斯托伊科对1945—47年的研究，芬奇(Finch)对于1943—49年间的研究以及最近几位天文工作者利用氨或铯的标准所取得的结论．

因此，归算到平极的世界时(TU1，见§61脚注)，受到一种年变化，应加在长期变化与无规起伏之上，其总变幅在1955—56年内，觅得为65毫秒(ms)(初期的工作者求得的变幅是这个的两倍)，由TU1过渡到TU2应加的改正值，5月末为 $+0^s.042$，9月末为 $-0^s.023$．以世界时计的日子的长度，3月12日应增加0.7 ms，7月1日应减少0.9 ms．因此日子季节性变化的总幅度，实际上绝对值为1.6 ms，相对值为 1.8×10^{-8}．

据科克斯(Cox)、范·登·当根(Van den Dungen)与范·米根(Van Mieghem)的研究，地球自转的季节性变化起源于大气的普遍运动．若将运动的大气团的分量与其速度及物理情况一并加以考虑，则由计算求得其对于日子长度的年变化的影响与观测的结果有相当好的符合．但是我们应该设想这变化的幅度是随年而不同的．

图78代表1955—56年的季节性变化．

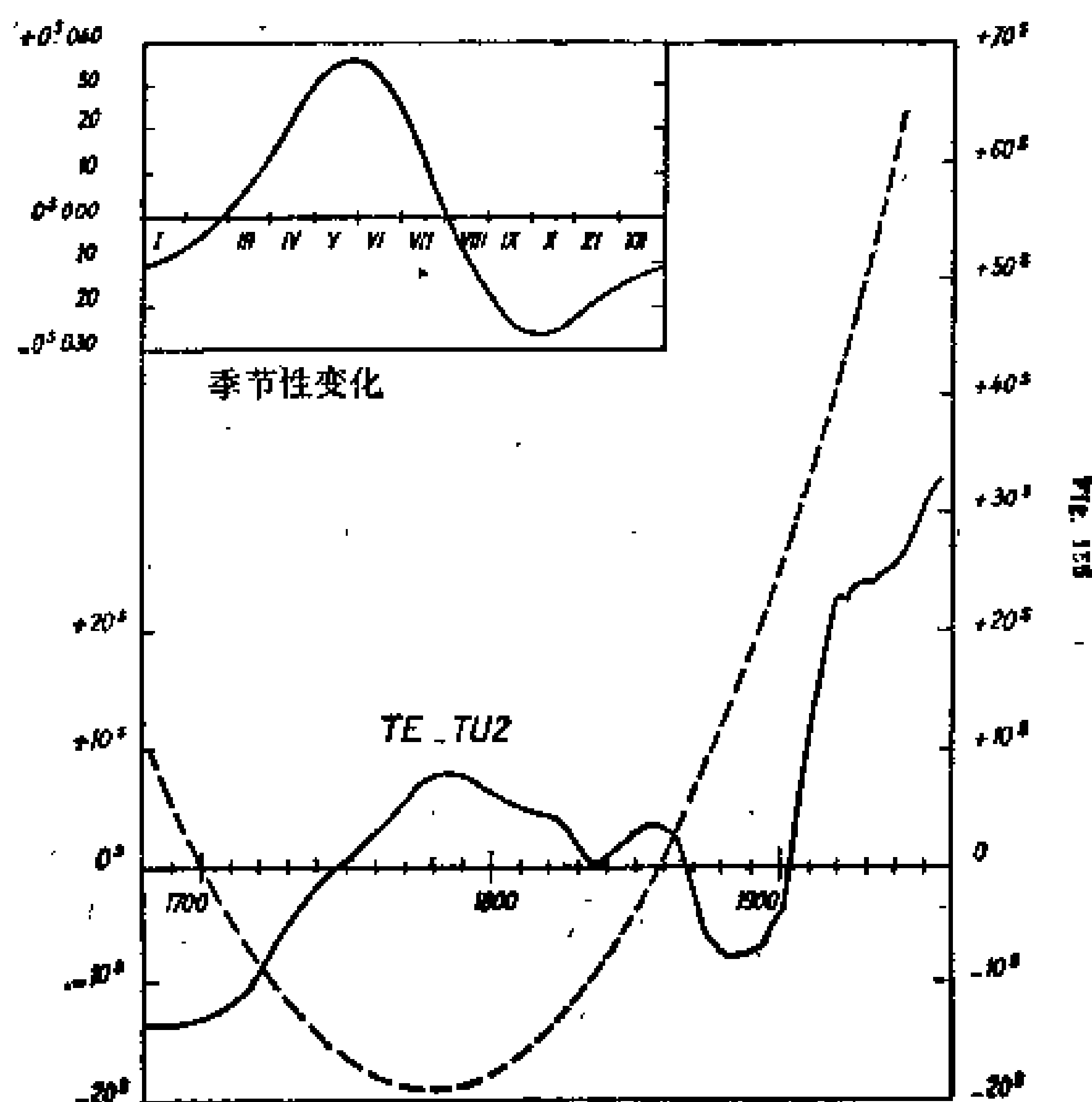


图78　实线表TE-TU2，单位为时秒，时间是1680—1955年．虚线表示这差数中的长期变化部分．左上图表示地球时TU1的季节性变化．

§63　历书时的测定

太阳的黄经变化很慢，每时秒平均为0″.041．因此太阳在黄道里的运动成了一个不太灵敏的时计．月球的运动更为合用，它的黄经每时秒平均增加0″.549或13.37倍于太阳；所以为决定历书时须观测月亮．本节将叙述这测定的步骤．

如上所说，斯宾塞尔-琼斯为了将观测的黄经表为 θ 的函数，推导了一个公式，来表达从纽康表取出的黄经应加的改正数：

$$\Delta L_0 = +1''.00 + 2.97\,\theta + 1''.23\,\theta^2 + 0.0748B \tag{1}$$

$\Delta\theta$ 是太阳平黄经增加 ΔL_0 所需的时间．它在

$$31556925^s.9747/1296000 = 24^s.349480$$

内增加 1″，因此有(如上所说，按照约定，一向认为 ΔL_0 的表达式是绝对精确的)：

$$\Delta\theta = +24^s.349 + 72^s.318\theta + 29^s.950\theta^2 + 1.821B \tag{2}$$

B 以角秒表示月球黄经的起伏变化．于是这问题改变为 B 的决定．

可是，上节的公式(5)提供应加在布朗表上的长期部分的改正值，以使月球的平黄经表为 θ 的函数．这公式里还应加入 B 的起伏变化；并消除经验项(§ 62 内公式 6)．于是得将观测的黄经表示为 θ 的函数的公式：

$$☾_o = ☾_B + 4''.65 + 12''.96\,\theta + 5''.22\,\theta^2 + B - 10''.71\sin(140°\theta + 240°.7) \tag{3}$$

当月球的黄经由观测决定(即 $☾_o$)以后，这公式立刻给出 B．于是我们掌握了计算 t 的一切要素．这里符号 $☾_B$ 表示我们按 B 之数值从布朗表内所取出的黄经．

但是，我们也可以不先决定 B，而去直接决定 t．为此须编制一个以历书时表达月球的平黄经的表．在(3)式里，若以 t 代 θ，则计算得的黄经增加了 $n'\Delta\theta$；n' 表示月球的平均运动．因此应将这个增量减去，而这个量等于 $13.37\Delta L_0$．于是 B 自然被消去了，剩下的便是

$$☾_o = ☾_B - 8''.72 - 26.75t - 11''.22t^2 - 10''.71\sin(140°t + 240°.7) \tag{4}$$

已经刊布有经过这样改正的月球历书 (1952—59)[1]；自 1960 年以来，天文年历里便刊布以历书时为准的月亮的赤道坐标表．当月球的赤经测定之后，由这个表的内插，便可求得历书时．

有两个方法去由观测决定历书时，这两法的目的都是要将月亮圆轮的中心和一些赤道坐标可从星表取出的定标星取得联系．最早的方法是用月掩星(第十四章)．恒星在月轮边沿隐没与再现都是忽然的现象，因而可以精确地记录其发生的时刻．但是，月面轮廓上有显著的起伏；随星在凹凸处或在山峰以后被掩没，接触的瞬间有几秒时间的出入[2]．我们可以借很多次月掩星的观测去消除这个缺陷，月面轮廓起伏的效应可以因此得着抵消，但这样只能得到 B 的年平均值．

第二个方法是同时拍照月亮与其周围的星野．然后将底片放在坐标仪上，去测量若干个比较星的坐标，以及月亮圆面周界上若干点以定其中心的坐标，这样月面轮廓的起伏效应可以比月掩星的方法得着更合理的消去．马科维茨(Markowitz)的双速月亮照相仪，是为达到这一目的精巧设计；照相的方法现今已很流行．我们正期待着观测精度的增进，以取得优良的 B 的月平均值．

图 77 里的实线表示自 1677 年以来月亮的 B 值的起伏变化，其中一部分是从月掩星，另一部分是由于午仪的观测而取得的．利用绘成这曲线的数字我们计算了同一时期的 TE－TU2 之差，结果记载于表中 B 值之后，并绘图 78 里实线所表示的曲线．至于图 78 里的虚线(抛物线)表示这些差数里的长期变化部分．

从这些数据容易推出各时期里以世界时表示的日子的绝对长度 J_m．这是旧理论的平日，即一向认为是时间的不变的天然标准，直到最近采用了回归年为标准，才被废弃．若

1) Improved Lunar Ephemeris 1952—59, Nautical Almanac Offices of the U. S. A. and the U. K.

2) 我们可用维麦尔(Weimer)所编制的巴黎天文台的月面轮廓图，以消除由这些起伏而产生的差数．

在一日，即1/36525内增加θ，则t增加一日和$\Delta\theta$的变化．改为时秒，这增数的表达式，以历书时计为

$$86400^s+\frac{72^s.318}{36525}+\frac{59^s.900}{36525}\theta+1.821\Delta B$$

ΔB表示B在θ时期的变化．因此以历书时表示：

$$J_m=86400^s.00198+0^s.0016400\theta+1.821\Delta B \tag{5}$$

这式内我们可以合理地将t代θ．图79里的曲线表示自1770年到现在的$J_m-86400^s$之差，以虚线绘出的直线表示其中的长期变化部分．由图可见，这偏离可由1870年的-3.3ms至1911年的$+4.1$ms，平日的长度在41年内可增加7.4ms，或其相对值为8.6×10^{-8}．若这上面更加入季节性变化，则总数超过10^{-7}．

物理学家对频率标准之研究的进展，必然会采用为时间的物理标准*．但天文学家将努力保留现今所规定而且流行的历书时的秒的长度．此外，长时期的量度只有用天文学的方法才能固定年代学上必需的原点．

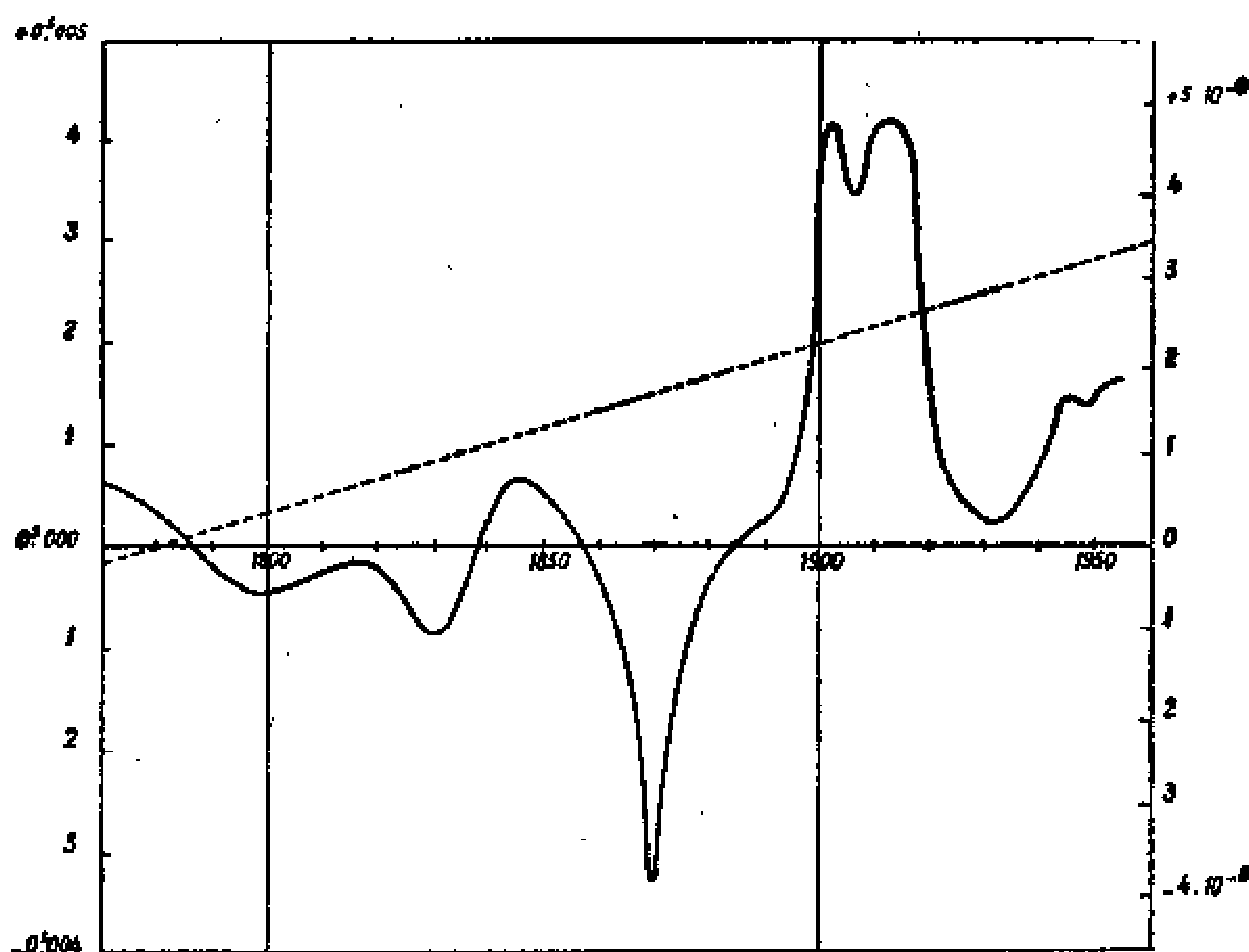


图79　1770至1955年平日长度的变化．右边的标尺是一日的分数，左边的标尺是毫秒．虚线表示这变化里的长期部分．

§64　恒星日，太阳日，地球对于恒星的自转周

这一节分为两个部分．第一部分计算真恒星日S_v的短周期差；经典的理论可以无修改地用在这里．第二部分计算平恒星日的长度S_m，太阳日的长度J_0和地球对于恒星的自转周R，同时考虑了长期变化与起伏变化．

I．我们曾经将格林尼治真恒星时展开为下式：

$$T_v=T_0+T_1\theta+T_2\theta^2+(N+dN)\cos\varepsilon$$

* 所谓原子时的一秒，等于铯原子在零磁场里的某一跃迁频率，即9，192，631，770赫．已于1966年由国际度量衡委员会公布采用——译者注

式内有关章动之项，我们使用 § 50 里的符号(并见表 XVI)．若略去章动项，则格林尼治平恒星时的展开式为

$$T_m = T_v - (N + dN)\cos\varepsilon$$

这里只保留有最大变幅的章动项与最能影响真恒星日长度之项

$$(N+dN)\cos\varepsilon = -1^{s}.054\sin\Omega' - 0^{s}.078\sin 2\odot - 0^{s}.012\sin 2☾$$
$$+0^{s}.004\sin M' - 0^{s}.002\sin(2☾ - \Omega') - 0^{s}.002\sin(2☾ + M') + \cdots$$

式内 Ω' 表示月亮升交点的黄经(第五章和表 XVI 内表示为 θ)，⊙ 与 ☾ 两符号表示太阳与月亮的平黄经，M' 表示月亮的平近点角(第十三章)．$(N+dN)\cos\varepsilon$ 的系数的算术和达到 $1^{s}.180$，其中 $1^{s}.054$ 是由布拉德勒项而来．$T_v - T_m$ 之差实际相当接近于这个极限值(1955 年 2 月 7 日达到 $+1^{s}.151$)．

当真恒星时增加一周之时，对应的平恒星时的增加是一周减去一个恒星日里的章动的总变化．由此真恒星日的长度 S_v 与平恒星日的长度 S_m 之差等于

$$S_v - S_m = -\Delta(N+dN)\cos\varepsilon$$

$$S_v - S_m = -0^{s}.0010\cos\Omega' + 0^{s}.0027\cos 2\odot + 0^{s}.0058\cos 2☾$$
$$-0^{s}.0010\cos M' + 0^{s}.0010\cos(2☾ - \Omega')$$
$$+0^{s}.0011\cos(2☾ + M') + \cdots$$

整个展开式的系数的算术和达到 $0^{s}.013$，这里短周期项占了优势．$S_v - S_m$ 之差实际可达到 12 ms(1950 年 7 月 29 日达到 $-0^{s}.0115$)．

恒星时和世界时相互转换之际，不应当无视于上面这个讨论．若我们追求的精度超过百分之一秒，在表 XII 与 XIII (并见 § 39)所提供的为转换用的改正数上，还应加入一个附加的改正数，以便将真恒星日与平恒星日之差计算进去，因为这两个表是据平恒星日编制的．

直至 1930 年，天文工作者由中星仪观测基本星，直接求得真恒星时，以比对天文钟，而决定其运行情况，但由于时钟制造的进步，其运行情况的离差，降低到每日几个毫秒．由于章动的迅速变化，使得平恒星时被采用为比对的标准．自 1935 年以来，法国天文年历里便载有赤经章动的长周期项和短周期项．但为发播时号计，世界时的保存，跟着即代替了恒星时的保存，因为现在恒星时已经没有保存的必要了．现今授时台里使用以世界时调准的石英钟，去控制记录恒星中天的记时仪．高精度的恒星时现今仅是计算里的一个中间过程．一具给出地方恒星时的普通时计，即使差几秒，已经足够在视场里去寻找所要观测的星了．

II．按照旧理论，平恒星日的长度在缓慢的变化，因为平恒星日的展开式里有不可忽略的 θ^2 之项．但在这个长期变化项之外，还应加上由地球自转不均匀性而来的更大得多的变化．现在将 § 33 里所讲的概念加以补充和确定于下．

§ 61 里曾经给出有关格林尼治真恒星时与太阳的视赤经的两个展开式：

$$\left.\begin{aligned} T_v &= T_0 + T_1\theta + T_2\theta^2 + N\cos\varepsilon \\ \alpha_0 &= A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \Sigma(P) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里 t 与 θ 均表示为 36525 日的儒略世纪，而不象 § 33 里之以日计．用这个新单位并采用以上规定的原点，便应假定

$$\left.\begin{aligned}T_0&=A_0\\T_1&=A_1+36525\times86400\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

若欲将 T_v 和 α_0 纳于同一系统之下，应将这些系数表示为时、分与秒.

据纽康，格林尼治平午的平恒星时的数字表达式为

$$\underset{A_0}{18^h38^m45^s.836}+\underset{A_1}{8640184^s.542\theta}+\underset{T_2}{0^s.0929\theta^2}\tag{3}$$

(这是平太阳的赤经).

考虑关系式(2)里的第二式，便容易写出格林尼治平恒星时的一般公式:

$$T_m=A_0+\underset{T_1}{(36625.86400^s+184^s.542)}\theta+\underset{T_2}{0^s.0929}\,\theta^2\tag{4}$$

那么，我们应当对方程(4)作怎样的转换，才使格林尼治平恒星时表达为 t 的函数呢?

令:
$$\frac{dT_m}{d\theta}=\frac{366.24219\cdots}{365.24219\cdots}=1.0027379$$

这是平恒星时的变化与世界时的变化之比. 若以 $t-\Delta\theta$ 代 θ，则

$$T_v=T_0-\Delta\theta\frac{dT_m}{d\theta}+T_1t+T_2t^2+N\cos\varepsilon\tag{5}$$

设 E 表示赤道上的一点，其经度(从格林尼治经圈起算，向西为正计算)等于

$$\Lambda=-\Delta\theta\frac{dT_m}{d\theta}=-24^s.416-72^s.516\theta-30^s.032\theta^2-1.826B\tag{6}$$

这一点的地方恒星时便是

$$T_E=T_v-\Lambda=T_0+T_1t+T_2t^2+N\cos\varepsilon$$

可见纽康表所提供的是 E 点的恒星时，而不是格林尼治的恒星时. 这一点的经圈经萨德勒(Sadler)命名为"历书经圈". 含这经圈的平面围绕地轴对定春分点以等速旋转. 这个经圈和格林尼治经圈所成之角在缓慢的变化，不等于 $\Delta\theta$，而等于这段时间内地球对平春分点转过的角. 凡与地球不均匀的自转有关的要素，容易以历书经圈为媒介而求得. 经典理论对于这一经圈可以严格地适用，它对于格林尼治经圈的位置为方程(6)所规定.

例如要计算真太阳日的平均长度 $\bar{J}_0$(不应将 $\bar{J}_0$与平太阳日的长度 J_m 弄混淆了). 太阳在格林尼治的时角的表达式为

$$H_0=T_v-\alpha_0=36525.86400^st+\Lambda+(T_2-A_2)t^2-[\Sigma(P)-N\cos\varepsilon]\tag{7}$$

在 Λ 式里以 t 代 θ，并以 $\bar{H}_0$ 表示 H_0 的长期部分，则由微分法得

$$d\bar{H}_0=(36525.86400^s+0^s.0412\,t)dt-(72^s.516+60^s.064\,t)dt-1.826\,dB$$

设 t 增加一日即 1/36525 单位或 86400^s，则 $\bar{H}_0$ 的对应的变化为

$$\Delta\bar{H}_0=86400^s[1+1.3\,t\,10^{-11}-(2.2979+1.9033\,t+2113\Delta B)\cdot10^{-8}]$$

方括弧内之项代表在历元 t，历书时一日的长度与真太阳日的平均长度 $\bar{J}_0$ 之比. 将这比例倒转，并乘以 86400，便得

$$\bar{J}_0=86400^s-0^s.000001\,t+(0^s.00199+0^s.001644\,t+1.826\Delta B)$$

与上节同，ΔB 表示 B 在一个历书日里的变化. 括弧内之项从 Λ 而来，是与地球自转的差数有关的. 若将其略去，则得经典理论应用于历书经圈上的结果; 在这经圈上每一点，太阳日的平均长度，基本上是不变化的. 但在格林尼治，亦如地球上其他各点，太阳日的平均长度的表达式为

$$J_0=86400^s.00199+0^s.001643\,t+1.826\Delta B$$

若将 J_0 之值与上节所算得的 J_m 之值联系，则发现与 $\Delta\theta$ 有关之项不具有相同的数值. 在 J_m 里只有 $\Delta\theta$ 的周日变化，而在 J_0 里还须加上 ΔL_0 的周日变化：

$$0^s.000005+0^s.0000045t+0.005\Delta B$$

同样，在格林尼治平恒星时的表达式里，给与 t 以 1/36525 的增量，则得平恒星日的长度：

$$T_m=T_0+\Lambda+(36625.86400^s+184^s.542)t+0^s.0929\,t^2;$$

$$\Delta T_m=86400^s\Big[\frac{36625}{36525}\Big(1+\frac{184.542+0.186\,t}{86400.36625}-\frac{72.516+60.064\,t}{86400.36625}-2.108\Delta B10^{-5}\Big)\Big]$$

ΔB 的意义与上相同. 方括弧内的表达式提供历书日与平恒星日之比. 将这比例倒转，并乘以 86400，便得以秒表示的平恒星日的长度

$$S_m=86400^s\frac{36525}{36625}[1-(5.8318+0.0059t)10^{-8}+(2.2916+1.8981t+2108\Delta B)10^{-8}]$$

$$=86164^s.09054-0^s.000005\,t+(0^s.00197+0^s.001635\,t+1.816\Delta B)$$

由经典理论而来的前两项，提供平恒星日对于历书经圈的长度. 完全的表达式给出对于地球上任何一个给定点的平恒星日的长度

$$S_m=86164^s.09251+0^s.001630\,t+1.816\Delta B$$

为了求得地球对于恒星的自转周，只须在以上的计算里，将初始历元的定春分点的时角 $T_m-\mu$ 代 T_m，这里以 μ 表示赤经上的岁差. 时刻 t 表为与以上相同的单位，自同一原点出发，则得[1)]

$$\mu=307^s.240\,t+0^s.0929\,t^2$$

因此

$$T_m-\mu=T_0+\Lambda+(36625.86400^s-122^s.698)t$$

由与以上类似的推理得

$$B=86400^s\frac{36525}{36625}[1+3.8774\cdot10^{-8}+(2.2916+1.8981t+2108\Delta B)10^{-8}]$$

$$=86164^s.09890+(0^s.00197+0^s.001635\,t+1.816\Delta B)$$

历书经圈对于恒星的自转周 $R_E=86154^s.09890$. 至于地球对于恒星的自转，其长度为

$$R=86164^s.10087+0^s.001635\,t+1.816\Delta B$$

以上求得的 J_m，J_0 与 S_m 之值，是从 L_0 的系数的约定值和同样是约定的 B 的定义而得来的. R 之值，除 μ 之外，还与赤经上的岁差有关. 如果修改了 μ 的表达式，便应将 R 的计算也加以修订.

§ 65　民用年，历法，儒略周期

近代历法的民用年尽量与回归年的长度接近，由于回归年规定四季的来复，因而它是构成气象与生物现象的基本周期.

1) 表 XVI 内 μ 的表达式，改变了时间的单位以后，导至 $T_2=0^s.0932$. 纽康所给出的数值 $0^s.929$，是据岁差的暂用值算出的. 但 $T_m-\mu$ 里的 t^2 之项，在经典理论恒等于零，这里也是这样的.

公元前45年儒略恺撒采取亚历山大城的天文学家索西尼斯(Sosigenes)的建议，以365.25日为民用年的长度，方法是在每三个长365日的平年之后，置一个长366日的闰年．可是，喜帕卡斯于前一个世纪已经说过，回归年比365.25日稍短，而恒星年比365.25日稍长．在儒略历法里，年数之能以4除尽的均作为闰年．

利用纽康所定的回归年的长度，容易明白一个儒略世纪的长度比对应的一百个回归年所长之量为

$$0^{\mathrm{d}}.7681+0^{\mathrm{d}}.000614S$$

S表公元的世纪数．例如，对于公元1世纪，这个超差数为0.769日；对于11世纪为0.775日；对于21世纪为0.781日．儒略历的年与回归年之差，对于以上三个世纪分别在130，129与128年内产生一日的离差．

儒略历里春分日期常向前推进，其推进之量恰等于刚才所算出的．公元325年尼塞(Nicée)会议之时，春分降临于3月21日，可是到了1582年，即经过1257年之后，春分日推进了十日，太阳于3月11日便过春分点了．为了恢复原先的规定，教皇格列高里十三世决定于1582年10月5日将日期削掉十日，即将10月5日改为15日[1]．自那时以后，便规定世纪年数之不能以400除尽的概不置闰(但在儒略历是闰年)．故1600与2000年是闰年，而1700，1800，1900，2100等年不闰，因此格里历每400年只有97个闰年，于是格里年的长度为

$$365^{\mathrm{d}}+97^{\mathrm{d}}\div 400=365^{\mathrm{d}}.2425$$

这个数字比回归年还长了一点，而且两者之差将继续增长．容易证明格里历与回归年的历法的平均差(这差在1582年假设为零)为下式所给出：

$$0^{\mathrm{d}}.01845\left(\frac{M}{100}\right)+0^{\mathrm{d}}.000307\left(\frac{M}{100}\right)^2-0^{\mathrm{d}}.369$$

式内M表示公元的年序数．当$M=4317$时，上式之值为1，换句话说，即现行历与回归年之差到公元4317年达到一日．如更计入日子的长期增长，这时期当提早到公元3950年．

自有历史以来，人们使用了很多种历法，而且有些是没有什么规则的[2]，记时的方法亦是多式多样的，因此一桩历史事件常难于考订其发生的日期．即使在今天，有时我们也难于判断所谈的某个时刻是对于哪一个经圈而言的，是天文时抑或民用时，哪一个区时或夏季时．这种混乱状况是由于太多的或不成熟的改革所造成的．

两个日期中间所经历的日数的计算，由于几种主要历法对照表[3]和为年代学家所编制的*儒略周期*而得到很大的便利．这一周期的开始订在公元前4713年1月1日正午(世界时)，废弃年与月，而只以日为不断的序数．由于日子的十进小数是从正午起算，故儒略日与民用日不是一致的，换言之，即日子的小数表为天文时或平时，而不表为民用时．法国天文年历里载有儒略历、格里历和儒略周期的对照表，从公元前600年到公元后2400年．

1) 这个取消十日的办法，在日期上虽然是一个跳跃，但于星期的次序上却保持不变；1582年10月4日是星期四，其次日虽然改为15日，而仍是星期五．

2) 恺撒死后，他所颁布的历法，很快就陷入混乱情况．教长们随意将平年改为闰年，奥古斯特帝更随意将小月改大，二月的日子削减．

3) 如陈垣：中西回历对照表；高均：史日长编及辞海中的中国历史纪年表之类——译者注

例如 1950 年 1 月 1 日正午（世界时）在儒略周期里的日序是 2433283 日[1]（参看本书后面的表 XI）.

天文工作者用儒略周期记录变星的光度观测，分光双星的视向速度观测，以及其他短周期现象的观测．自格林尼治平午以后所经过一日的分数表为一日的小数[2]．这是今天唯一使用格林尼治平时之处，至于格林尼治民用时或世界时使用于其他一切情形．将时、分、秒化为日的小数，可利用本书后面的表 VIII.

1）我国紫金山天文台编的“中国天文年历”，也有儒略日附表，刊载自公元 1880 年到 2000 年每月 0 日世界时 12^h 的儒略日序．例如：公元 1980 年 1 月 1 日正午的儒略日序是 2444240——译者注

2）1925 年开始，天文年历里以民用时代替天文时，便使一些观测者在用儒略周期记录日子时，亦遵照民用时的办法．但 1928 年国际天文协会决定，在儒略周期的记法上仍用旧制，以避免前后有两种不同的记法．若我们遇见 1925 至 1928 四年间的儒略日，如作者不加说明，读者不能辨别日子的分数是照哪一种记法．年代学的记法上一有改变，便会产生不确定的现象，因此如无绝对必要，以不更改为宜．

第八章　相对位移的几何效应(视差与自行)

第六章研究的光行差是相对速度的一种光学效应，这一章要讨论的视差却是相对位移的一种几何效应．所以这是迥不相同的两种效应，但它们的理论却表现类似的形式，因而初学者可能将这些类似的形式混淆为一．

本章先研究恒星的周年视差，然后讨论自行．视差和自行的测量是恒星天文学的基本工作，由于这两方面的成就，使我们才对恒星宇宙的结构有比较多的了解．

本章第二部分专门讨论周日视差．太阳的赤道地平周日视差是天文学的一个基本常数．它为我们提供行星系的绝对大小，从而使我们得以认识伟大的恒星宇宙．这个常数也出现于天体力学的某些理论．它的测定，对于天文工作者，一向是一个很重要但也是很困难的问题．

§66　恒星的周年视差

视差的定义是：观测者由一点到另一点时，他看见一颗星的方向的改变．

设 O 与 O'(图 80 左)分别表示观测者所占的两个位置，A 表一颗星．令 θ 为其原来的方向 OA 与位移 OO' 之间的角，其另一方向 $O'A$ 与 OO' 之间的角为

$$\theta'=\theta+\Delta\theta$$

式内

$$\Delta\theta=\angle OAO'$$

若观测者的位移相当小，使我们可以略去 $OO':OA$ 的平方，则我们可写出

$$\Delta\theta=\frac{OO'}{OA}\sin\theta$$

若我们以 A 表示星在天球上的初始方向点，A' 表示后来的方向点，O' 表示位移的方向点，则这三点在半个大圆上的次序为 O', A, A'(图 80 右)．

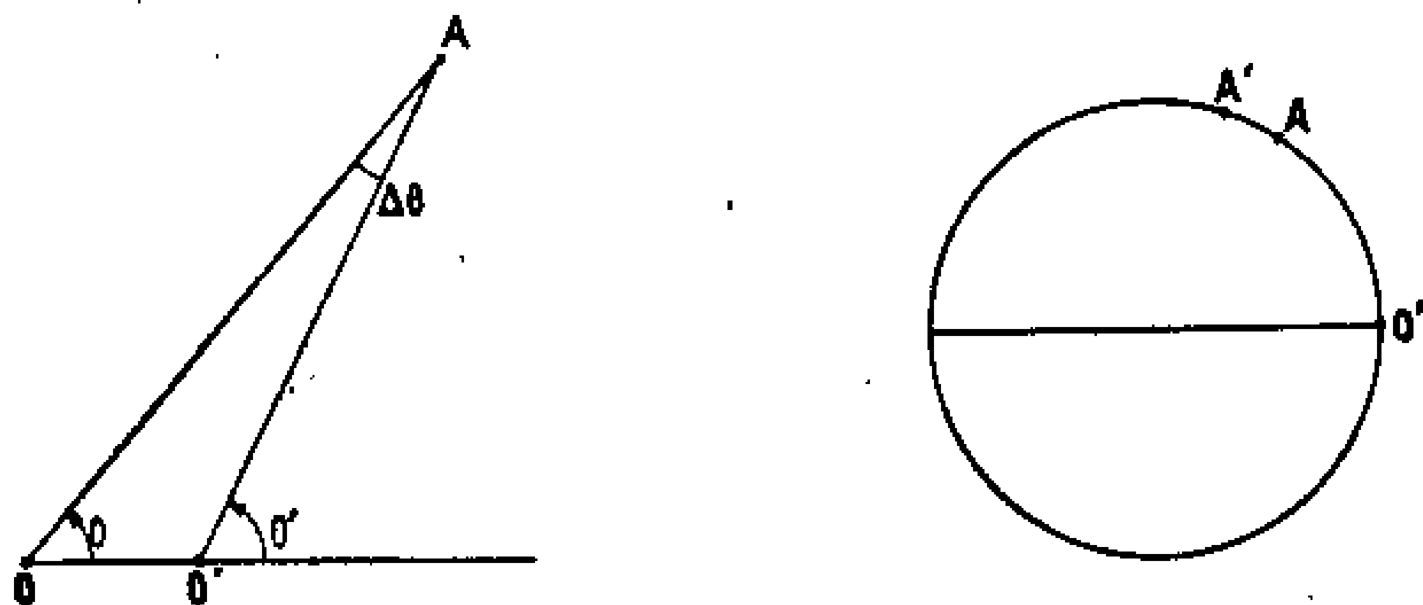


图　80

现在为恒星的周年视差下定义：地球围绕太阳在轨道上运行，恒星的地心方向不与它的日心方向相同，这两方向之间的偏离，随一个恒星年而变化，因而称为周年视差．

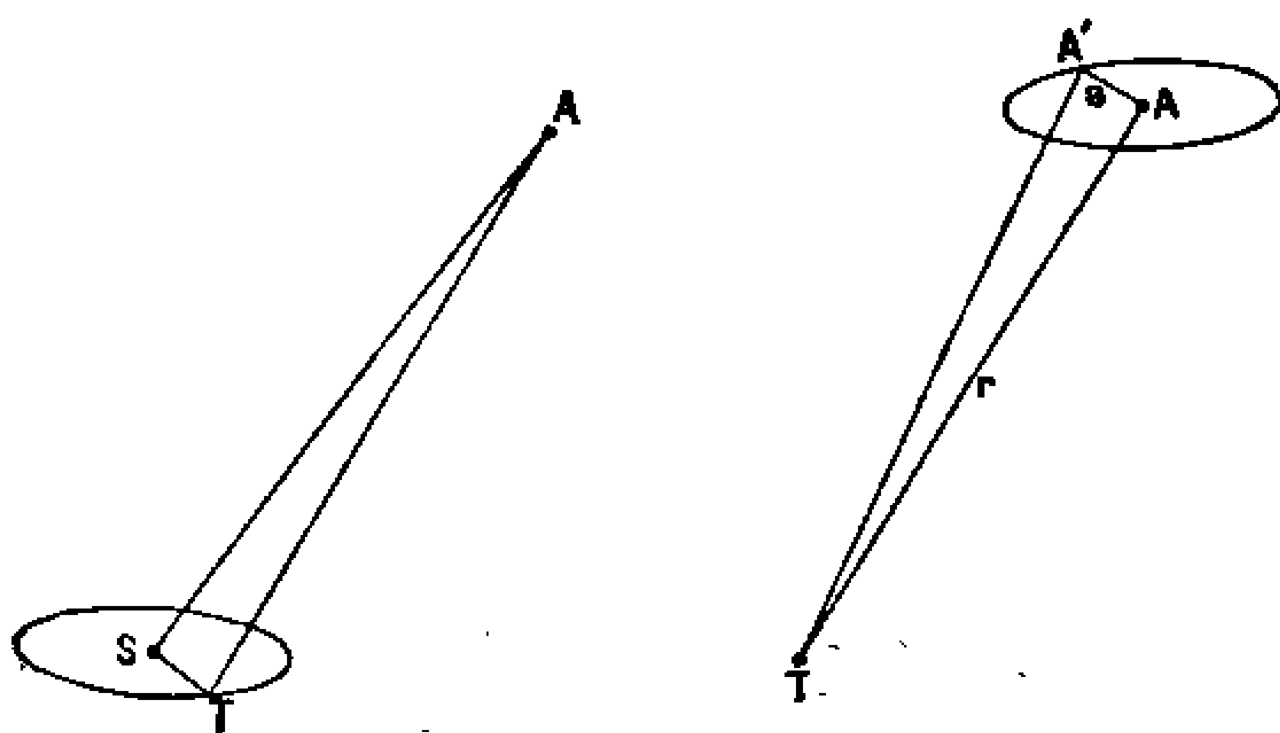


图 81

若将地球的轨道当做黄道面上的正圆，其中心在太阳 S，则恒星对于地上的观测者的相对轨道也是在黄纬圈的平面上同半径的正圆（图 81），星循顺向移动，而落后于地球半个圆周．圆心与地球之间的距离 TA 等于恒星的日心距离 r．在地上观测者眼里，恒星象是在黄纬圈上围绕 A 点走一个椭圆，其半长轴与黄道平行．令 π 为这椭圆的半长轴；它量度恒星的周年视差．于是

$$\sin\pi=\frac{a}{r}.$$

由于 π 角总是很小（$<1''$），以角秒表示，其值为

$$\pi=\frac{a}{r}\times206265''$$

椭圆的半短轴是 $\pi\sin b$．故视差椭圆象光行差椭圆，也被放在相似的地位，循相同的方向，按相同的周期而作成（图 82）．但视差使星的视向接近太阳（因为星从日-地向径所表现的方向点离开太阳），可是光行差使星趋向于地球在轨道上运行的向点，这一点在黄道上落后于太阳 90°（图 83）．换句话说，描绘视差椭圆的点比描绘光行差椭圆的点前进了四分之一周期（3 个月）．而且视差椭圆的轴长与恒星的距离成反比例，而光行差椭圆的轴长则与恒星的距离无关．前者比后者之轴短得很多．

令 θ 表示恒星与太阳两个方向之间的角，则由视差而来的位移，在太阳方向上，可以

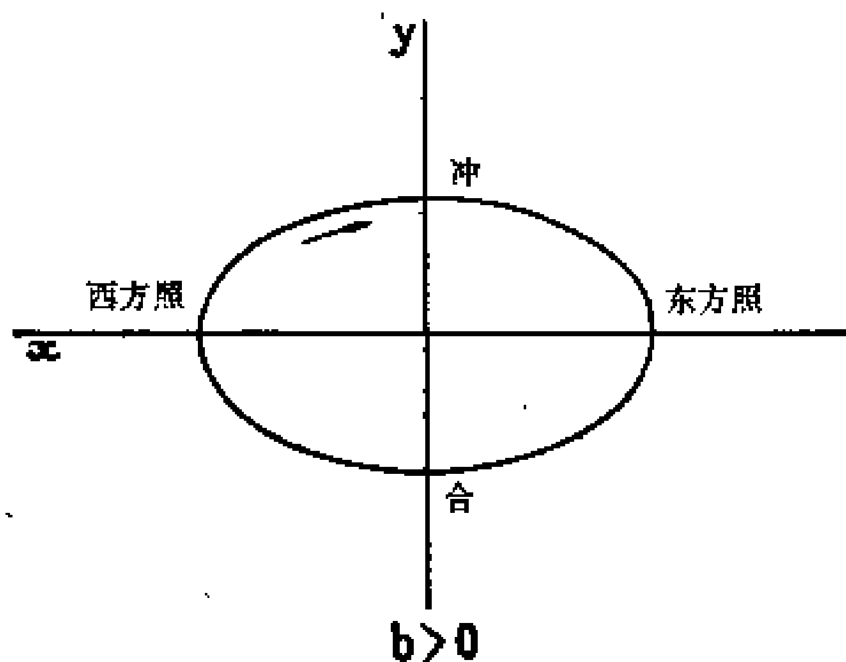


图 82

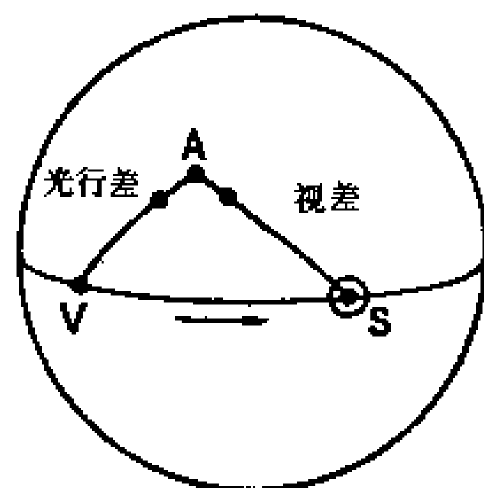


图 83

表达为 $\pi\sin\theta$.

视差的计算方法与 § 5-6 和 § 5-7 里对于两个天球上的坐标系求光行差的方法相似. 我们不在这里详细推导, 只以 π 代 k[1], 以太阳的黄经代地球的向点的黄经, 即在公式里的⊙上加 90°. 计一颗星的黄道坐标为 l 与 b, 赤道坐标为 α 与 δ, 其周年视差的改正值, 以黄道坐标表示, 可写为

$$\left.\begin{aligned}\Delta x&=\cos b\,\Delta l=\pi\sin(\odot-l)\\ \Delta y&=\Delta b=-\pi\sin b\cos(\odot-l)\end{aligned}\right\}$$

表为赤道坐标:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi&=\cos\delta\,\Delta\alpha=\pi[\cos\varepsilon\cos\alpha\sin\odot-\sin\alpha\cos\odot]\\ \Delta\eta&=\Delta\delta=\pi[\sin\varepsilon\cos\delta\sin\odot-\sin\delta\cos\alpha\cos\odot-\cos\varepsilon\sin\delta\sin\alpha\sin\odot]\end{aligned}\right\}$$

(与 e 有关之项均已略去).

将周年光行差与视差集合, 便得椭圆上一点的坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=-k\cos(\odot-l)+\pi\sin(\odot-l)\\ y&=-k\sin b\sin(\odot-l)-\pi\sin b\cos(\odot-l)\end{aligned}\right\}$$

其两半轴为 $\sqrt{k^2+\pi^2}$ 与 $\sqrt{k^2+\pi^2}\sin b$,

而在冲、合、方照四点位置之前一些时间, 动点达到椭圆的四个顶点.

§ 67 恒星的自行

我们常常不言明地假定, 恒星作为整体而论, 是一个不变的参照系; 而每颗恒星对于这参照系可以认为具有匀速直线运动. 例如, 太阳与太阳系对于其附近星群的运动, 向点在武仙座内, 而这速度的数量级为 20 公里/秒. 由这一运动而来的, 在恒星上有一种长期视差, 即这星群里的成员表现有一种趋向背点的缓慢移动. 在前而一种效应上加入每颗星的*特殊位移*(这一位移的方向是任意的). 这两种效应合成的角位移, 即是恒星对于太阳的位移, 这叫做恒星的*自行*.

在一切情况相同的情况下, 愈近的星自行愈大. 所以我们认为, 可以利用很暗弱的星(据统计言也是很远的星), 作为定标星去测定太阳附近的星的自行与周年视差.

自行由其速度与方向而测定; 前者表为每年或每世纪若干角秒. 设 μ 表示年自行, ω 表示星的方位角, 则其在赤经与赤纬上的支量可以表达为

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha&=\mu\sin\omega\sec\delta\\ \mu_\delta&=\mu\cos\omega\end{aligned}\right\}$$

自行的统计研究表现恒星的*长期视差*, 即太阳对于其近邻恒星的运动; 长期视差也是恒星在距离上的分布的一种表现. 这是恒星天文学重要的一章, 但不属于本书的范围.

测定自行的方法是将同一天区相隔几十年的照片加以比较. 我们将照片上暗弱的星作为固定的定标星. 但是, 我们也可用亮星作为定标星; 只要我们已有了这些星的足够久

1) 这里 π 表示恒星的视差, 而不是近地点的黄经 ϖ. 由于这里略去了地球轨道的偏心率, 因而不可能发生混淆.

的子午观测，而且其自行是已知的话．图 84 是恒星 BD-4°1244(星等 6，即《尼斯天文台中介星表》的 253 号星)对于 1900.0 的平位置(由于午观测推出，最早的一次观测在 1804 年)．这是在观测的视位置上加以岁差、章动和光行差的改正而归算到 1900.0 的．由图可见，这颗星的年自行相当大：

$$\mu_\alpha = +0^s.0034$$

$$\mu_\delta = -0''.237$$

这与观测的偶然误差差不多相等．

下表载绘出图 84 的几个位置：

时 期	对于 1900.0 的平坐标	
	$\alpha = 5^h43^m$	$\delta = -4°6'$
1804	$36^s.39$	$55''.4$
1860	36.61	71.7
1885	36.73	76.4
1892	36.80	78.0
1903	36.77	79.6
1919	36.87	84.1
1930	36.90	86.2

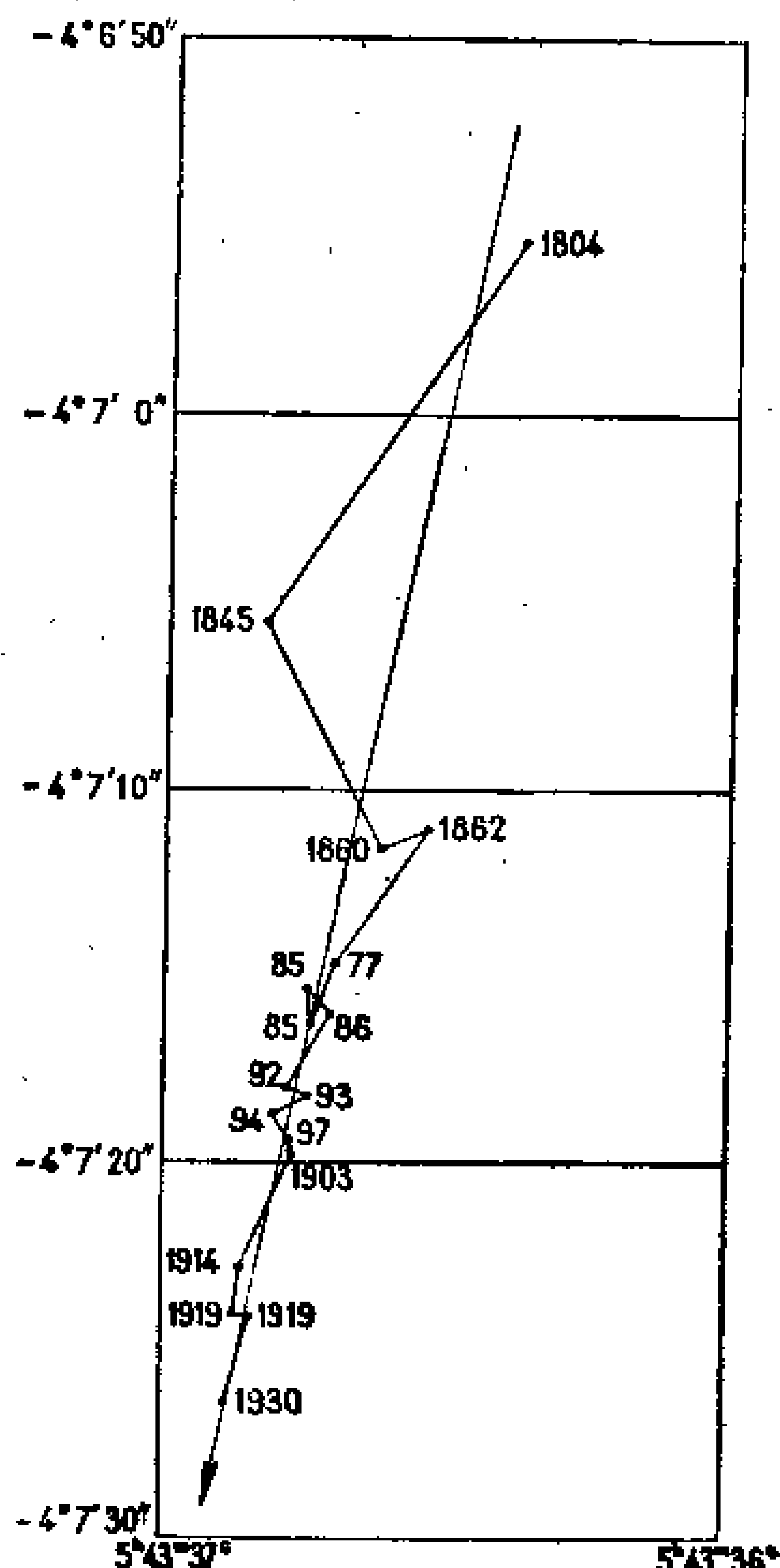


图 84 BD-4°1244 星的自行归算到 1900.0 的春分点的平位置，注意观测的逐渐改进

6 等星的自行一般比这颗星小得多，在每世纪内只有十分之几秒的数量级．

自行常加在岁差上．因此我们须在平坐标上加以如下的改正：

$$\Delta\alpha = \mu_\alpha(t - t_0)$$

$$\Delta\delta = \mu_\delta(t - t_0)$$

t_0 表示为编星表时所作的观测的平历元．

精密星表里载有由较差岁差而来的自行的长期变化．

§ 68 视差与自行的测量

设 A 与 B 为天球上很邻近的两星，但对于观测者的距离却差别很大；例如，设 A 星的视差大于 B 星的视差．试研究它们的相对位置在一年间的变化，如有必要还须改正较差岁差、章动与光行差(自然还有蒙气差)．由于这两颗星的视差椭圆是相似的(位置与描绘的方式均相似)，A 星对于 B 星的相对轨道也是一个椭圆，与前两个椭圆相似，而其半长轴等于两星的视差 $\pi_A - \pi_B$ 之差．我们将这一差数叫做 A 对于 B 的*相对视差*，而 π_A 与 π_B 则称为*绝对视差*．

据原则说，我们可以比较一颗星在两次方照之时，由子午观测所推出的绝对位置，而求得其绝对视差．因为星在方照之时，正是其视差位移最大之际，因而所观测到的位置是视差椭圆的长轴的顶点(图 82)．将视位置改正了蒙气差，并归算到当天，且改正了自行

之后，我们便得两个平位置，其间的距离就等于 2π. 遗憾的是，子午仪的绝对观测远远达不到寻求视差所需的精度，只对于和太阳很接近的几颗星才有结果.

反之，即使对于比较远的恒星，相对视差可由照像观测而得到相当满意的结果. 我们将欲研究的星所在的天区，在星居两个方照之时，各拍照一次. 我们将两张照片叠合，使定标星的像 B, C, $D\cdots$两两重合，则 A 星的两像 A_1 与 A_2 之间的距离，就是其相对于 B, C, $D\cdots$星的视差的两倍. 根据这些定标星的星等，我们可对它们的绝对视差的数值，作出一个可以接受的假设，因而可以推算出 A 星的绝对视差.

将两张照片叠合无差是不可能的，因此我们分别测量每张底片上许多颗星的坐标，再根据一种特别设计的方法来求视差，而且可将较差蒙气差、光行差以及两次拍照时焦距改变的效果一并消去*.

没有一颗星的视差大到 $1''$, 换句话说，最近的星的距离也超过 206265 天文单位. 因此，为了表示恒星的距离，须采用另外一种单位. 这单位叫*秒差距*，即相当于视差为 $1''$ 的星的距离. 根据秒差距的定义，其距离为 206265 天文单位. 光经过这段距离需要

$$498^s.7 \times 206265 = 3.26 \text{ 年}$$

在通俗书里用的*光年*，作为距离的单位，等于 0.306 秒差距.

令 π 表示以角秒计的一颗星的绝对视差，r 表示以秒差距计的距离，则 r 是 π 的倒数.

例如，半人马座 α 星的视差为 $0''.761$, 则其距离为 1.314 秒差距(P). 只有 8 颗星的距离小于 $3P$; 将太阳一并计算在内，只有 40 颗星(其中一些是双星)在 $5P$ 范围之内; 距离太阳短于 $10P$, 即视差超过 $0''.10$ 的星总共亦不过 300 颗 (这不代表这范围内的全部恒星，也许还有一些未被发现). 超过 $100P$($\pi<0''.01$)的星的相对视差的测定便很不可靠，但还有其他物理的、动力的和统计的方法可以间接地求出恒星的距离，虽然其视差小到不能作直接的测定. 由几何方法直接测定的视差叫做*三角视差*，以区别于其他间接方法推算出的视差. 但须知道间接方法并不能使三角法无用，反之三角法却是其他一切方法的基础，而有其基本的重要性.

这里提说一下：以秒差距表示的距离，其量纲并不是长度，不能使其与任何标准发生联系. 这是一个无量纲的数，其精确的表达式为

$$\frac{1''}{\arcsin \dfrac{a}{r}}$$

这样有一个优点，即表达恒星宇宙里的距离的数字，便与太阳视差的数字无关. 反之，假使我们采取一种长度作为单位，如将其附属于米制或光年，那么太阳视差的数字一有修改，则用以表达恒星宇宙里的距离的数字亦须修改. 使用秒差距，就没有这种不便.

第一个三角视差的测定在 1838 年，对象是天鹅座 61 号星. 白塞耳用量日仪对这颗星和比较星作三角网的测量，而求得其相对视差为 $0''.314$, 与最近测得的数字 $0''.294$(绝对视差)，相差很少. 同年斯特鲁维(W. Strnve)用动丝测微器求得织女一(天琴座 α 星)的视差为 $0''.125$, 也和以后测定的数字($0''.133$)相合. 最后，1839 年亨德森(T. Henderson)由半人马座 α 星的子午观测，推出其视差为 $1''.14$, 跟着修改为 $0''.98$, 但今天公认的数字是

* 读者对于这个问题若感觉兴趣，可参考照像天体测量学专书——译者注

0″.76. 由于这些结果的接近程度,可见较差测量法比绝对的子午观测法优越得多.

还须提说一下:求视差的照像法,同时也求得自行(如其不太小的话). 原来自行与视差组合而成的轨迹是环圈状的(图 85). 在连续三次方照时所作的观测,给出像图中 A, B, C 那样的三个位置,根据这些位置,我们显然可以同时推出恒星的 μ 与 π.

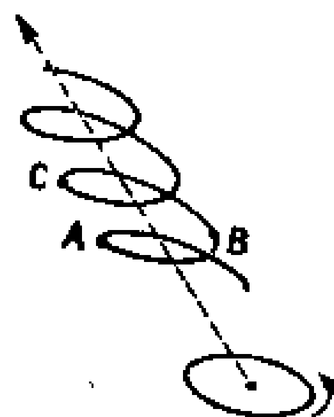


图 85

可是这方法,只在自行表现出有可测量的位移时,才能提供自行. 事实上凡是视差可以测量的恒星,一般也有相当大的自行. 但是在普遍的情形,我们只能比较相隔很远的两个时期的观测,去推出恒星的自行. 前节所举的一例,便是比较一百多年的子午观测而求得的自行. 那是属于基本坐标系的绝对自行. 不同时期所拍的照片的比较,是测定相对自行的一种方法. 我们取微弱的星为定标点,而假设其自行对于基本坐标系为零或小到可以忽略的(这假设应于事后加以证实). 为编制全天照像星表,在十九世纪末年所拍的照片,可与现今用同样的仪器所拍的相同天区比较,而得出结果. 这些照片上对于背景星,即对于距离远的暗星,有显著位移的星一定不少[1].

这样,我们用照像法求得很多三角视差不能量出的恒星的自行.

§ 69 太阳、行星与彗星的周日视差

星历表提供天体的地心坐标,即归算到地球中心的坐标. 观测是在地面观测站作的,即由观测所提供的坐标,是对于同地心坐标的轴相平行,而原点在观测站而言的;因此后而这种坐标叫做*地面坐标*. 与这种改变原点而来的视差叫做*周日视差*,因为它是随被观测的天体的时角而变化的.

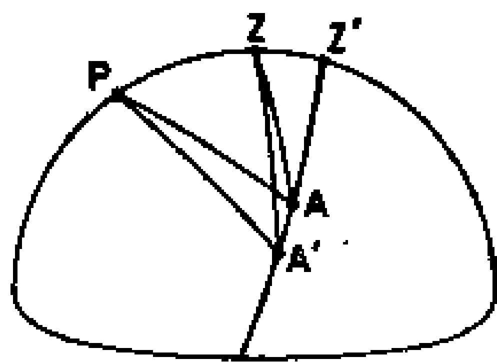


图 86

令 Z 表示观测站的天顶(图 86),A 为天体的地心方向的代表点. 由于地心不在铅垂线上,地心与观测者联线的方向以 Z'("地心天顶")表示,位置在于午圈上,距离天顶 Z 之南 $\varphi-\varphi'$ 处(用 § 18 的符号,这是对于北半球观测者的情形). 所以这里表示位移的方向的是 Z' 点,天体在观测者眼里的方向为 A' 点所表示,此点在大圆 $Z'A$ 上比 A 点稍低一点. 我们将位移

$$P=AA'$$

叫做*总周日视差*. 与这一位移相对应的,在地平坐标与赤道(时角)坐标上都有变化.

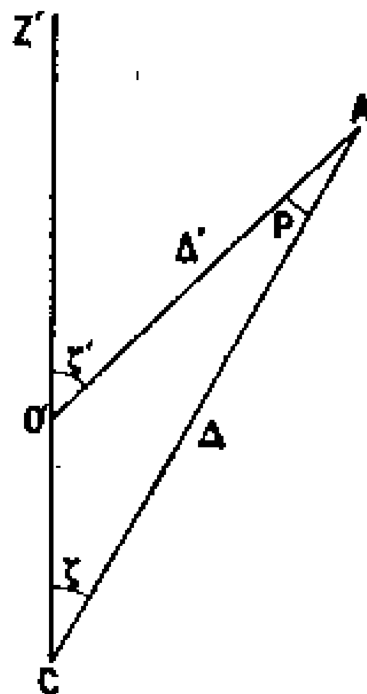


图 87

恒星的周日视差是不显著的,因而这问题只用于太阳系里的天体. 我们先推导近似公式,用以计算太阳、行星与彗星的视差,是足够精确了. 用于月亮的情形的精确的公式,将在本章末后两节叙述.

令 C 表示地心,O 表示观测站(图 87),则

1) 照像星表的底片尺度为每毫米相当于 60″; 可以量出 2 微米,即相当于 0″.12 的位移. 假设今昔拍的照片相距 50 年,则我们可以测得的最小的年自行是 0″.0024.

$$CO=\rho R$$

(关于这些符号的意义，见 § 18). 以 ζ 表示地心角距离 AZ'，以 Δ 表示天体的地心距，Δ' 表示其地面距，则 P 角的近似值为

$$P=\frac{CO}{CA}\sin\zeta=\rho\frac{R}{\Delta}\sin\zeta$$

$R:\Delta$ 之比叫做天体的赤道地平视差，因为这是当天体在地平时 P 在赤道上的数值. 令

$$\frac{R}{\Delta}=\varpi$$

则上式便可写为

$$P=\rho\,\varpi\,\sin\zeta \tag{1}$$

我们已经说明，ZZ' 角不超过 $12'$，可见，A' 点与过 A 点的高度圈相距不远，地平经度上的视差可以略而不计(图 86 里的情况是夸大了的)； 至于地平纬度(高度)上的视差，可以看作是总视差:

$$\left.\begin{aligned}\Delta a&=0\\ \Delta z&=\rho\varpi\sin\zeta\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

赤道坐标(或时角坐标)的视差也可由总视差推导，设以 S' 表示 $PZ'A$ 三角形的星位角，则

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta\Delta\alpha&=-P\sin S'\\ \Delta\delta&=-P\cos S'\end{aligned}\right\}(\Delta H=-\Delta\alpha)$$

将 § 20 末尾推出的公式写在这里:

$$\left.\begin{aligned}\sin\zeta\sin S'&=\cos\varphi'\sin H\\ \sin\zeta\cos S'&=\cos\delta\sin\varphi'-\sin\delta\cos\varphi'\cos H\end{aligned}\right\}$$

最后，由此得

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha&=-\rho\cos\varphi'\varpi\sin H\sec\delta\\ \Delta\delta&=-\rho\sin\varphi'\varpi\cos\delta+\rho\cos\varphi'\varpi\sin\delta\cos H\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

为了计算 $\rho\cos\varphi'$ 与 $\rho\sin\varphi'$，参看 § 18.

我们习惯将太阳系里的距离用地球轨道的半长轴 (天文单位) 来表示. 设 Δ 是以这单位计算的地心距离，可从天文年历里取出. 再设 ϖ_0 表示太阳的平均赤道地平视差 (对于 $\Delta=1$)，我们可令

$$\varpi=\frac{\varpi_0}{\Delta}.$$

引入所谓视差因子的两个量:

$$\left.\begin{aligned}P_\alpha&=\rho\varpi_0\cos\varphi'\sec\delta\sin H\\ P_\delta&=\rho\varpi_0\sin\varphi'(\cos\delta-\cot\varphi'\sin\delta\cos H)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

那么，已知地面坐标 α' 与 δ' 时，求地心坐标 α 与 δ (或逆问题)的公式如下:

$$\alpha=\alpha'+\frac{P_\alpha}{\Delta}\qquad\delta=\delta'+\frac{P_\delta}{\Delta} \tag{5}$$

这里须将 P_α 表为时秒，P_δ 表为角秒.

为计算视差所采用的是 ϖ_0 的公认值，是 $8''.800$.

例　已知火星在 1937 年 5 月 26 日 2 时(世界时)的地心坐标为

$$\alpha=15^h34^m0^s.56$$

$$\delta = -20°27'24''.3$$

$$\varDelta = 0.5089 \qquad \varpi_0 = 8''.800$$

求其在斯特拉斯堡的地面坐标.

$$H = 3^h9^m58^s.49 \qquad \sin\delta = -0.3496 \qquad \cot\varphi' = 0.8881$$

$$\sin H = 0.7372 \qquad \cos\delta = 0.9370 \qquad \varpi_0\rho\sin\varphi' = 6''.565$$

$$\cos H = 0.6757 \qquad \sec\delta = 1.0674 \qquad \varpi_0\rho\cos\varphi' = 0^s.3887$$

$$\left.\begin{array}{l} P_\alpha = 0^s.306 \\ P_\delta = 7''.53 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha' = \alpha - 0^s.60 \\ \delta' = \delta - 14''.8 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = 15^h33^m59^s.96 \\ \delta' = -20°27'39''.1 \end{array}\right\}$$

计算天体的地面视半径 s' 与其地心视半径 s 之差. 容易求得(图 87)下面足够近似的式子:

$$\frac{\varDelta' - \varDelta}{\varDelta} = -\rho\frac{R}{\varDelta}\cos\zeta = -\rho\,\varpi\cos\zeta$$

式内以 ζ 代了 ζ'. 因此很近似地更得

$$\frac{s' - s}{s} = \rho\varpi\cos\zeta$$

这效应对于行星完全没有什么影响. 在太阳的情形,设

$$s = 900''$$

$$\rho\varpi_0 = 8''.8 = 0.000043$$

便得
$$s' - s = 0''.04\cos\zeta$$

太阳在天顶时,其地面视直径比其地心视直径(在地平上观测的)超过之数还不及 0″.1.

计算地面位置 A' 对于地心位置 A 的较差坐标. §11 里的公式给出它们的数值:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\rho\cos\varphi'\dfrac{\varpi_0}{\varDelta}\sin H \\ y = -\rho\sin\varphi'\dfrac{\varpi_0}{\varDelta}\cos\delta + \rho\cos\varphi'\dfrac{\varpi_0}{\varDelta}\sin\delta\cos H \end{array}\right\}$$

假使只有时角变化,这些方程式将代表一个椭圆(其长轴平行于赤道),但只有其中的一段弧可以被观测到(即从星出东地平下西地平).观测者被地球自转带着,在地面一个纬度圈上改位(图 88);在观测者眼里,星的正圆轨道在天球上的射影便是一个椭圆.

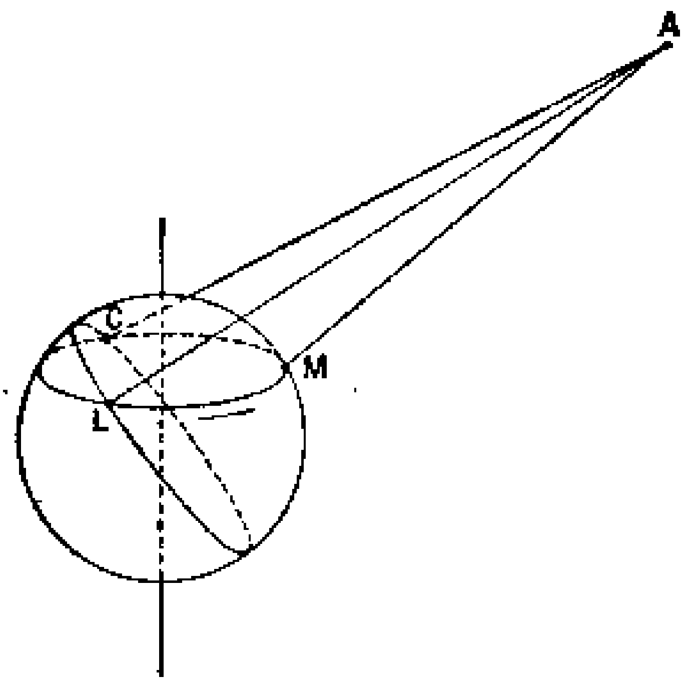


图 88

赤经上的视差与时角上的视差同时为零. 故中天观测不须改正便直接提供行星和彗星的赤经. 于是于午圈上的赤纬视差等于总视差.

视差增加了视天顶距(但蒙气差却减少了它),因而推迟星的出东地平,而提早了星的下西地平. 除月亮(其视差约为 1°,平均值是 57′)以外,视差的效应对于一切天体并不显著. 按 §37 方法计算的太阳下西地平时的时角,如将蒙气差考虑进去,便应该增加,可是月亮下西地平时

的时角应该减小，因为它的视差超过蒙气差，平均为 22′. 因此，为了考虑这两个方向相反的效应，应该使

$$dH=\frac{-1^{m}28^{s}}{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}$$

§70　太阳视差的测量

为了测定太阳的视差，只须测量太阳系里任何一个最接近地球的成员的视差，因此

$$\varpi_0=\Delta\varpi$$

这一测定的相对精度与距离 Δ 成反比例. 大行星中只有金星与火星的距离接近到足以使观测有用. 今天观测的对象是最接近地球的小行星，特别是 433 号小行星(爱神星)，因为瞄准这种恒星状的星点比圆轮状的大行星精确得多. 为完成这一目的，曾举行过两度国际联合观测. 参加观测的天文工作者在天文台里整夜拍照爱神星，然后在照片上测定它对于附近已知坐标的恒星的位置. 每个观测可以适合如下形式的方程式:

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\alpha-\frac{\varpi_0}{\Delta}\rho\cos\varphi'\sec\delta\sin H\\ \delta'&=\delta+\frac{\varpi_0}{\Delta}\rho(\cos\varphi'\sin\delta\cos H-\sin\varphi'\cos\delta)\end{aligned}\right\}$$

式内 α 与 δ 是行星的地心坐标，它和 Δ 都是时间的函数. 将全世界所作的观测代入以上的方程式，使其尽量适合全部方程式(最小二乘法)，于是给出行星的六个轨道根数(将行星所受的摄动计入)以及太阳的视差 ϖ_0.

用这方法决定太阳的视差须同时决定月亮的质量. 原来月亮运动的理论所提供的，不是围绕地球中心的轨道，而是围绕地–月系的质量中心(引力中心)的轨道. 设以 r' 表示月亮的距离，而以 m 和 m' 分别表示地和月的质量，则引力中心距离地心为

$$r'\frac{m'}{m+m'}$$

对应的视差叫做*月周差*，它影响太阳和行星的地心坐标；在上下弦时，这差对于太阳可达 6″.44. 它介入到要测量视差的行星的坐标 α 与 δ 的表达式里，因此 m/m' 之比应作为未知数而考虑进 ϖ_0 去. 由此可见，方程式的建立(因而比较星的位置须作精确的测定)与其解决是很繁重的工作. 第一次国际合作观测爱神星在 1900—1901 年. 经过十年的测量与计算，欣克斯(Hinks)得出

$$\varpi_0=8''.806\pm0''.004\text{(目视观测)}$$

第二次观测在 1930—1931 年，经过长期的预备和仔细的工作，精度远比前一次的高，而爱神星冲日时距离地球由前次 0.32 而缩短到 0.17 天文单位. 第二次的观测经斯宾塞尔·琼斯整理，推出太阳的视差为

$$\varpi_0=8''.790\pm0.001$$

与 §18 所给出的地球赤道半径联系，便得

$$a=149675000\text{ 公里}$$

爱神星发现以前，这方法已经应用于小行星 Victoria Iris 与 Sapho，分别得出如下的结果:

$$8''.801 \qquad 8''.798 \qquad 8''.812$$

我们还可用别的间接方法去求 ϖ_0 的数值．例如由光速的测量来求天文单位为若干公里，更假设由木卫的观测求得经过这距离的光行时(见 §52)为

$$\tau = 498^s.64^*$$

$$c = 299792 \text{ 公里/秒}$$

于是算出

$$a = 149487000 \text{ 公里}$$

与

$$\varpi_0 = \frac{6378.388}{149487000} \times 206265'' = 8''.801$$

我们还可从周年光行差常数(取普尔科沃的数值 20″.512 见 §55)，去求光行时差 τ

$$\tau = \frac{k}{n}\sqrt{1-e^2} \cdot 86400^s = 499^s.41$$

由这个新数值得出

$$a = 149720000 \text{ 公里}$$

$$\varpi = 8''.787$$

由分光观测求得的 k 的数值(见 §52)算出

$$\varpi_0 = 8''.787$$

最后，在月亮与行星的开普勒运动上所受的摄动，对有一些摄动项的测定，可以提供太阳的视差；因为在理论上，这些项含有太阳视差作为一个因数．其中最适用的一项叫做*月角差*，它与 $\sin(☾ - ☉)$ 正比．式内 ☾ 与 ☉ 分别表示月亮与太阳的平黄经．天体力学所提供的表达式里，这一项的系数的形式为 $S\frac{\varpi_0}{\varpi'}$，$S$ 是数字系数．其值达到超过要求的精度，ϖ_0 表示太阳的视差，ϖ' 表示月亮的平均视差，后一视差由地球赤道上量出的重力的数值推出，其精度达十万分之几．布朗求得

$$\varpi' = 57'2''.70$$

我们可以由观测决定月角差的系数；根据最近的测定 (Brouwer 1950)，这系数是 124″.969．由此推出太阳视差的数值为

$$\varpi_0 = 8''.7925$$

行星摄动的方法应用起来更加繁难，以前的结果都不很好． 1950 年腊布(E. Rabe)刊布他对爱神星于 1926—1945 年间所受的摄动的研究，求得太阳的视差为

$$\varpi_0 = 8''.79835 \pm 0''.0004$$

比较以上最精密的结果(斯宾塞尔-琼斯与腊布)，可见其中的差异六倍于其可几误差之和．光行差常数与月角差常数的最新测定值似有可取，可是现在对于这些独立的测定值之间的不协调的困难，还没有适当的解释，虽然它们各有其可靠的保证．

太阳视差的最早测定在十七世纪[1]．那时所用的方法，载于天文学古书里，名叫*赤纬法与赤经法*，是以上所说的方法的特殊情形．赤纬法需要两位观测者在同一经圈上纬度相隔很远的两处．由于这个条件只能近似地得到满足，于是观测者约定当行星的赤纬留时(即其变率为零时)，作同时的观测．他们各自测定行星(火星)中天时的赤纬．令 δ_1 与 δ_2 为由观测而得的地心赤纬，z_1 与 z_2 为其天顶距，按不同的情形有

* 此值为英国人森波逊(Sampson)于 1910 年测得——译者注

1) 哥白尼与第谷布拉赫认为太阳视差是 3′，大于实际 20 余倍．

$$\delta_2-\delta_1=\varpi(\sin z_1 \pm \sin z_2)$$

由这方程式可求 ϖ，因而推算 ϖ_0 1672 年皮卡尔在巴黎，里切尔(Richer)在南美圭亚那的卡晏(Cayenne)同时观测火星，经卡西尼整理，计算得

$$\delta_1-\delta_2=15'' \qquad \varpi=25''.5 \qquad \varpi_0=9''.5$$

赤经法的优点是可由一位观测者在同一地点去完成这一工作．当行星的赤经留时（运动不大时，可将其考虑到计算里去），天文工作者在一夜里观测其赤经的变化(图 88)．观测者选定一颗作为比较的恒星，然后量它与行星经过望远镜焦面上平行于时圈的一根定丝中间所经历的时间．第一次观测在行星出东地平以后，第二次在下西地平以前，于是其较差视差为

$$\Delta\alpha=\varpi\sec\delta(\sin H_1-\sin H_2)\cos\varphi'$$

H_1 与 H_2 表示两次观测时行星的时角(这里假设行星正在留中)．这方程式给出 ϖ．1672 年 9 月 9 日，卡西尼在巴黎观测火星，记录下在 8^h36^m 与 15^h56^m(地方天文平时)它的观测点的地面赤经减少了 $21^s.5$，而其地心赤经由前后几日的观测，推出只改变了 $19^s.75$．由这两个数字之差，得出视差的效应为

$$\Delta\alpha=1^s.75 \qquad \varpi=24''.75 \qquad \varpi_0=9''.3$$

1761 与 1769 年金星凌日的观测给出更精确的视差，这是赤纬法的另一表达形式．不过这里以太阳的圆面作为测量视差所需的比较星而已．观测者记录下金星进和出太阳圆面的时刻；但是由于光的衍射和大气的扰动，使星像模糊使观测困难面不确定．最初两次金星凌日观测，求得太阳视差为 8″.81 最近两次(1874 与 1882 年)的结果对从前的测定并没有什么改进．纽康综合这四次凌日观测，求得 $\varpi_0=8''.794$ 和相当大的可几误差．小行星的观测机会较多，而所提供的观测条件亦比较优良，因而可以得出比较精确的 ϖ_0*．

§ 71　月亮的情形，总视差，地平坐标上的视差

若所需要的精确度只在 1′ 的数量级，§ 69 里的公式已经可用以计算月亮的视差．但若追求更高的精确度，便应当使用精确的公式，现在推导如下．先计算总视差．

首先说明视差的定义．在这里设

$$\sin\varpi=\frac{R}{\Delta}$$

ϖ 角表示地球的赤道半径在月心所张的角．令 Δ_0 表示月亮的平均距离，ϖ_0 与 s_0 分别表示对应于 Δ_0 的月亮的视差与视半径．显然有

$$\sin\varpi=\frac{\Delta_0}{\Delta}\sin\varpi_0$$

以 k 表示月亮(假设为球形)的半径与地球的赤道半径之比；在距离 Δ 处，月亮的视半径 s 可表示为下列的关系式：

---

* 综合以上各种天文方法，在本世纪内测得的天文单位的数值，介于 149,400,000 到 149,700,000 公里之间，相差达几十万公里．近年来由于无线电技术发展，人们使用雷达来探测行星际的距离，从而计算天文单位，得出了优良的成绩；不但屡次观测的结果相当符合，而且精确度也较以前用天文方法得到的高得多．根据精确的雷达测定，目前认为太阳视差的精确值是 8″.79405，与之相当的天文单位的数值是 149,600,000 公里；而由是算出的光行差时为 499.012 秒，光行差常数为 20″.4958；已于 1964 年经国际天文协会大会公布采用——译者注

$$\sin s = k\frac{R}{\Delta} = k\sin\varpi$$

为日月食的计算,常取

$$k = 0.272274$$

为月掩星的计算,取

$$k = 0.27250$$

(见十四章). 现在以 Δ' 和 s' 分别表示月亮的地面距离与视半径, 则

$$\sin s' = k\frac{R}{\Delta'} = \frac{k}{q}\sin\varpi$$

这里设

$$\Delta' = q\Delta$$

设 ζ 与 ζ' 分别表示月亮的地心与地面的天顶距, 起算点不是真正的天顶, 而是前节所规定的另外一点 Z'. 精确的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\Delta'\cos\zeta' &= \Delta\cos\zeta - \rho R\\ \Delta'\sin\zeta' &= \Delta\sin\zeta\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}q\cos\zeta' &= \cos\zeta - \rho\sin\varpi\\ q\sin\zeta' &= \sin\zeta\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

已知 ζ, ρ 与 ϖ 时, 可由(1)求 q 与 ζ'.

更由 § 20 的公式(2)有

$$\cos\zeta = \sin\varphi'\sin\delta + \cos\varphi'\cos\delta\cos H$$

(1)式便可立刻解出为

$$\left.\begin{aligned}\tan\zeta' &= \frac{\sin\zeta}{\cos\zeta - \rho\sin\varpi}\\ q &= \sqrt{q^2\cos^2\zeta' + q^2\sin^2\zeta'}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

由简单的组合更可得

$$\left.\begin{aligned}q\sin(\zeta'-\zeta) &= \rho\sin\varpi\sin\zeta\\ q\cos(\zeta'-\zeta) &= 1-\rho\sin\varpi\cos\zeta\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

由此得总视差:

$$\tan P = \frac{\rho\sin\varpi\sin\zeta}{1-\rho\sin\varpi\cos\zeta}$$

例 对于纬度为 $+48°35'0''.0$, 高度为 156 米的地点(见 § 18 里的例), 求月亮的总视差与视半径; 已知月亮的坐标在观测时为

$$\left.\begin{aligned}H &= 5^h43^m24^s.88\\ \delta &= +16°38'32''.8\\ \varpi &= 3417''.04\end{aligned}\right\}$$

对于这地点, 已经求得

$$\left.\begin{aligned}\varphi' &= 48°23'29''.48\\ \rho &= 0.9981379\end{aligned}\right\}$$

于是依次得

$$\sin\varpi = \varpi - 0''.16 = 3416''.88 = 0.0165655$$

$$\rho\sin\varpi = 3410''.52 = 0.0165346$$

$$\cos H = 0.0723040 \qquad \cos\varphi' = 0.6640369$$
$$\sin\delta = 0.2863982 \qquad \sin\varphi' = 0.7476998$$
$$\cos\delta = 0.9581107$$
$$\cos\zeta = 0.2601412$$
$$\zeta = 74°55'17''.62$$
$$\sin\zeta = 0.9655706$$

方法 1:
$$\left.\begin{array}{l} q\cos\zeta' = 0.2601412 - 0.0165346 = 0.2436066 \\ q\sin\zeta' = 0.9655706 \end{array}\right\}$$
$$\cot\zeta' = 0.2522929 \qquad \zeta' = 75°50'24''.64$$
$$\left.\begin{array}{l} P = \zeta' - \zeta = 55'7''.02 \\ q = 0.995827 \\ \sin s' = 934''.23 \quad (k = 0.272274) \\ s' = 934''.23 \end{array}\right\}$$

方法 2: 预备的计算同前.
$$\tan P = \frac{3293''.10}{0.995699} = 3307''.32$$
$$P = 3307''.04 = 55'7''.04$$

现在研究地平坐标上的视差;假设地是球形的,则地平经度上的视差为零. 近似的计算使我们知道 Δa 的数量级. 于是(见图 86, 并用 § 69 的符号):
$$\Delta a = P\sin\Delta S\sec\zeta$$
式内
$$\sin\Delta S = \sin(\varphi - \varphi')\frac{\sin A'}{\sin\zeta}$$
A' 角是对于 Z' 点的地平经度,ΔS 表示 $ZA'Z'$ 角.

引入以上求得的 P 的近似值:
$$P = \rho\sin\varpi\sin\zeta$$
最后求得
$$\Delta a = \rho\sin\varpi\sin(\varphi - \varphi')\sin A'\sec\zeta$$
这个量的数量级与 $\varpi(\varphi-\varphi')\sec\zeta$ 相同. 除了月亮在天顶附近之外,它常是一个很小的二阶量.

图 89

令 a, z 与 Δ 表示天体的地心的地平坐标与地心距离;而 $a'z'$ 与 Δ' 表示其地面的地平坐标与地面距离. 求以直角坐标为中介(图 89),计算后面这一些数字. 这两种坐标系可表为
$$\left.\begin{array}{l} x = \Delta\sin z\cos a \\ y = \Delta\sin z\sin a \\ z = \Delta\cos z \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x' = \Delta'\sin z\cos a' \\ y' = \Delta'\sin z'\sin a' \\ z' = \Delta'\cos z' \end{array}\right\}$$
至于观测地的地心坐标可写为
$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \rho R\sin(\varphi - \varphi') \\ y_0 = 0 \\ z_0 = \rho R\cos(\varphi - \varphi') \end{array}\right\}$$
经过简易的转化以后,坐标改变的公式为

$$\left.\begin{aligned} q\sin z'\cos a' &= \sin z\cos a - \rho\sin\varpi\sin(\varphi-\varphi') \\ q\sin z'\sin a' &= \sin z\sin a \\ q\cos z' &= \cos z - \rho\sin\varpi\cos(\varphi-\varphi') \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

最简单的解法是用给定的数据先计算 (4) 式的右端，去求 $\tan a'$，$\tan z'$ 与 $q=\Delta':\Delta$ 的数值．我们也可组合(4)式，去推导地平经度上与天顶距上的视差的表达式，但我们被导至稍长的数字计算，而对于结果的精度并没有什么增加．

例 对于前例所说的地点，计算月亮的地面坐标，已知其地心坐标为

$$\left.\begin{aligned} a &= 98°11'18''.9 \\ z &= 74°53'38''.9 \\ \varpi &= 3417''.04 \end{aligned}\right\}$$

演算

$$\begin{aligned} \sin a &= 0.9898046 & \rho\sin\varpi &= 0.0165346 \\ \cos a &= -0.1424317 & \varphi-\varphi' &= 11'30''.52 \\ \sin z &= 0.9654460 & \sin(\varphi-\varphi') &= 0.003348 \\ \cos z &= 0.2606033 & \cos(\varphi-\varphi') &= 0.999994 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} q\sin z'\cos a' &= -0.1375101-0.0000554=-0.1375655 \\ q\sin z'\sin a' &= 0.9556029 \\ q\cos z' &= 0.2606033-0.0165345=0.2440688 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \cot a' &= -0.1439568 \\ a' &= 98°11'30''.63 \qquad \sin a' = 0.9897965 \\ \cot z' &= 0.2528021 \\ z' &= 75°48'45''.91 \qquad \sin z' = 0.9694999 \\ q &= 0.995827 \end{aligned}\right\}$$

如前例求得 s'．这里地平经度上的视差达到 $11''.7$。

§ 72　月亮在时角坐标与赤道坐标上的周日视差

月亮在时角坐标(或赤道坐标，因 $\Delta\alpha=-\Delta H$)的周日视差，像上面所讲的一样，成为由原点移动的直角坐标的改变．以 H 与 δ 表示地心的时角坐标，以 H' 与 δ' 表示地面的时角坐标，以 q 表示地面距 Δ' 与地心距 Δ 之比．这里应设

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \rho R\cos\varphi' \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= \rho R\sin\varphi' \end{aligned}\right\}$$

容易推出下列的联立式：

$$\left.\begin{aligned} q\cos\delta'\cos H' &= \cos\delta\cos H - \rho\sin\varpi\cos\varphi' \\ q\cos\delta'\sin H' &= \cos\delta\sin H \\ q\sin\delta' &= \sin\delta - \rho\sin\varpi\sin\varphi' \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这些方程式的数字解没有什么困难.

例 对于上面所说的那个地点,计算月亮的地面时角坐标;已知

$$\left.\begin{aligned} H &= 5^h43^m24^s.88 \\ \delta &= +16°38'32''.8 \\ \varpi &= 3417''.04 \end{aligned}\right\}$$

对于那地点,我们曾经求得(§ 18)

$$\left.\begin{aligned} \rho\cos\varphi' &= 0.6628003 \\ \rho\sin\varphi' &= 0.7463077 \end{aligned}\right\}$$

我们依次求得

$$\sin\varpi = 3416''.88 = 0.0165655$$

$$\sin\delta = 0.2863982 \qquad \sin H = 0.9973826$$

$$\cos\delta = 0.9581107 \qquad \cos H = 0.0723040$$

$$\left.\begin{aligned} q\cos\delta'\cos H' &= 0.0692752 - 0.0109796 = 0.0582956 \\ q\cos\delta'\sin H' &= 0.9556029 \\ q\sin\delta' &= 0.2863982 - 0.0123630 = 0.2740352 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \cot H' &= 0.0610040 \\ H' &= 86°30'32''.58 = 5^h46^m2^s.17 \qquad \sin H' = 0.9981444 \\ \tan\delta' &= 0.2862347 \\ \delta' &= 15°58'22''.65 \qquad \cos\delta' = 0.9613916 \\ q &= 0.9958266 \end{aligned}\right\}$$

作为练习,证明方程式(1)的转换,可以提供视差的表达式.由前两式容易得出时角(或赤经)上的视差:

$$\left.\begin{aligned} q\cos\delta'\sin(H'-H) &= \rho\sin\varpi\cos\varphi'\sin H \\ q\cos\delta'\cos(H'-H) &= \cos\delta - \rho\sin\varpi\cos\varphi'\cos H \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\tan(H'-H) = \frac{\rho\sin\varpi\cos\varphi'\sin H}{\cos\delta - \rho\sin\varpi\cos\varphi'\cos H} \tag{3}$$

(2)里的两式分别乘以 $\sin\frac{1}{2}(H'-H)$ 与 $\cos\frac{1}{2}(H'-H)$ 之后,两端相加,便得

$$q\cos\delta'\cos\frac{1}{2}(H'-H) = \cos\delta\cos\frac{1}{2}(H'-H) - \rho\sin\varpi\cos\varphi'\cos\frac{1}{2}(H'+H)$$

将这式和(1)里的最后一式结合,便得一组新的联立式:

$$\left.\begin{aligned} q\cos\delta' &= \cos\delta - \rho\sin\varpi\cos\varphi'\frac{\cos\frac{1}{2}(H'+H)}{\cos\frac{1}{2}(H'-H)} \\ q\sin\delta' &= \sin\delta - \rho\sin\varpi\sin\varphi' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

这个联立式也容易转化如下,以给出赤纬上的视差:

$$\left.\begin{aligned}
q\cos(\delta'-\delta)&=1-\rho\sin\varpi\left[\cos\delta\cos\varphi'\frac{\cos\frac{1}{2}(H'+H)}{\cos\frac{1}{2}(H'-H)}+\sin\delta\sin\varphi'\right]\\
q\sin(\delta'-\delta)&=\rho\sin\varpi\left[\sin\delta\cos\varphi'\frac{\cos\frac{1}{2}(H'+H)}{\cos\frac{1}{2}(H'-H)}-\cos\delta\sin\varphi'\right]
\end{aligned}\right\}$$

$$\tan(\delta'-\delta)=\frac{\rho\sin\varpi\sin\varphi'(m\sin\delta-\cos\delta)}{1-\rho\sin\varpi\sin\varphi'(m\cos\delta+\sin\delta)} \tag{5}$$

这里为简化起见，设

$$m=\cot\varphi'\frac{\cos\frac{1}{2}(H'+H)}{\cos\frac{1}{2}(H'-H)}$$

最后，方程式的最后一个组合提供最后一个未知量：

$$q=\cos(\delta'-\delta)-\rho\sin\varpi\sin\varphi'(m\cos\delta'+\sin\delta') \tag{6}$$

公式(3)，(5)与(6)解决了本问题。

例 再用前一例的数据。

$$\left.\begin{aligned}
\rho\sin\varpi\cos\varphi'&=2264''.71=0.0109796\\
\rho\sin\varpi\sin\varphi'&=2550''.04=0.0123629
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tan(H'-H)&=\frac{2258''.78}{0.9581107-0.0007939}=2359''.49\\
H'-H&=2359''.39=2^m37^s.29\\
H'&=5^h46^m2^s.17
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cot\varphi'&=0.8881062\\
\cos\frac{1}{2}(H'+H)&=0.0665990 \qquad m=0.0591480\\
\cos\frac{1}{2}(H'-H)&=0.9999836\\
m\sin\delta-\cos\delta&=-0.941171\\
m\cos\delta+\sin\delta&=0.343068\\
\tan(\delta'-\delta)&=\frac{-2400''.02}{1-0.0042413}=-2410''.24\\
\delta'-\delta&=-2410''.13=-40'10''.13\\
\delta'&=15^\circ58'22''.67
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
m\cos\delta'+\sin\delta'&=0.332048\\
q=0.9999317-0.0041051&=0.9958266
\end{aligned}\right\}$$

以上的几个方法提供相同的结果，但以第一法为最迅速。

设将(3)和(5)两公式应用于行星或彗星，只须使用对视差 ϖ 同为一阶之项．故只须令

$$m=\cot\varphi'\cos H$$

便得

$$\left.\begin{aligned}\alpha'-\alpha&=-(H'-H)=-\rho\sin\varpi\cos\varphi'\sin H\sec\delta\\ \delta'-\delta&=\rho\sin\varpi(\cos\varphi'\sin\delta\cos H-\sin\varphi'\cos\delta)\end{aligned}\right\}$$

这是§69里直接推出的近似公式.

解逆问题，即已知观测所提供的月亮的地面坐标，计算其地心坐标. 进行的方式如下：既知观测的时刻，我们从天文年历里月亮的位置去计算它的视差，然后再从观测的坐标里减去视差. 因此，我们不去为求未知数 H，δ 与 q 而解方程组(1). (见十四章，一个重要的特殊情形，即月掩星观测的归算.)

最后略谈月亮的赤道视差与其测定的方法. 测定行星视差的直接方法可以在这里应用. 1752 年拉朗德在柏林，拉卡伊(Lacaille)在好望角同时测量月亮的地面天顶距，他们求得月亮的平均视差为 57′11″. 今天我们已经不用三角测量的方法，而据月亮的轨道根数和地面上重力的测量联系，更考虑太阳所施的摄动力，去计算月亮的视差；这是牛顿证认地球重力与万有引力为同一种力的计算的逆问题. 布朗在其月离表里采用的月亮的平差视差为 57′2″.70，对应的平均距离是地球赤道半径的 60.266659 倍. 事实上，平均距离这一名词是不正确的；理论所提供月亮向径的倒数的表达式，是常数以后加上许多周期项之和，这常数的倒数才是以上所给出的距离.

第九章　天文折射(蒙气差)

在真空中或在均匀的透明介质中光循直线传播．由于地球的大气不是均匀的，光便受到屈折，因而我们所观测到的星的方向与其“视方向”* (这个词的意义见第六章)之间，作成一个小角，叫做天文折射或蒙气差．

古代的人早已知道天文折射对于星的升落有相当显著的影响．第谷·布拉赫在十六世纪之末首先根据经验作出一个蒙气差随高度变化的表．但这现象的理论经历很久迄未完成，到了卡西尼，始指出研究的正当途径．拉普拉斯才推导出一套正确的公式，为后人遵循至今，基本上没有什么改进．

大气折射的不规则性的物理研究很关重要，因为它们限制了天文观测的精确度．大气的宁静度与其透明度一样，对于天文台址的选择，是必须考虑的重要条件．

§73　蒙气差理论，第一近似研究

星光受地球大气折射，而改变了它的视方向，对于这种折射我们可以给与一个足敷应用的理论．设想大气的结构有如下的特点：空气的密度随高度增加而变小，等密面也是等折射率面，因而都是平行于地平的平面；在第一近似的研究里不计入地球的曲率．

为便利理解计，暂时将折射率连续变小的大气，作为无数极薄均匀气层的结构，光只在各层分界处受到折射．折射率为 n 的一层上而有折射率为 $n+dn$ 的另一层(dn 一般是负數)；设从地面而来的光到分界面 B 处时，其天顶距为 z，受折射后，其折射角为 $z+dz$ (图 90)．据笛卡儿定律**

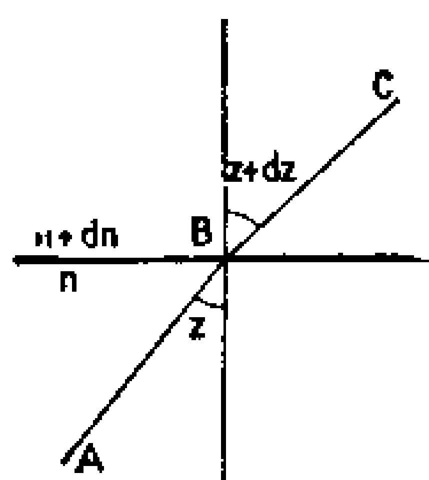


图　90

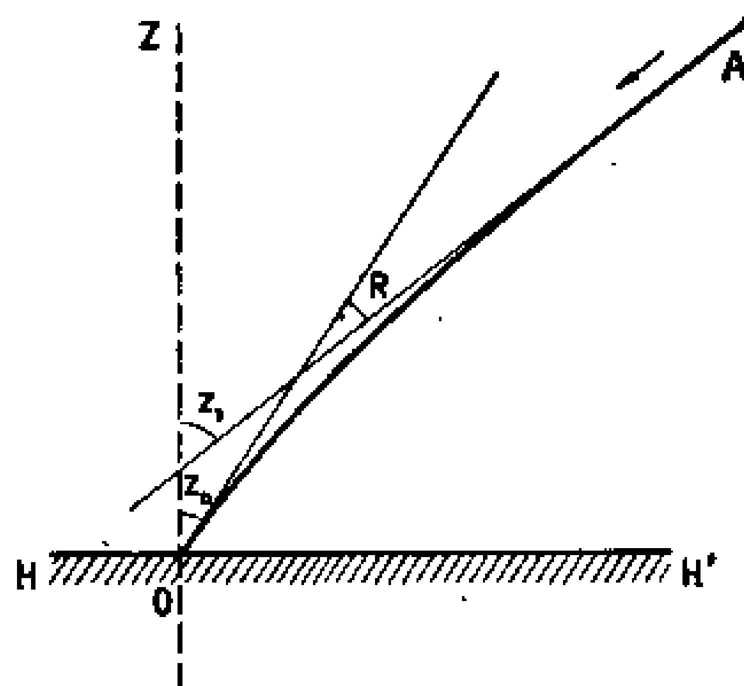


图　91

$$n\sin z=(n+dn)\sin(z+dz)$$

可见在光所经过的路程上，$n\sin z$ 是一个不变量，即使将气层之数作无限的增多，或使折射率在整个大气里作连续的变化，$n\sin z$ 仍然保持不变．

设随着一线光离地而去，n 变小，因而 z 变大：故光的行径以其凹面向地(图 91)．设

* 这里是指受了光行差、视差等影响之后的、而不是人目所看见的星的方向——译者注

** 英美书中叫做斯涅耳(Snell)定律——译者注

光从折射率为 n 的 O 点出发，在那里与 O 点的垂线所成之角为 z_0. 光线的行径将在含 O 点的切线的垂直面上. 因此，地平经度上没有蒙气差. 光线一直到了有折射性的大气的最外层，即光的行径的曲率成为不足计较之处，因而那里的折射率便接近于零了. 光的行径的切线差不多是它的渐近线，与过 O 点的垂线所成之角为 z_1.

我们将 $R=z_1-z_0$ 叫做蒙气差.

现在设从恒星射来一线光，其天顶距为 z_1(图 91). 在 O 点的观测者看见星的方向，是光的行径在 O 点的切线方向. 观测的天顶距为 z_0. 实在的天顶距或称真天顶距 z_1(这里"真"字的意义与第五章所说的不同)，由下式给出:

$$z_1=z_0+R$$

将观测的天顶距归算到假设没有大气时的天顶距，须加以 R 的改正.

可见蒙气差的作用在使星接近天顶.

由于 $n\sin z$ 是常数，故

$$\sin z_1=n_0\sin z_0$$

或

$$\sin(z_0+R)=n_0\sin z_0 \tag{1}$$

下面的计算表明，R 常是很小，在理论适用的限度处，我们可以将 R 表示为弧度，代其正弦，并以 1 代其余弦. 于是方程式(1)可以写为

$$\sin z_0+R\cos z_0=n_0\sin z_0$$

或

$$R=(n_0-1)\tan z_0$$

$$R=\alpha_0\tan z_0 \tag{2}$$

式内设

$$\alpha_0=n_0-1$$

在正常或标准情况下(即气温为 0℃，气压为 76 厘米、0° 时的汞柱压时)，空气的折射率的数值为

$$[n]_{0,76}=1.00029255$$

这是波长为 $0''.575$ 的单色光的折射率(折射望远镜消色后的波长一般是这个数字). 故在这情况下，

$$[\alpha_0]_{0,76}=0.00029255=60''.343$$

这也是 $z=45°$ 处正常蒙气差的数值.

在气温为 t、气压为 P 的情形，由格拉斯通(Gladstone)定律得

$$[\alpha_0]_{t,P}=[\alpha_0]_{0,76}\frac{P}{76}\frac{273°}{t+273°}$$

地上非正常情况下，蒙气差的公式为

$$R=60''.34\frac{P}{76}\frac{273°}{t+273°}\tan z_0 \tag{3}$$

可见 (3) 式对于天顶附近的蒙气差给出一个相当好的近似值. 但是由于星光经过几百或几千公里有折射性的大气，略去地球和等密面两者的曲率，是不合理的. 将 (1) 式写为

$$\sin(z_0+R)=(\alpha_0+1)\sin z_0$$

我们容易求 R 对于 α_0 的各阶导数，并利用马克劳林展开式得

$$R=\alpha_0\tan z_0+\frac{1}{2}\alpha_0^2\tan^3 z_0+\cdots$$

但是这个表达式并不比公式(2)好，因为这些新加入的项更增加了(2)式里已经太大的数值．只有引入地球的曲率以后，我们才能更好地完成蒙气差理论．

§74　蒙气差理论，第二近似研究

在这里取地球半径为6371公里(这是与地同体积的球的半径)，并设等密面为与地球同心的球面．光线从地面 O 点出发，常在含 O 点的切线的垂直面内，因而地平经度上的蒙气差还是为零．

在光线上的 A 点，垂线 CA 与光线的切线(图92)所成之角为 V．令

$$CA=r \qquad CO=r_0 \qquad \angle OCA=\theta$$

并设 z 为光线在 A 点的切线与 O 点的垂线之间的角．当 A 点在大气层境界，与观测者相距很远时，则这一点的切线趋向一个极限方向，即光线的渐近线的方向；而 z 角趋向于其极限 z_1．如前，蒙气差之值为

$$R=z_1-z_0$$

也是这个积分

$$R=\int_{z_0}^{z_1}dz$$

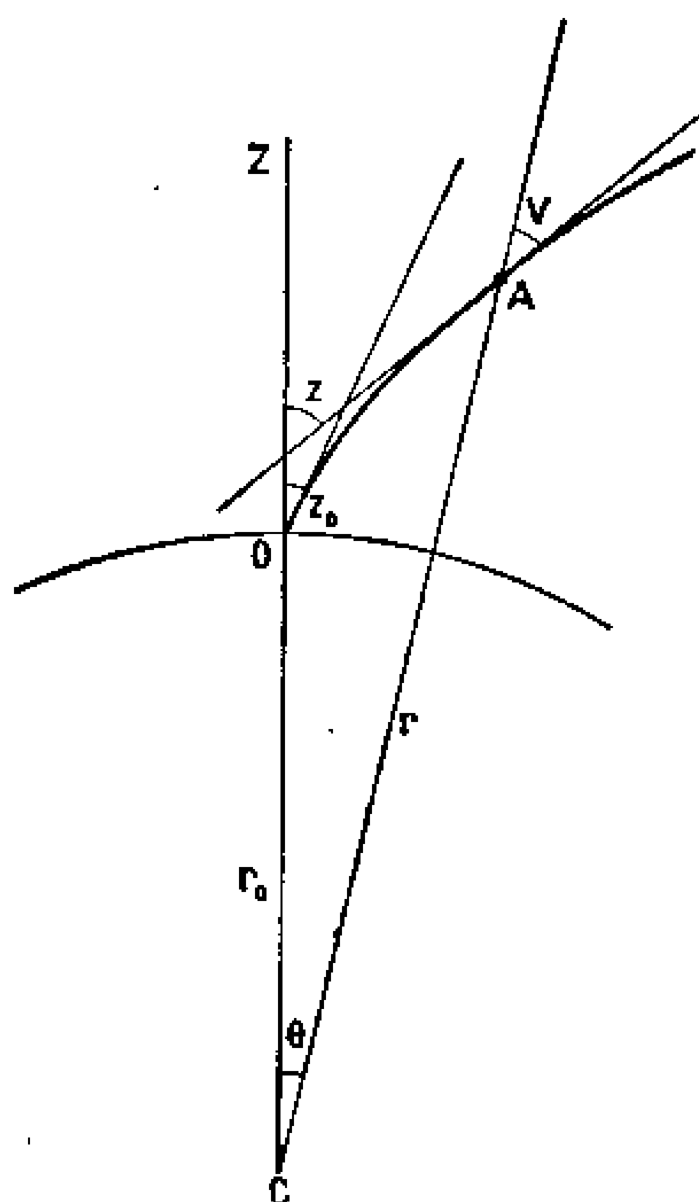


图　92

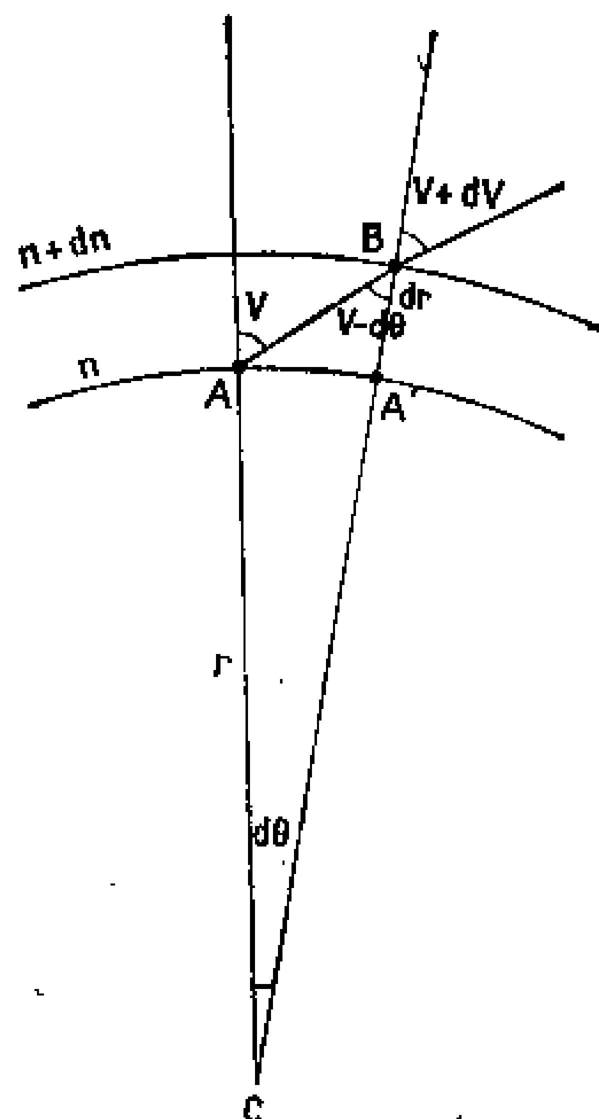


图　93

为了推导这问题的基本方程式，假设大气为很薄的均匀球层的结构，为有折射性的同心球面所界限．设 AB (图93)为其中折射率为 n 的一层的直线路径．在 A 点折射角为

V，在 B 点为 $V+dV$. 由于 ACB 角为 $d\theta$，则 B 点的入射角为 $V-d\theta$. 笛卡儿定律提供如下的关系式:

$$n\sin(V-d\theta)=(n+dn)\sin(V+dV)$$

另外，由 ACB 三角形的边角关系得出

$$(r+dr)\sin(V-d\theta)=r\sin V$$

因此

$$nr\sin V=(n+dn)(r+dr)\sin(V+dV) \tag{1}$$

由此可见 $nr\sin V$ 是一个不变量，其值可由 O 点处的情况推出:

$$nr\sin V=n_0r_0\sin z_0 \tag{2}$$

这不变量的对数的导数为零:

$$\frac{dn}{n}+\frac{dr}{r}+dV\cot V=0$$

但

$$dr=r\,d\theta\cot V$$

又

$$z=V+\theta$$

由上列三方程式消去 θ 与 r，则得

$$\frac{dn}{n}=-dz\cot V$$

于是表达 R 的公式可以写为

$$B=-\int_{n_0}^{1}\frac{dn}{n}\tan V \tag{3}$$

由关系式(2)上式可写为

$$R=\sin z_0\int_{1}^{n_0}\frac{dn}{n}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{nr}{n_0r_0}\right)^2-\sin^2 z_0}} \tag{4}$$

为了计算这个积分，取 A 点和 O 点的空气的比重 δ 和 δ_0 之比 ρ 为新变数；由格拉斯通定律，可以写出

$$n-1=\rho(n_0-1)\qquad(\rho\leqslant 1)$$

$$n=1+\alpha_0\rho$$

$$\frac{dn}{n}=\frac{\alpha_0d\rho}{1+\alpha_0\rho}$$

为了转化方根内的项，首先注意到 nr/n_0r_0 之比很接近于1(至少在有折射性的大气里). 设 h 为 O 和 A 两点间的高度差，略去对于 α_0 和 h/r_0 为二阶量之项，我们可以写出

$$\frac{nr}{n_0r_0}=\frac{(1+\alpha_0\rho)(r_0+h)}{(1+\alpha_0)r_0}=1+\frac{h}{r_0}-\alpha_0(1-\rho)+\cdots$$

当 dn/dh 成为完全可以略去之时，例如在高度不超过100公里的时候，h/r 之比还不到0.02，至于 $\alpha_0(1-\rho)$ 的极大值不过是0.0003. 因而 $\frac{h}{r_0}-\alpha_0(1-\rho)$ 一量，在蒙气差的领域内很小，故可令

$$\left(\frac{nr}{n_0r_0}\right)^2=1+2u\qquad u=\frac{h}{r_0}-\alpha_0(1-\rho)+\cdots$$

于是可将 R 的表达式写为如下的形式:

$$R=\alpha_0\tan z_0\int_0^1\frac{d\rho}{1+\alpha_0\rho}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2u}{\cos^2 z_0}}}\tag{5}$$

当 $\cos z_0$ 不很小时，我们可以使用下列的展开式：

$$\left[1+\frac{2u}{\cos^2 z_0}\right]^{-1/2}=1-\frac{u}{\cos^2 z_0}+\frac{3}{2}\frac{u^2}{\cos^4 z_0}-\cdots$$

略去含 α_0 和 u 的高阶项，最后得如下表达式：

$$R=\alpha_0\tan z_0\int_0^1 d\rho\left(1-\alpha_0\rho-\frac{u}{\cos^2 z_0}+\frac{3u^2}{2\cos^4 z_0}-\cdots\right)\tag{6}$$

其中前几项是重要项，不须给与折射率随高度变化的定律以特殊的假设，便可积分．于是

$$\int_0^1(1-\alpha_0\rho)d\rho=1-\frac{\alpha_0}{2}$$

$$\int_0^1 u\,d\rho=\int_0^1\left(\frac{h}{r_0}-\alpha_0(1-\rho)\right)d\rho=\frac{1}{r_0}\int_0^1 h\,d\rho-\alpha_0\int_0^1(1-\rho)d\rho$$

$$=\frac{1}{r_0}[h\rho]_0^1+\frac{1}{r_0}\int_0^\infty\rho\,dh-\frac{\alpha_0}{2}$$

最后一式里方括弧内之项为零．考虑到 ρ 的定义，我们可将第二项的积分写为如下的形式：

$$\int_0^\infty\rho\,dh=\frac{1}{\delta_0}\int_0^\infty\delta\,dh$$

可是空气的比重按高度积分即是大气压．所以待求的积分等于 O 点的气压与 O 点的空气的比重之比；这等于密度均匀，比重为 δ_0 的大气高度 l_0[1]，而且这大气施于 O 点的压力与真实的大气相同．最后(6)式里的第三项可以写为

$$\int_0^1 u\,d\rho=\frac{l_0}{r_0}-\frac{\alpha_0}{2}=\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}$$

这里

$$\beta_0=\frac{l_0}{r_0}$$

R 的展开式到此为止可以写为

$$R=\alpha_0\tan z_0\left[1-\frac{\alpha_0}{2}-\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)(1+\tan^2 z_0)\right]$$

$$R=\alpha_0(1-\beta_0)\tan z_0-\alpha_0\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^3 z_0\tag{I}$$

这是拉普拉斯公式．

在正常情况，即 $t=0°C$，$P=76$ 厘米的水银柱压力时，计算 R 的系数．已知在这情况下，

$P=1033.3$ 克/厘米^2

$\delta_0=0.0012932$ 克/厘米^3

于是算出 $l_0=1033.3/0.0012932=7.990\cdot10^5$ 厘米

$l_0=7.990$ 公里

取 $r_0=6371$ 公里

便得 $\beta_0=0.001254\qquad \beta_0-\frac{\alpha_0}{2}=0.001108$

1) l_0 的介入不意味着介入大气是均匀的那个假设．

于是以数字表达的 R 的展开式为

$$R_{0^\circ,76\text{厘米}}=60''.27\tan z_0-0''.0669\tan^3 z_0 \tag{II}$$

右端第二项对于 $z_0=48°$ 时为 $0''.1$，对于 $z_0=68°$，达 $1''$. 以后还要证明对于后面这个天顶距所求得的数值，R 里所略去的项的总和只有百分之几秒. 我们也要说明，蒙气差的物理意义不很确定，因而不能得出更好的近似值拉普拉斯公式已经足够实际应用，一直可到 70° 的天顶距. 事实上，高精度的观测亦不在这样低处去做.

由公式 II 推出下列对于几个 z_0 的正常蒙气差的数值:

z_0	$R_{0^\circ,76\text{厘米}}$	z_0	$R_{0^\circ,76\text{厘米}}$
0°	0''.00		
10	10''.63	50°	1'11''.69
20	21''.93	60	1'44''.05
30	34''.78	70	2'44''.24
40	50''.53	75	3'41''.61

§ 75 大气抖动、色散与吸收，反常折射

为了便利计算，我们才将大气看做有相当简单的结构，但事实上并不是那样的. 大气是复杂的气象现象的演变场所，显然不处于稳定状态之中，亦绝不存在有等折射率的同心气层. 高空探测表明，随高度而有显著变化的气象因素，有水汽含量、温度梯度、风向、风速，而且在不连续面上还存在一种湍动状态. 因此，光线穿过大气时受到反常的偏折，这可从观测发现. 譬如，用子午仪里的地平定丝去瞄准一颗星，便会看见星象既非匀速前进，而且在地平丝上下作微小的颤动. 这种抖动的原因是在大气里，当大气骚动最厉害时，抖动的振幅可达几个角秒. 于是星象不很确定，成了一个弥漫、不断变形的光斑. 即使在良好的情况里，星象还有十分之几角秒的振动，只有在异常宁静的夜里，天顶附近的星象的移动才会小于 $0''.1$.

大气折射的起伏变化在肉眼里表现为星光闪烁，在小口径的望远镜里也有这个现象. 从星发出来、横剖面有几平方分米的光束并不是平行的，因为这些光线所遇到大气微扰，既非同时也非受到同样的偏折. 因此，相当于波面的部分与大气外的情况不同，不能看做是平面的，它实际有可以觉察的曲率. 若到达地面的光束是发散的，则观测者瞳孔上的照度会少一些；反之，若到达地面的光束是会聚的，则瞳孔上的照度会多一些. 由于波面的变形非常迅速，每秒钟有几次的明暗变化，这便作成了闪烁现象. 若用大口径的仪器观测，这种亮度的变化减少，因为星光在物镜各部分上的照度的变化有互相抵消的作用，即一些部分比平均照度亮，另外一些部分比平均照度暗，观测者可以取掉目镜，直接看一颗亮星，而发觉这个现象.

蒙气差还有其他偶然变化，叫做*反常折射*，它与正常折射的区别在其发生的频率上. 将望远镜面定去作照相观测，则星象在底片上留下条条拖影. 星光的迅速变化表现在这些拖影上为无数的波形与结点，而且无论怎样接近的两颗星，其拖影的情况总不相同；这是正常折射现象. 反之，反常折射变化缓慢，每分钟内只有几次变化，对于小范围天区里一切星象拖影的影响都是一样. 反常折射的变幅和迅速变化的变幅有相同的数量级，即

由十分之几角秒到几角秒．一般认为，这种反常折射的成因在仪器附近，即在圆顶室内，由比较热的空气柱，直到仪器的管里，形成一种漏斗的形式所产生的．为了避免这种反常折射，应设法尽量减少观测室与仪器的热容量，特别要保持良好的通风，可是这是不容易办到的事．

还有另外一种反常折射，来源在大气里、变化更是缓慢．譬如，在日落时，空气团的变冷由东边传至西边；因而等密气层不在地平方向上，这种反常折射特别表现在地平经度上．但是这种折射的研究，还没有得着有结论性的成果．

现在研究折射随星色的变化．假使星是各种不同波长的单色光源，问题便很简单：只须将下表所载的拉普拉斯公式

$$R = A\tan z_0 - B\tan^3 z_0$$

里的 A 和 B 两系数之值，按星的波长 λ 作内插使用：

λ	A	B
$0^{\mu}.40$	$61''.43$	$0''.0680$
45	60.95	675
50	60.61	672
55	60.37	670
60	60.18	668
65	60.04	666
70	59.92	665

但是星的辐射有一个连续光谱，其中能量按波长的函数的分布所遵循的定律，基本上是随光谱型而不同的．假使已知光谱里能量分布的曲线，将曲线上各点的纵标乘以"能见因数"(即人目对于每个波长 λ 的感觉度)并乘以大气的透射因数(也是 λ 的函数)．这样求得的乘积常在某一波长上出现一个特别显著的极大值，它表现肉眼看见的星色；我们将这一波长叫做有效波长．如果用仪器观测，还须将仪器的透射因数加在以上的几种因数之内，因而有效波长可能修改．如果用照相观测，便当用乳胶的敏感因数去代替人目的能见因数．

现在更详细说明几点．为目视观测，由两片玻璃组成的消色差物镜常对于 $0^{\mu}.575$ 附近的波长表现一个极短的焦线，且离开这数值不到百分之一微米．因此，用折射镜观测时，星象的有效波长趋向于极短焦线的波长，可见折射镜有类似选择滤光器的效用．至于反射镜，由于是消色的，影响波长很少，但又很少用作目视天体测量．

至于大气的透射因数，在一给定地点，随气象情况的变化很大；对于一定的大气情况，大气的透射因数，是波长与天顶距的函数．星光的被吸收程度，随波长的减短与星的天顶距的增长而变大；这便是落日是红色的原因．因此星的有效波长随天顶距而增加，而且愈接近地平时增加愈快．

这一简略的讨论导至如下的结论：

1．A 和 B 两个常数的数值的选择，应当按观测时刻与气象情况下所决定的星的有效波长；

2．$R = A\tan z_0 - B\tan^3 z_0$ 这个定律并不是绝对有效，除非如上所说，将 A 和 B 两系

数按星的颜色和天顶距的函数加以决定之后，才算是精确的.

直到现今，天文工作者只安于使用平均蒙气差表(即大致可用于一般恒星和常见气象情况而编制的蒙气差表). 希望有一天能考虑更合理的方式，如：

1. 仪器的光学性能；

2. 星的颜色(光谱型)；

3. 大气的情况. 选择性的滤光器的使用，将光谱限制在一狭窄带内，便可取消掉一切困难，而保证 A 和 B 两系数的不变性. 因而照像观测常用滤光器. 但用子午仪观测微弱的恒星时，我们就不能装置滤光器. 可是照像观测时，如物镜的光学性能容许，在它上面装置滤光器，是有益的.

折射按波长的函数变化，在照像区比在目视区更快. 例如设有两颗星在同一天顶距 z_0，而其有效波长相差 $0^{\mu}.005$(或 50Å)，它们的光线所受的折射差设为 ΔR，则这一量为下式所给出，其中第一、二两式分别用于照像与目视两种平均波长：

$$\lambda=0^{\mu}.430 \qquad \Delta R=-0''.0452\tan z_0+0''.000043\tan^3 z_0$$

$$\lambda=0^{\mu}.575 \qquad \Delta R=-0''.0183\tan z_0+0''.000018\tan^3 z_0$$

由这两个公式推得下表，它给出同一天顶距上、有效波长相差 50Å 的两颗恒星，在其天顶距上应加的改正值 Δz_1：

z_0	$\Delta\lambda=50$Å	
	Δz_1(照像)	Δz_1(目视)
30°	0''.026	0''.010
60	078	032
70	124	051
75	167	068
80	249	104

这个表使我们得以估计小行星照像位置可能发生误差的数量级，例如当小行星的颜色与比较星的平均颜色有显著的差异之时. 为明确起见. 我们特别指出：恒星每差一个光谱型，其有效波长约差 80Å，不过这种变化的方式很不规则. 还须注意以上的公式，是在两星波长之差保持不变的假设下推导得的；但拍照的天区接近地平时，则大气的选择吸收使有效波长增加，而减少它们的波长之差异.

以上的解说引出另外一个结论. 最早的蒙气差表，纯粹按经验的数据编制，还未能据实验求出空气的折射率，精确到可用的程度. 白塞耳由折射的测量以推算系数 A. 为了得到一个比较精确的结果，人们尽量观测接近地平、因而折射相当大的恒星，但是这样便因大气的选择吸收，而使其有效波长发生显著的增加. 于是这样求得的 A，其数值比较接近天顶的星的 A 值小了一些.

以上所举的关于 A 和 B 表示为波长的函数的数值是根据最新实验的结果，对于无水汽与碳酸气的空气，而计算得的.

对于折射望远镜的极短焦线，我们所采用的 A 和 B 的数字分别为 60''.27 与 0''.0669. 法国天文年历所采用的正常折射系数 $A=60''.109$，相当的有效波长为 $0^{\mu}.623$，在橙与黄的

分界处，正是落日的颜色．根据这个常数算出的蒙气差表，对于天顶距小的星，改正值是很微小的，随不同的天顶距，这种偏离的数值如下：

z_0	$\Delta R_{日视}$	z_0	$\Delta R_{日视}$
0°	0″.00	60°	−0″.29
30	−0.09	70	−0.47
50	−0.19	75	−0.63

但是这些表，只在归算天顶距超过 50° 或 60° 的子午观测方才使用，这是由于这些偏离是小量的原故．但是这种系统性的偏离，表现在星表里便成为赤纬上的一种系统差，这差所遵循的规律与天文台的纬度和其所在地的平均气象情况（气候）有关．由南北两半球天文台所编制的星表，对于赤道附近的恒星，所表现差异，数量级约为 1″，也许原因就在这里．

系数 A 的数值之不确定，更加以现象的性质之不确定，因而对于天顶距超过 50° 或 60° 的折射的计算，不能希望达到高的精确度．但是拉普拉斯公式一直有效到这些界限，已经足够满足精密天文学的实际需要了．可是建立另外一个公式，足以表达一直可用到地平附近的折射，也很有意义；这样，我们只好安于一个近似的公式，它只能说明现象的一般情况，而不能达到很高的精确度．

§ 76　地平附近的蒙气差

对于天顶距不太大的情形，我们不须对大气密度的分布定律作任何假设，已经能够对蒙气差计算出相当好的近似值．假使预先作出这个定律，去推广拉普拉斯公式，我们便可推出含 $\tan z_0$ 的奇乘幂项的一个交错展开式，达到地平时方停止收敛．更好的办法是找出一个含有限项的表达式；对于这两种情形，便须对大气密度的分布定律作出一种假设．

为此，最方便的办法是给与函数 $\rho(u)$ 的性质以一个假设．由于 u 的主要项是 h/r_0；u 随 h 的变化形式是准线性的（图 94）；若将 ρ 按 h 的函数的变化认为是遵循一个形式简单的定律，即对 ρ 按 u 的函数的变化，作类似的假设，亦可算是合理．由高空探测的结果证实了这个看法．事实上，

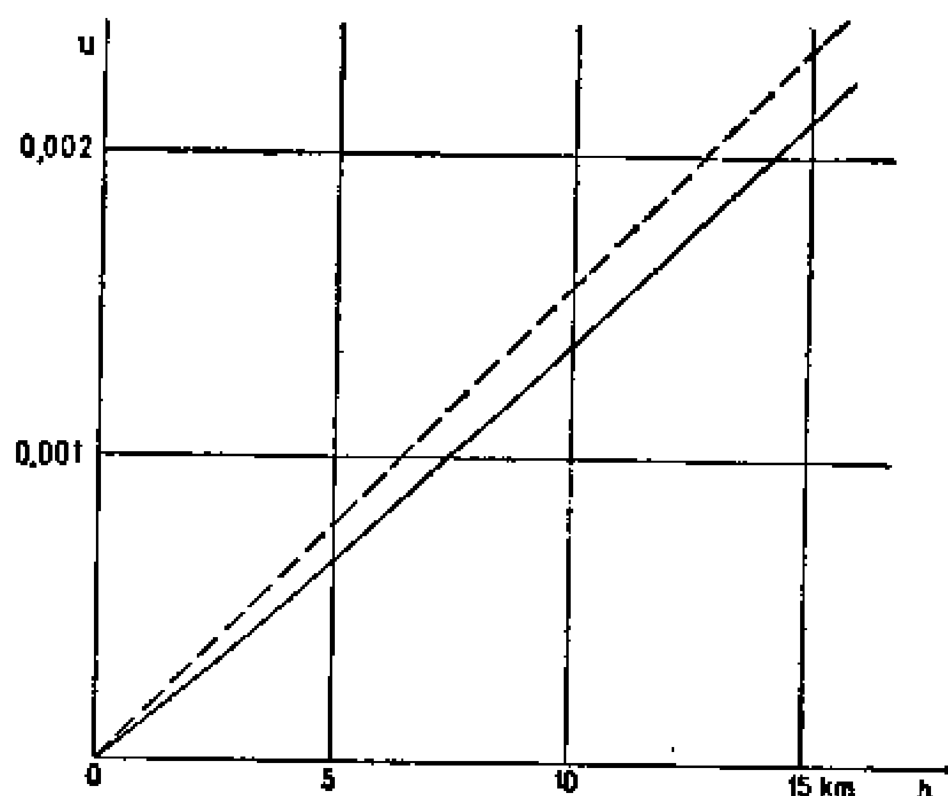


图　94

表示 $\log\rho$ 随 u 的函数变化的曲线（图 95），比以高度 h 为横标的曲线，显得更有规律．在对流层里，我们可以相当正确地表为一条直线；进入平流层，这条线改变方向，而成为另外一条曲率很小的近似直线．因此 $\rho(u)$ 至少须有两种不同的形式，始能正确地表达有折射性的全部大气；但是我们并不要对蒙气差建立一个新的理论，我们仍然安于一个近似的公式，其最简单的形式只有

$$\rho=e^{-u/a} \tag{I}$$

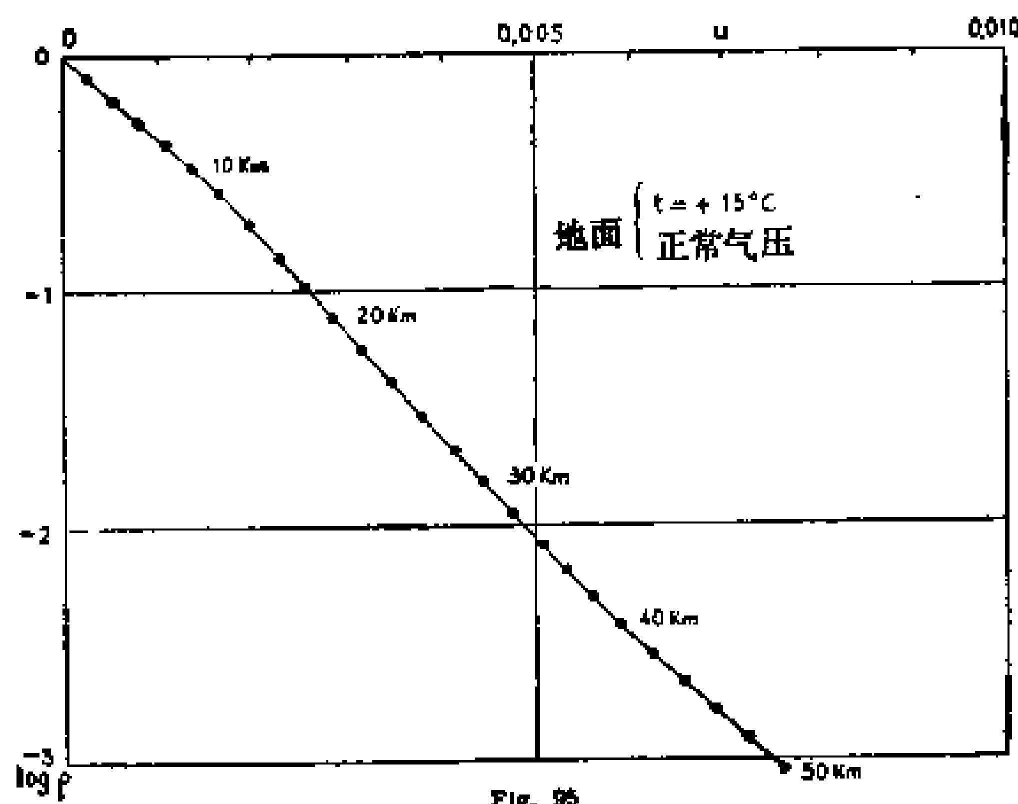


图 95 $\log\rho$ 随 u 的函数的变化(西欧的观测，年平均值)图中黑点代表海拔的公里数

由这关系式所定的虚构大气，对地面所施的压力应该与真的大气相同，因为大气的总质量介入在与地球的曲率有关的 R 的各项里；这一条件便可决定常数 a. 我们可以将它写为如下的形式:

$$\int_0^\infty \rho\, dh = l_0$$

和

$$dh = r_0\, du - \alpha_0 r_0\, d\rho$$

于是

$$r_0 \int_0^\infty \rho\, du + \alpha_0 r_0 \int_0^1 \rho\, d\rho = l_0$$

$$\int_0^\infty e^{-u/a} du + \alpha_0 \int_0^1 \rho\, d\rho = \beta_0$$

这里设

$$a = \beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}$$

回到 § 74 的第(5)式. 因数 $1/(1+\alpha_0\rho)$ 很近于 1; 可以其平均值 $1-\frac{\alpha_0}{2}$ 代替，于是得出如下的表达式:

$$R = \alpha_0\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)\sin z_0 \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\cos^2 z_0 + 2u}}$$

$$= \alpha_0 \frac{1-\frac{\alpha_0}{2}}{a} \sin z_0 \int_0^\infty e^{-u/a} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 z_0 + 2u}}$$

我们可以作如下的变数变换，将这积分的计算转化为一个已知的超越函数的计算:

$$-\frac{u}{a} = \frac{\cos^2 z_0}{2a} - x^2$$

$$du = \sqrt{2a}\,\sqrt{\cos^2 z_0 + 2u}\, dx$$

设

$$X = \frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}$$

则

$$R = \alpha_0\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin z_0\, e^{X^2} \int_X^\infty e^{-x^2} dx \qquad \text{(II)}$$

函数 $$\Psi(X)=e^{X^2}\int_X^\infty e^{-x^2}dx$$

已经为克朗普(Kramp)和腊道(Radau)研究过，并编有数字表．本书后面附有这个简表(表 XXVII)．我们也可使用指数函数表与误差函数表 $\int_0^X e^{-x^2}dx$ 去计算函数 Ψ．当 $X>4$ 时，$\Psi(X)$ 之值由下列的渐近展开式所给出：

$$\Psi(X)=\frac{1}{2X}\left[1-\frac{1}{2X^2}+\frac{1\cdot3}{(2X^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2X^2)^3}+\cdots\right]$$

当 X 小时，我们可用下列的收敛级数：

$$\Psi(X)=e^{X^2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-X+\frac{X^3}{3}-\frac{1}{1\cdot2}\frac{X^5}{5}+\cdots\right]$$

由此显然有 $$\Psi(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.88623$$

由于引入了函数 Ψ，我们可以将蒙气差 R 表示为有限项(不管 z_0 之值是什么)，即写为如下的形式[1]：

$$R=\alpha_0\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin z_0\,\Psi\left(\frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}\right) \tag{III}$$

若在相当高处观测，z_0 可以超过 90°，公式 III 仍然可以使用．若 z_0 不太接近 90°，下列的表达式更便于计算：

$$R=\alpha_0\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan z_0\,\Phi\left(\frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}\right) \tag{IIIb}$$

这里(表 XXVIII)：

$$\Phi(X)=2X\Psi(X)$$

当 X 增时，函数 Φ 逐渐接近于 1．

当天顶距不大时，X 的数值相当大，我们可将 R 表示为上列的渐近展开式．有趣的是这里重新求得含 $\tan z_0$ 的奇乘幂展开式，其首二项正是前节已经求得的；但是这第二法不能证明这两项是与密度分布的定律无关的．反之，在 $\rho=e^{-h/a}$ 定律可以正确地表达观测的密度的假设下(这只对第一近似值有效)，我们写出公项的表达式．于是求得

$$R=\alpha_0\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan z_0\left(1-\frac{a}{\cos^2 z_0}+3\frac{a^2}{\cos^4 z_0}-3\cdot5\frac{a^3}{\cos^6 z_0}+\cdots\right)$$

只将每个系数限制在它的主要项，则

$$R=\alpha_0(1-\beta_0)\tan z_0-\alpha_0\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^3 z_0+3\alpha_0\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)^2\tan^5 z_0$$
$$-3\cdot5\alpha_0\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)^3\tan^7 z_0+\cdots \tag{IV}$$

于是正常蒙气差($t=0°$，$P=76$ 厘米水银柱压)为下式所给出：

$$R=60''.27\tan z_0-0''.0669\tan^3 z_0+0''.000222\tan^5 z_0$$
$$-0''.00000123\tan^7 z_0+0''.000000010\tan^9 z_0-\cdots \tag{V}$$

如上所说，V 式内前两项重新得出拉普拉斯公式，这样 a 之数值的选择得出一个事后

1) 见《斯特拉斯堡天文台年刊》I，1926，122 页，公式 5．作者自 1929 年便讲授这个公式．

的证实．至于第三项，当 $z_0=73^\circ.6$ 时，达到 $0''.1$，然后迅速增长，当 $z_0=79^\circ.5$ 时，达到 $1''$．我们再度证明拉普拉斯公式足够子午天文的需要，因为天顶距的精密测量很少超过 60° 的．

可是寻求地平附近的蒙气差仍然是有用的，一则可以了解它的数量级，再则可以计算某些观测（特别是接近地平的彗星观测）所需要的较差蒙气差的改正值（§78）．以上所发展的近似理论，对于这一用途，已经是很够了．将公式 III 内的参量给与其数值；即若取

$$\alpha_0=60''.343 \qquad a=0.0011078$$

则下式给出正常蒙气差：

$$R_{0,76}=2563''.5\sin z_0\,\Psi(21.244\cos z_0) \tag{VI}$$

$$R_{0,76}=60''.334\tan z_0\,\Phi(21.244\cos z_0) \tag{VIb}$$

在地平上

$$R_H=37'52''$$

这个数字比较法国天文年历里蒙气差内的 $36'36''$，显然大了一些．若将年历里所采用的有效波长改为我们所用的波长，则后面这个数字增大，两者之差便缩小到 $6''$，另外 $70''$ 之差，便该看做是由于所采用的密度分布律之不同了．

容易查出，这里所说的差异只在地平附近方才显著．下表给出法国天文年历与由以上公式算出的正常蒙气差两者之差；这是前节 z_0 是小数值时的表的继续：

z_0	$\Delta R_{目视}$	z_0	$\Delta R_{目视}$
78°	$-0''.8$	87°	$-6''.1$
80	-1.0	88	-11.6
82	-1.3	89	-26.8
84	-1.9	90	-76
86	-3.7		

若将法国天文年历里的蒙气差，按 $0^\mu.575$ 波长归算，直到 $z_0=84^\circ$ 差别可被消掉为零；到 85° 时差别还不过是 $0''.8$．由此可见，推导拉普拉斯公式所根据的经验律（即蒙气差与大气的密度分布无关），直到天顶距为 85° 时，还得很满意的证实．只有从地平附近 2° 或 3° 的观测，才可希望去寻出大气密度的分布定律．可是经常表现在太阳西落时的反常折射（它使太阳圆面有显著的变形），使我们放弃在那里去做一切精密的测量．可见，我们不能从地平蒙气差的观测去了解高层大气．反之，低层大气里温度的梯度时常发生的反常性，倒反为反常蒙气差所表明了．

因此，我们使用公式 VI 和 VIb，借本书末的函数 Ψ 与 Φ 两表的帮助，去计算蒙气差．

如果将常数 $60''.167$ 改为 $60''.334$，便可很近似地将我们的结果转化为法国天文年历里的正常蒙气差，但要将这种计算推广到地平的情形，则 VI 式还应加上一项，或将 X 的表达式里 $\cos z_0$ 的因数改变，即使其当 z_0 增时变小．到地平时这因数降低为 20.6．但是不能保证这样算出的结果比据 VI 式所算出的表更加精确．

由公式 VI 可以推出以 z_0 为引数的几个正常蒙气差的数值，这是 §74 里的表的继续：

$t=0°C$	78°	4′37″.1	87°	15′4″.9
$H=76$ 厘米	80	530.8	88	1918.2
	82	648.1	88.5	2215.4
$\lambda=0''.575$(目视)	84	848.0	89	263.8
	85	1016.0	89.5	314.9
	86	1215.5	90	3752.

§77 蒙气差表，气温与气压的改正

再讨论§74里的公式I，那是唯一被理论完全证实的公式，以后更为§76里的公式IV加上几个补充的项：

$$R=\alpha_0(1-\beta_0)\tan z_0-\alpha_0\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^3 z_0$$

常数 α_0 是观测处的气温与气压的函数．因此，观测者应该仔细地而且经常地记录下其身边的温度计与气压计上的读数．常数 α_0 遵循气体密度定律：

$$[\alpha_0]_{t,P}=[\alpha_0]_{0,76}\frac{P}{76}\frac{273°}{273°+t}$$

至于常数 β_0，显然和气压无关，因为它是和观测处的气压与空气的比重之商成正比例的．故

$$[\beta_0]_{t,P}=[\beta_0]_{0,76}\frac{273°+t}{273°}$$

R 的系数(包括其中附加项的系数)的变化，不能够只用改正的因数去表达的．可是应该注意，气压的变化并不影响含 β_0 的因数，而且对同时含 α_0 与 β_0 的因数的影响也很小．所以我们可以给与

$$a=\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}$$

那个因数以对应于观测处的平均气压的数值．因此我们可以设

$$R_{t,P}=R_{t,76}\frac{P}{76}$$

附表XXV提供 $P/76$ 那个因数的数值．

至于 $R_{t,76}$ 的计算，亦可一劳永逸地编为双引数数字表．表XXIV的编制便是假定平均气压为76厘米，而以 t 的各种数值去计算表示为 $\tan z_0$ 的函数的下列乘积：

$$R\cot z_0=\alpha_0[(1-\beta_0)-a\tan^2 z_0+3a^2\tan^4 z_0-\cdots]$$

式内系数的数值是对于 $\lambda=0''.575$ (§74与§76)据理论而算得的．这样我们所求得的蒙气差比常用蒙气差表上的数值稍微大了一点；表XXIV适用于以寻常消色差折光镜去观测白色的恒星的情形．由四位真数表取出 $\tan z_0$ 的数值，并用双内插法去求应乘在 $\tan z_0$ 的因数，以得 $R_{t,76}$．然后再将这个蒙气差乘以从附表XXV内取出的 $P/76$ 那个数字．

若观测的地点很高，还须另编一个新表，将按平均气压以 α_0 为媒介所算得的 a 的数值加以修改．

注意：P 的数值是以厘米所表示的0°C时水银柱高度．因此观测者所记录的气压计

的读数应化为它在 0°C(附表 XXVI)和正常重力下应有的数字. 常用的蒙气差表里，人们常将气压计的高度化为在空气的温度与正常的重力下的高度[1]；但是我们认为，没有理由一定要遵从这个习惯.

至于大天顶距的蒙气差，可用下式算到足够好的近似值：

$$R_{t,P}=A\,\frac{P}{76}\tan z_0\,\Phi(P\cos z_0)$$

式内设

$$A=A_{正常}\frac{273^\circ}{273^\circ+t}=60''.334(1-0.00366\,t)$$

$$P=P_{正常}\left(1-\frac{t}{546^\circ}\,\frac{2\beta_0+\alpha_0}{2\beta_0-\alpha_0}\right)=21.244(1-0.00232\,t)$$

如果我们要将由这些公式所算出的数值和常用蒙气差表里的数字比较，须记住常用表是对于正常气压而编制的.

§ 78 蒙气差改正

地平坐标上的蒙气差是容易改正的，因为蒙气差只抬高了星的方向，换言之，即减少了星的天顶距，而不影响它的地平经度（图 96). 设以下标 0 表示观测的坐标，1 表示经过蒙气差改正后的坐标，则

$$a_1=a_0$$

$$z_1=z_0+R$$

容易由上式转化为赤道坐标的情形. 设 S 为方位三角形 PZA_0 的星位角，若星的时角超过 12^h，这个角便循负向计算，观测位置的较差坐标大约等于

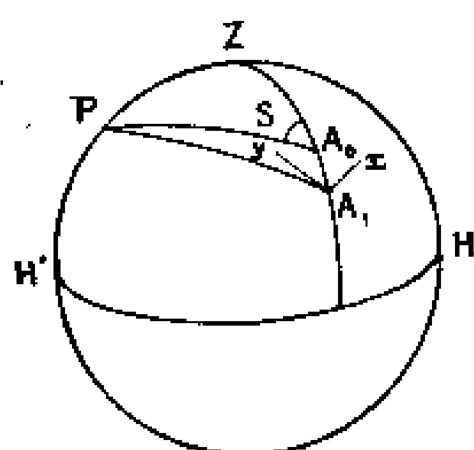


图 96

$$\left.\begin{aligned}x&=\cos\delta\Delta\alpha=R\sin S\\ y&=\Delta\delta=R\cos S\end{aligned}\right\}$$

在蒙气差可以表示为如下

$$R=A\tan z_0$$

的形式时，即星离地平相当高时，上式可以写为

$$\left.\begin{aligned}x&=A\,\frac{\cos\varphi\sin H}{\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos H}\\ y&=A\,\frac{\sin\varphi\cos\delta-\cos\varphi\sin\delta\cos H}{\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos H}\end{aligned}\right\}$$

H 与 δ 表示 A_0 点的时角坐标.

假设 H 变化，这两个方程式便代表圆锥曲线. 设一颗星的位置在 A_1，它的视位置在 A_0，若星是拱极的，则 A_0 对于参照系 xA_1y 在一恒星日内描出一个椭圆. 若星非拱极而有升落，则描出一支双曲线；若星的赤纬等于观测处的余纬度，则描出一支抛物线. 自然，实际上并没有双曲线或抛物线的无限远的一段.

---

1) 这便是为什么在编制这些表的公式里含有水银的膨胀系数. 我们感觉更好是用气压计上所表示的实际气压，因为反正总要在水银柱的高度上加以一种改正，而水银柱上的温度与其周围空气的温度是不相同的.

以上的公式可用于一种特殊情形：即子午面外星的赤经与赤纬的直接测定．最精确的子午面外的观测是方位的较差测量．如须测定行星或彗星的坐标，则是将其与附近的一颗比较星联系，作测微计的测量．我们要问：蒙气差怎样影响这两颗星的较差坐标？

我们先研究这问题的一个特殊情形：即设其中一点是太阳的中心，另一点是太阳圆面周围上的一点(图 97)．先设这一点在太阳的上边沿 A_0 点．若 z_0 是圆面中心 S_0 的视天顶距，它的改正后的天顶距为 z_0+R，再设 $z_0-\Delta z$ 为上边沿的视天顶距，它的改正后的天顶距是

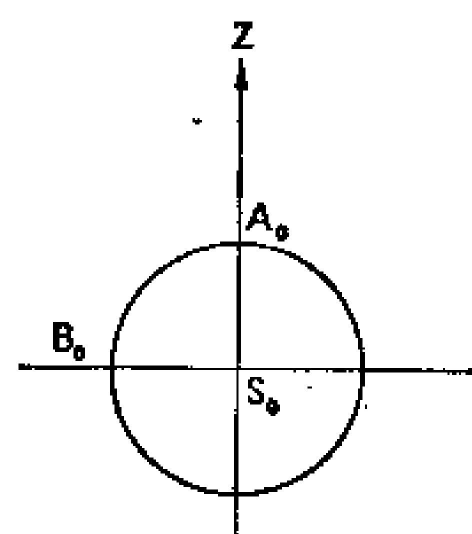


图 97

$$z_0-\Delta z+R-\Delta R$$

若以 s 表太阳的真角半径，则

$$\Delta z=s-\Delta R$$

由于 $\Delta R>0$，蒙气差缩短了太阳的垂直方向上的直径．设太阳距离地平相当远，以致我们可令

$$R=A\tan z_0$$

于是

$$\Delta R=\frac{As}{\cos^2 z_0} \tag{1}$$

当 $z=80^\circ$，直径的缩短还不过 $20''$，但太阳接近地平时，其垂直方向的直径缩短得很迅速，以致肉眼也能看出；于是便不能用(1)式去计算了．

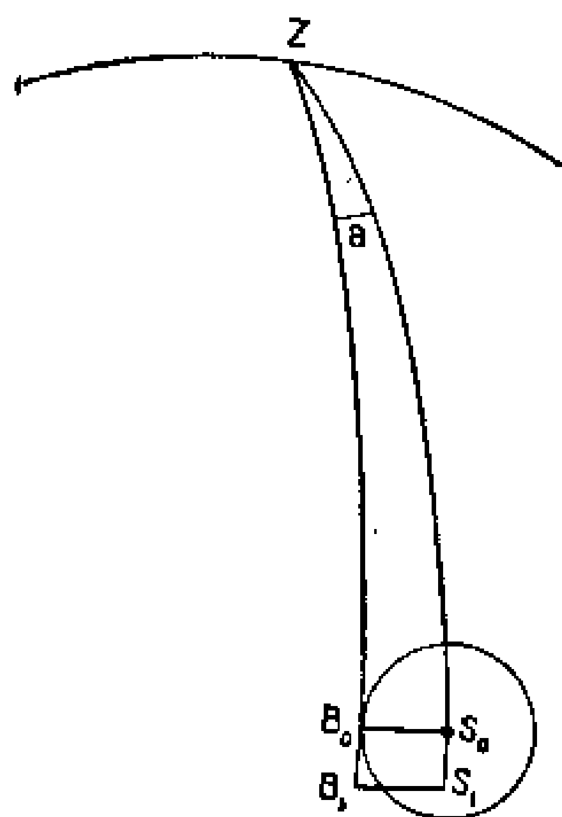


图 98

现在设取太阳圆面的东或西边沿上的一点 B_0，更设 S_1 与 B_1 分别为 S_0 与 R_0 的真位置(图 98)，由于蒙气差，这两点在垂直圈上被抬高了，因而它们之间的距离被缩短了．设 a 为这两点的地平经度之差，z_0 为太阳中心的视天顶距，则得近似的关系式：

$$\sin S_0B_0=\sin a\sin z_0$$

$$\sin S_1B_1=\sin a\sin(z_0+R)$$

由此容易导出

$$\frac{S_1B_1-S_0B_0}{S_1B_1}=R\cot z_0=A$$

由此可见，太阳圆面的地平直径的缩短，基本上是一个与天顶距无关的不变量；其缩短量仅是直径的万分之三或 $0''.6$．太阳的视周界成为椭圆，其长轴在地平方向比较太阳的真角直径稍短一点．我们以为，天体在地平附近扩大完全是一种错觉；事实上它的视大小到处都被缩小了．

回头来讨论用测微器测定相对坐标的 A 和 R 两点，我们可以设想，观测有几种方式．一般利用比较星 A 的周日运动去调准测微器的方向；但周日运动的方向受到蒙气差的影响，因而观测是对视赤纬圈的方向而作的．我们也可利用恒星的中天观测而调准测微器的方向，若仪器的赤道装置与运行相当稳定而良好，即当望远镜的指向 A 星和 B 星时，仪器上的方位盘保持正确．于是测微器所瞄准的是真赤纬圈．在对于以上的每一情形，我们还可采取两种不同的观测方式：即将望远镜面定作中天观测，或让望远镜运行，用动丝

去瞄准星．于是总共有四种情形需要研究．与这些情形对应的较差蒙气差的公式既长且繁，我们不在这里推导．在经常作这一类观测的天文台里，工作者一劳永逸地编制有在平均气温与气压下的蒙气差改正表．

至于对地平附近的照像观测，应作的蒙气差改正，读者需用时，亦容易推导，我们便不在这里叙述了．

§ 79　对于有限距离的天体(月亮)的情形

直到现在我们假定天体的距离比地球的直径要长得很多，这样我们便可假设天体的地心方向与光程的渐近线是平行的．可是对于月亮而言，如果要求到相当高的精度，这一假设便不合适．

令 CT(图 99)为自地球中心 C 向光程在 A 点的切线 $O'A$ 所作的垂线．用 § 74 的符号可得

$$CT = r\sin V = \frac{n_0 r_0}{n}\sin z_0$$

在有折射性的大气的极限处(假设星在这大气之外)，便得

$$CT = n_0 r_0 \sin z_0$$

令 y 表示 O 点对于 O 点的极限高度点，则

$$CO' = r_0 + y = \frac{CT}{\sin z_1}$$

$$\frac{y}{r_0} = n_0\frac{\sin z_0}{\sin z_1} - 1 \tag{1}$$

我们可以合理地将天顶距 z_0 的表载蒙气差加以改正，条件是不对观测处 O 而对 O 的垂线上的 O' 点(即对观测地上高度为 y 处)计算视差(图 100)．为了计算 y，展开方程式(1)：

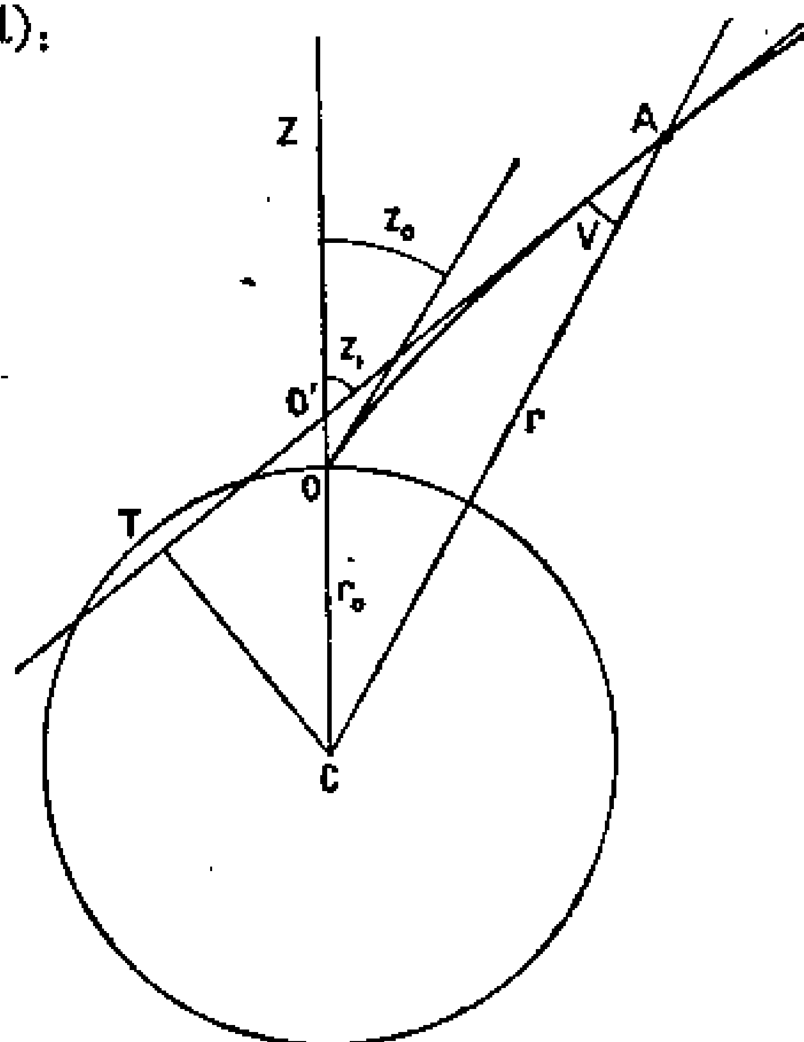


图 99

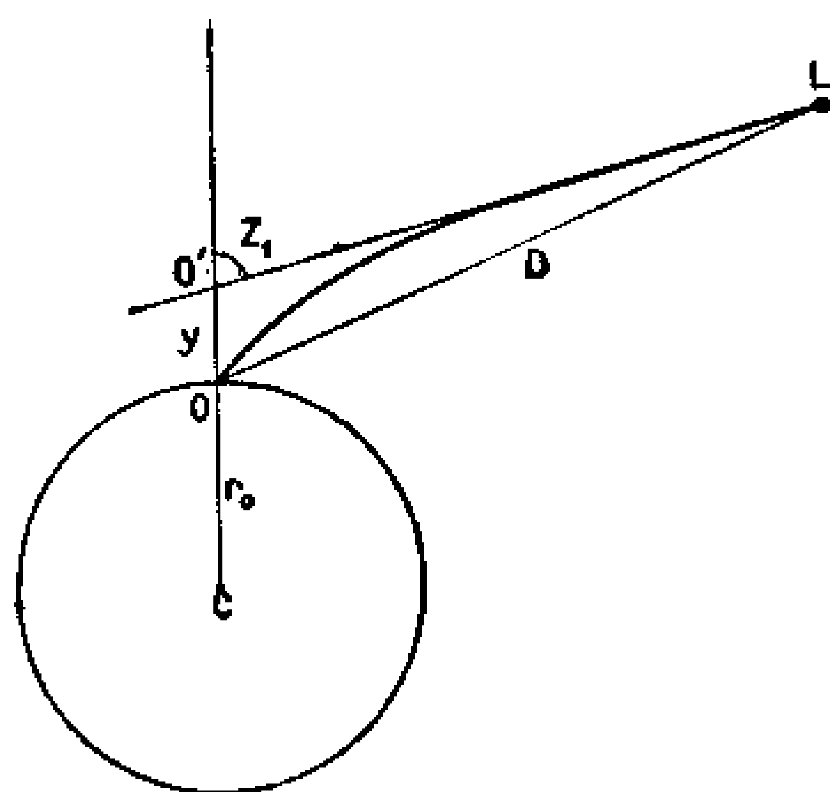


图 100

$$1+\frac{y}{r_0}=(1+\alpha_0)\frac{\sin z_0}{\sin z_0\cos R+\cos z_0\sin R}=\frac{1+\alpha_0}{\cos R(1+\tan R\cot z_0)}$$

若略去高于二阶之项，则

$$y=r_0\left(\alpha_0-R\cot z_0+\frac{R^2}{2}\right) \tag{2}$$

在极限处，使用拉普拉斯公式，则有

$$y=r_0\alpha_0\beta_0(1+\tan^2 z_0)$$

由此可见，在天顶处 y 并不为零. 大气的作用象一具屈光器，将一束由地上一点向上发射的同心光束的立体角加以修改.

为了将公式(2)使用于超过天顶距 75° 之处，我们使用 § 76 所推出的普通公式. 仍设

$$X=\cos z_0:\sqrt{2a} \qquad \left(a=\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)$$

则

$$y=r_0\alpha_0\left[1-(2-\alpha_0)X\Psi(X)+\frac{\alpha_0}{a}\Psi^2(X)\right]$$

在正常情况下，以上的公式便改为如下的形式:

$$\left.\begin{array}{lll}
y=2.34\text{ 米}(1+\tan^2 z_0) & (\text{目视}) & z_0<75^\circ \\
\left.\begin{array}{l} X=21.265\cos z_0 \\ y=1890\text{ 米}(1-1.9997X\Psi(X)+0.2683\Psi^2(X)) \end{array}\right\} & \begin{array}{l}\lambda=0''.430\\(\text{照相})\end{array} & z_0>75^\circ \\
\left.\begin{array}{l} X=21.244\cos z_0 \\ y=1864\text{ 米}(1-1.9997X\Psi(X)+0.2641\Psi^2(X)) \end{array}\right\} & \begin{array}{l}\lambda=0''.575\\(\text{目视})\end{array} & z_0>75^\circ
\end{array}\right\}0^\circ,76\text{ 厘米}$$

下表给出对于 z_0 的各种数值的 y 的数量级. 我们由此了解，由于蒙气差的原故，太阳的视差在地平上约增 0″.003; 对于小于 80° 的天顶距，这效应便不显著(0″.0001).

	z_0	y	z_0	y
	0°	2.3 米	78°	51 米
	30	3.1	80	71
	40	4.0	82	105
	50	5.7	83	132
	60	9.4	84	171
$t=0$°C	70	20.0	85	228
$P=76$ 厘米	75	34.9	86	316
(目视)			87	461
			88	715
			88.5	917
			89	1204
			89.5	1622
			90	2251

这表对日月食和月掩星的计算，需要月亮的视差时，显然是有用的.

假设距离地球很远的观测者使用测微器去量地球的视直径. 令 O_1M_1 与 O_2M_2 为两条大约平行的渐近线指向这远方的观测者（图 101）；这两线光分别在 O_1 与 O_2 处与地球相切；在这两点它们的天顶距都是 $90°$. 这圆面的视周界，在远方观测者眼里是 O_1O_2 圆所成的象；这是以 T_1T_2 为直径的圆. 但

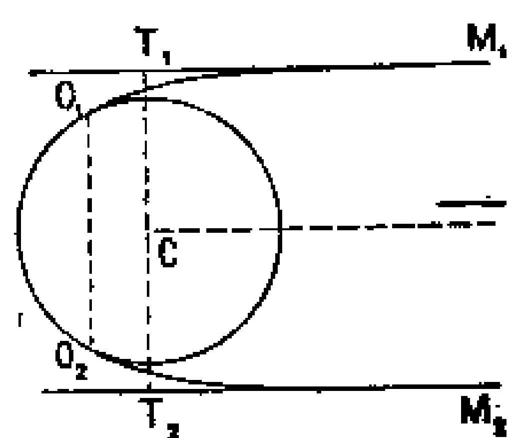


图 101

$$CT=n_0r_0 \qquad (n=1,\ \sin z_0=1)$$

和 $$OT-r_0=\alpha_0r_0=1864\text{ 米} \qquad (0°\text{C},\ 76\text{ 厘米})$$

由于蒙气差的效应，地球好象是膨胀了. 这问题与前一问题是不同的；因为高度 y 的计算，这里是在 CT 垂线上，而不象前一情形在 CO 线上.

§ 80　大气色散，色闪烁

我们在 § 75 内研究过在给定视天顶距的情形下大气色散的问题.

在消色仪器里观测一颗星时，它表现为垂直圈上一个短短的光谱，红在下而蓝在上（假设星象是矫正了的）. 试求这光谱的长度. 这里真天顶距 z_1 是给定量.

令 $$R=f(\alpha_0,\ z_0)$$

R 对于 α_0 的导数由下式给出：

$$\frac{dR}{d\alpha_0}=\frac{\partial f}{\partial\alpha_0}+\frac{\delta f}{\delta z}\,\frac{dz_0}{d\alpha_0}$$

但由于 $$dz_0=-dR$$

因此 $$\frac{dR}{d\alpha_0}=\frac{\delta f}{\delta\alpha_0}\,\frac{1}{1+\dfrac{\partial f}{\partial z_0}}$$

在拉普拉斯公式的有效范围内，

$$R=\alpha_0(1-\beta_0)\tan z_0-\alpha_0\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^3 z_0$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta f}{\partial\alpha_0}&=\frac{R}{\alpha_0}+\frac{\alpha_0}{2}\tan^3 z_0=\frac{R}{\alpha_0}\left(1+\frac{\alpha_0}{2}(1+\beta_0)\tan^2 z_0\right)\\
\frac{\delta f}{\partial z_0}&=\alpha_0(1+\tan^2 z_0)\left(1-\beta_0-3\left(\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^2 z_0\right)\\
1+\frac{\delta f}{\partial z_0}&=1+\alpha_0(1-\beta_0)+\alpha_0\left(1-\beta_0+\frac{3}{2}\alpha_0\right)\tan^2 z_0
\end{aligned}\right\}$$

由此，简化后得

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{d\alpha_0}&=\frac{R}{\alpha_0}\left(1-\alpha_0(1-\beta_0)-\frac{\alpha_0}{2}\tan^2 z_0\right)\\
&=\tan z_0[(1-\alpha_0)(1-\beta_0)-\beta_0\tan^2 z_0]
\end{aligned}$$

令 $\Delta\alpha_0$ 表示 α_0 对于有效波长的变量的变化，ΔR 为对应的光谱的角度量. 设

$$K=\frac{\Delta R}{R}\,\frac{\alpha_0}{\Delta\alpha_0}=1-\alpha_0(1-\beta_0)-\frac{\alpha_0}{2}\tan^2 z_0$$

当 $z=80°$ 时，求得 $K=0.995$. 于是光谱的角范围大致与蒙气差和空气的色散本领成正比例. 我们要证明在地平附近结果便不相同；但是我们先研究经过色散后的光线的行程.

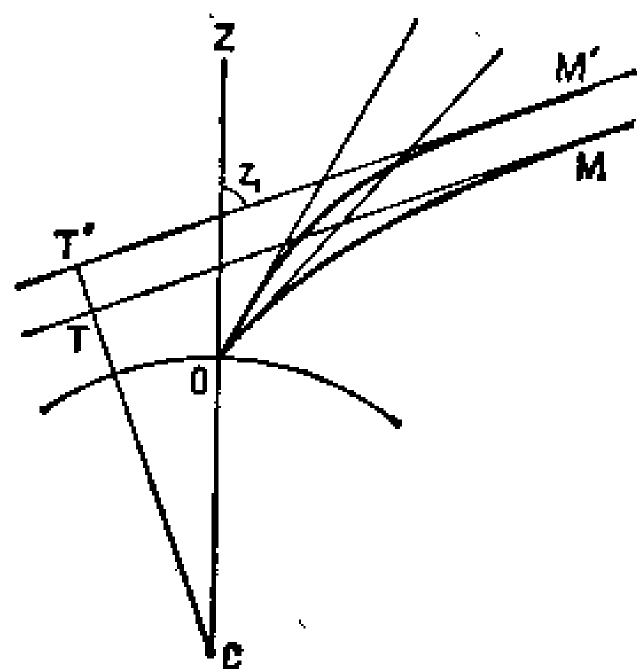


图 102

令 OM 与 OM' (图 102) 为对应于波长为 λ 与 λ' 的两条光线；CT 与 CT' 为从地心向它们的渐近线所作的垂线. 令 $TT'=\Delta d$.

$$CT=n_0 r_0 \sin z_0$$

$$\begin{aligned}\Delta d&=r_0(\Delta\alpha_0 \sin z_0+n_0 \cos z_0 \Delta z_0)\\&=r_0 \sin z_0 \Delta\alpha_0\left(1-n_0 K\frac{R}{\alpha_0}\cot z_0\right)\\&=r_0 \sin z_0 \Delta\alpha_0\{1-(1+\alpha_0)\\&\quad\times[(1-\alpha_0)(1-\beta_0)-\beta_0 \tan^2 z_0]\}\end{aligned}$$

$$\Delta d=l_0 \sin z_0(1+\tan^2 z_0)\Delta\alpha_0$$

这是瑞利(Rayleigh)的公式，式中 l_0 是均匀大气的高度(§ 74). 当 $z=80°$, $\Delta\alpha_0=28\cdot10^{-7}$ (在 0″.50 与 0″.65 之间)，求得

$$\Delta d=0.73 \text{ 米}$$

这个离差度足够使两线光经过大气所受的微扰是独立的，而且使红蓝两色光的闪烁互不相干；由此作成星色的变化，即所谓色闪烁现象. 天顶距小于 45° 的星，$\Delta d=0.032$ 米，色闪烁便不显著.

试用如下的公式来讨论这个问题：

$$R=\alpha_0\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)\tan z_0 \Phi\left(\frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}\right)$$

这公式直到地平仍然有效. Ψ 与 Φ 两函数的导数的表达式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\Psi}{dX}=2X\Psi(X)-1\\&\frac{d\Phi}{dX}=\frac{\Phi(X)}{X}-2X[1-\Phi(X)]\end{aligned}\right\}$$

略去高阶项，便得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha_0}{R}\frac{\delta f}{\partial\alpha_0}=1-\frac{\alpha_0}{2}+\frac{\alpha_0}{4a}-\frac{\alpha_0}{2a}X^2\frac{1-\Phi(X)}{\Phi(X)} \qquad X=\frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}\\&\frac{\alpha_0}{R}\frac{\partial f}{\delta z_0}=\cot z_0+2X^2\frac{1-\Phi(X)}{\Phi(X)} \qquad a=\beta_0-\frac{\alpha_0}{2}\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\alpha_0}{R}\frac{dR}{d\alpha_0}=K=\frac{1-\frac{\alpha_0}{2}+\frac{\alpha_0}{4a}-\frac{\alpha_0}{2a}X^2\frac{1-\Phi(X)}{\Phi(X)}}{1+\alpha_0\Phi(X)+\frac{\alpha_0}{a}\sin^2 z_0(1-\Phi(X))}$$

在地平，这式简化为

$$K=\frac{1-\frac{\alpha_0}{2}+\frac{\alpha_0}{4a}}{1+\frac{\alpha_0}{a}}=0.841$$

由此算出：当 $\Delta\alpha_0=28\cdot10^{-7}$，波长在 0.50 与 0.65 之间时，$\Delta R=18''$．这是一颗星位于海面时，在这两波长之间的光谱的视高度．

至于两线光进入大气时相隔的距离 Δd，表达式为

$$\Delta d=r_0\sin z_0\Delta\alpha_0\left[1-(1+\alpha_0)\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)K\Phi(X)\right]$$

即对于没于西地平时的星，

$$\Delta d=17.8\text{ 米}$$

下表列出 K，ΔR 和 Δd 随 z_0 的变化：

z_0	K	$\Delta\alpha_0=28\cdot10^{-7}$	
		ΔR	Δd
40°	1.000	0.″48	0.02 米
50	1.000	0.69	0.04
60	0.999	1.00	0.08
70	0.999	1.57	0.17
75	0.998	2.11	0.3
80	0.995	3.16	0.7
82	0.993	3.9	1.0
84	0.988	5.0	1.6
85	0.984	5.8	2.1
86	0.978	6.9	3.0
87	0.967	8.4	4.3
88	0.948	9.6	6.5
88.5	0.933	11.9	8.2
89	0.912	13.6	10.5
89.5	0.883	15.7	13.5
90	0.843	18.3	17.8

§ 81 地面折射，地平俯角，蜃景

1．地面折射，即大气里两点(如 O 与 A)之间的折射(图 103)，若已知大气密度的分布定律，则这一计算可以贯彻到底，但过程却是很繁复的．可是我们可以采用一个比较简单的理论，因为地面折射(或部分折射)比较天文折射(或全部折射)更加不能确定．由于气象情况的影响，地面折射变化很大，而又不能如全部折射之可以不管大气密度的分布定律，即使在光线与垂直线邻近的情形．

为了估计地面折射，先计算 A 点的光线的曲率 C(图 92)．仍取 § 74 里的符号

$$C=\frac{dz}{ds}$$

其中

$$dz=-\frac{dn}{n}\tan V\qquad ds=\frac{dr}{\cos V}$$

因此 $$C=-\frac{1}{n}\frac{dn}{dr}\sin V=-\frac{n_0r_0}{n^2r}\frac{dn}{dr}\sin z_0$$

可见曲率 C 与折射率对于高度的导数成正比例．因此，由于气象的原因，光线上的曲率有时作迅速的变化，于是不能得到确切的计算．在近似的计算里，我们可以作一些简化的假设，例如取因数 $n_0r_0/n^2r=1$，我们还可以设大气是等温的，于是有

$$n-1=\alpha_0e^{-h/l_0}\qquad l_0=8\text{ 公里}$$

由此导出 $$\frac{dn}{dr}=\frac{dn}{dh}=-\frac{\alpha_0}{l_0}e^{-h/l_0}$$

最后我们只讨论从不高处而来的地平附近的光线，这样可将 e^{-h/l_0} 和 $\sin z_0$ 两个量皆当做是 1．于是

$$C=-\frac{dn}{dr}=\frac{\alpha_0}{l_0}=\frac{\alpha_0}{\beta_0r_0}\tag{1}$$

如以 k 表示光线的曲率与地球的曲率之比，即设

$$k=Cr_0$$

则由(1) $$k=\frac{\alpha_0}{\beta_0}=0.23$$

可见光线上每点的曲率主要靠局部气象因数．因而它容易感受温度的梯度、湿度等不规则变化的影响．k 的观测值常与其计算值有很大的差别，海上的观测者常采用

$$k=0.16$$

计算 O 与 A 两点间的地面折射(图 103)；设 θ 为这两点的垂线之间的角；由于这两点的高度都不大，OA 弧长大约等于

$$r_0\theta$$

两端的切线所成之角的数值为

$$Cr_0\theta=k\theta$$

既然将光线看做是一段圆弧，从 O 点瞄准 A 点的方向便应该加以这个角的一半作为改正值，即

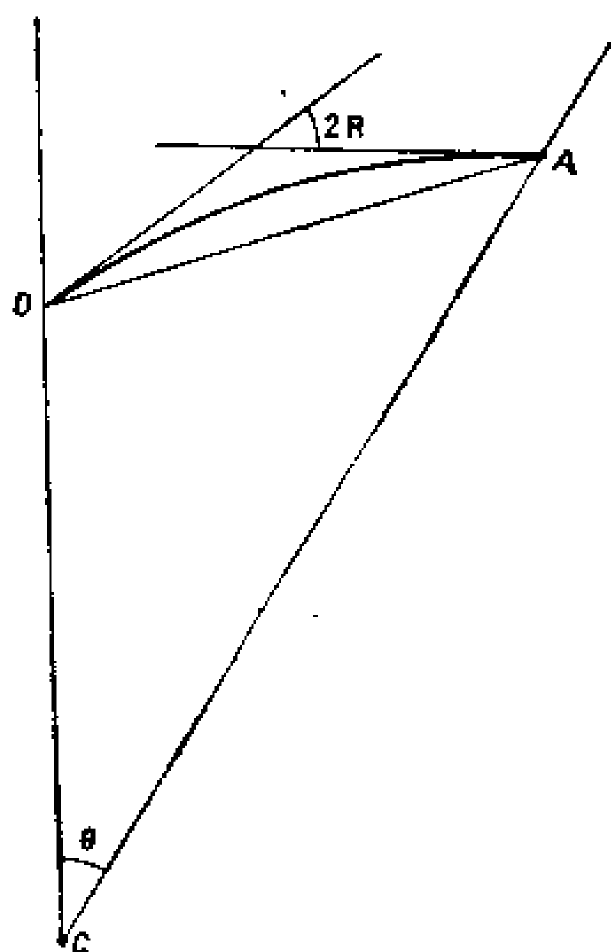


图 103

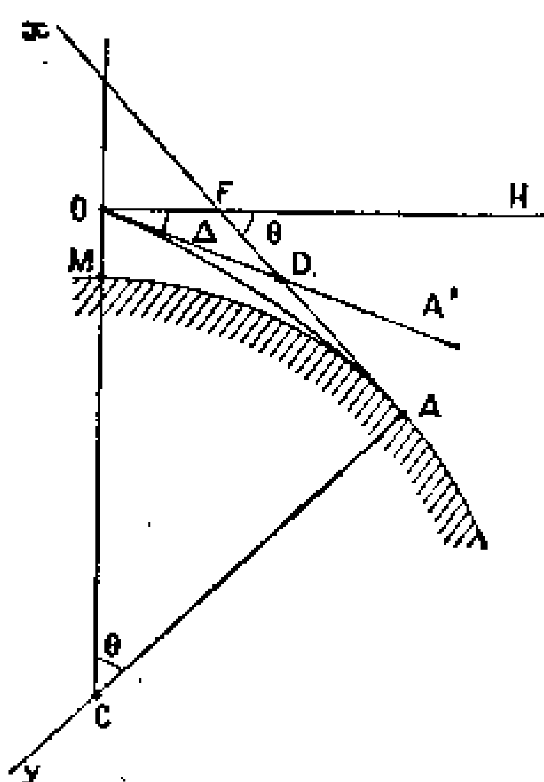


图 104

$$R=\frac{1}{2}k\theta$$

2．在海上观测天体的视高度常用反光的六分仪，因而其参照面是眼里的海面．这样求得的视高度不但应加蒙气差的改正，而且还须考虑地平俯角（图 104）．在高出海面 h 的观测者 O 所看见的地平在 OA' 向，即在 A 点切于海面的光线到 O 点的切线方向．$\angle A'OH$ 角叫做地平俯角．先计算 $\theta=\angle OCA$．设以 A 点的地平线为 x 轴，地球的半径 AC 为 y 轴，则表示 AM 弧的方程式，在所要的近似度下为

$$y_1=\frac{x^2}{2r_0}$$

而光线的方程式为

$$y_2=\frac{kx^2}{2r_0}$$

若令

$$y_1-y_2=h$$

又

$$x=r_0\theta$$

便得

$$\theta=\sqrt{\frac{2h}{r_0}}\frac{1}{\sqrt{1-k}}$$

另一方面，因 ODF 三角形的 D 角等于 $k\theta$（见上），而 F 的外角等于 θ，于是导出地平俯角：

$$\Delta=\theta(1-k)=\sqrt{\frac{2h}{r_0}}\sqrt{1-k}$$

在海上，距离表为海里（1852 米），即在地心所张之角为 $1'$ 的弧长．若以米表示 h，并以分表示 θ 和 Δ 公式里 $\sqrt{h}$ 的系数，我们便得以弧分表示的地平俯角，和以海里表示的视地平距；所用的公式如下（取 $k=0.16$）：

$$\theta=2'.10\sqrt{h} \qquad \Delta=1'.77\sqrt{h}$$

若不计入折射，则

$$\theta=\Delta=1'.93\sqrt{h}$$

若船上的了望台高出海面 16 米，则地平俯角为 $7'.1$，可以望见 8.4 海里（或 15.6 公里）外海上的浮标；而 49 米高的灯塔可在

$$\theta=2'.10(\sqrt{16}+\sqrt{49})=23.1 \text{ 海里}$$

外被人望见．折射约增加 2 海里．

3．接近地平的光线，凹面常向下方；以上证明（1 式）其近似值为

$$C=-\frac{dn}{dh}$$

这导数本身是负数．但是在强烈阳光的照射下，地面或海面附近过于晒热时，它也可能成为正数．于是光线的凹面便颠倒而转向上，在这样的情况下，人们可能看见所谓蜃景或海市一类的幻象．当光线从 A 点传到 O 处的观测者（图 105 上）是沿两个不相同的途径：一个是正常途径，即在颠倒的温度梯度的空气层之外传来的，另一个是反常途径，即沿地面附近曲率颠倒的气层里传来的．例如，A 是远处的树，在人目里成了两段，好象是这树在池沼里反常的景象．这种蜃景常发生在沙漠地区．

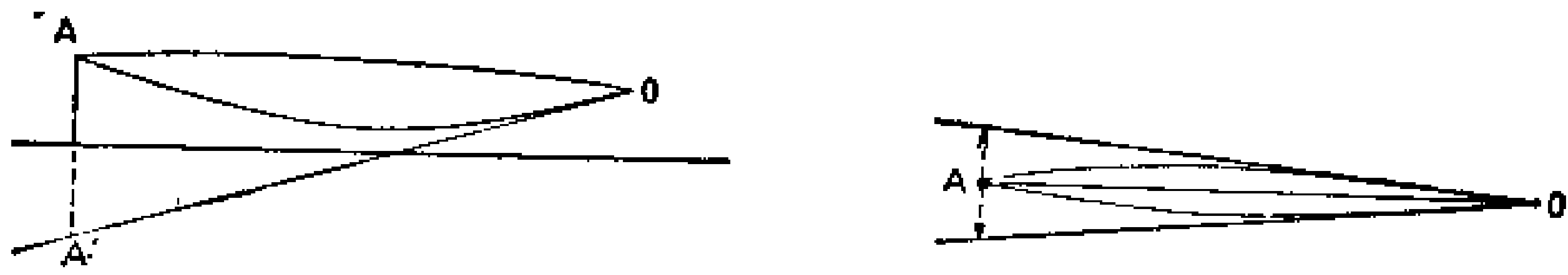


图 105

还有另外一种出现在海上的蜃景（“海市”），发生于水面比上层空气温度较高的情况中．由于海面附近空气的折射率有稀微的颠倒，距离海面不远的观测者 O 接收到从 A 物而来，沿几条曲率不同的路径的光线（图 105）．因此观测者眼中的 A 物好象在垂直向上伸长了；一个矮小的岩石可能幻化为一座挺立的高峰，几堆白色的石块可能幻化为高悬空中的海口码头…….

下篇　天体力学引论

第十章　行星与彗星的运动

行星运动的研究，在天文学与力学的发展上，起过创始的作用．地上的实验总是受到摩擦力与联系力的影响，太阳系为我们提供唯一的自由质量的情形，而且在确定力的作用下，其运动可能为人们所观测而达到所需的精确度．自从十七世纪以来，这一研究便导出了力学的原则，即使在今天，人们还从行星与其卫星来检查这些原则的准确程度，并且核验由理论所预见的相对论的效应．

自古至今，天文学家对于行星运动的兴趣，从来没有衰减．近三百年来，人们在这一领域里取得很多显著的成就，也许会使人认为发现的来源业已涸竭；可是由于月亮与行星理论的进展，而导出地球自转不均匀性的发现，便证明事实并不是这样的．天体力学还有不少缺陷与不确定之处，仍值得引起数学家的注意*．

本章叙述有关椭圆、抛物线与近似抛物线运动的经典公式，它们对于轨道的决定与星历表的计算都很有用．

§ 82　开普勒定律，牛顿定律

1609 年开普勒发现火星的轨道不是古人认为的偏心圆，而是椭圆．这是他用第谷·布拉赫传给他的、在当时是很精确的观测而作出的成果．开普勒的名著《火星运行论》里有关行星对于太阳运动的两个定律．其第三律刊布于 1619 年．根据这一定律，已知行星的恒星周期时，得计算其轨道的长轴．现陈述开普勒定律如下：

第一律：行星的轨道是椭圆，太阳在一焦点上．

第二律或面积定律：向径扫过的面积与时间成正比例．

第三律：公转周期的平方与长轴的立方成正比例．

1687 年牛顿在其名著《自然哲学的数学原理》中宣布了一个更广泛的定律，他由这定律推导出开普勒定律是一个特殊的情形，轨道的形状除了椭圆之外还有抛物线与双曲线．哥白尼与开普勒都认为，行星之所以在轨道上运行，是由于从太阳而来的一种引力．牛顿在解释开普勒运动之时找到了这个力的定律．我们可以将牛顿的万有引力定律陈述为：质量为 m 与 m'，距离为 r 的两质点 A 与 B，互相施一种引力，方向在 AB 线上，其强度与两质量正比，而与其距离的平方反比．设取 A 点为原点，AB 为正方向(图 106)，则 B 点所受之力为

$$F=-k\frac{mm'}{r^2}$$

* 由于快速电子计算机的发明，增加了人们计算的能力，更由于人造天体的发射，使人类进入宇宙航行的时代，皆使天体力学得到新的发展——译者注

设以 A 点为定点，试研究 B 点受该引力的作用所引起的运动．设力是有心力，则运动遵循面积定律，轨道是平面曲线．设 θ 为向径 AB 与在轨道平面内所选的一个原始方向 Ax 之间的夹角(图 106)．

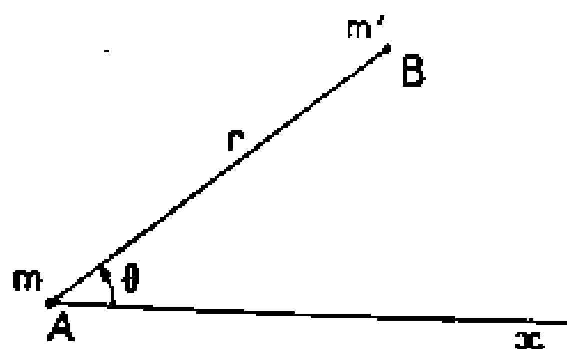


图 106

设将面积速度的两倍表为 C（以后称为面积常数），则

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C \tag{1}$$

令 V 表示速度，则能量守恒定律可以写为

$$\frac{1}{2}m'V^2-\int Fdr=\frac{1}{2}m'V^2-k\frac{mm'}{r}=\text{常数}$$

因此可设

$$V^2-2\frac{km}{r}=h \tag{2}$$

h 是一个新常数．

又因

$$V^2=\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{dt^2}$$

从以上三式消去 V^2 与 dt 便得

$$\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{r^4d\theta^2}-2\frac{km}{C^2r}-\frac{h}{C^2}=0 \tag{3}$$

令

$$u=\frac{1}{r}-\frac{km}{C^2}\qquad du=-\frac{dr}{r^2}$$

则方程(3)可以写为

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2-\left[\frac{k^2m^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}\right]=0$$

若方括弧内之量为负，则这个方程没有实数解．假设其为正量，而令其值为 q^2，则这个方程可以写为

$$\pm d\theta=\frac{du}{\sqrt{q^2-u^2}}$$

其通解为

$$\pm(\theta-\theta_0)=\arccos\frac{u}{q}$$

或

$$u=q\cos(\theta-\theta_0)$$

或回到原来的符号，便是

$$\frac{1}{r}=\frac{km}{C^2}\left[1+\sqrt{1+\frac{C^2h}{k^2m^2}}\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

令

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1+e\cos v) \tag{4}$$

式内

$$\left.\begin{aligned}&p=\frac{C^2}{km}\\&e^2=1+\frac{C^2h}{k^2m^2}=1+\frac{hp}{km}\\&v=\theta-\theta_0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这是参量；通径为 p，偏心率为 e，原点在焦点的圆锥曲线的方程式．将(5)内的第二式代入方程(2)，便可写为

$$V^2 = km\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right) \tag{6}$$

轨道的性质随 e、因而随 V 的数值而不同．一个特殊值

$$V_0 = \sqrt{2\frac{km}{r}}$$

叫做抛物线速度．这是质点无初速度，从无限远自由落向 A 点，达到距离 r 处的速度．

按以下三种情形得出三种圆锥曲线：

$h<0$	$V<\sqrt{2\frac{km}{r}}$	$e<1$	椭圆
$h=0$	$V=\sqrt{2\frac{km}{r}}$	$e=1$	抛物线
$h>0$	$V>\sqrt{2\frac{km}{r}}$	$e>1$	双曲线

第一种是行星与周期彗星的开普勒运动的情形．第二种是轨道为抛物线的彗星的运动．还有极少数彗星走双曲线轨道，其偏心率稍大于 1．在这一情形，轨道只有包围太阳作为焦点的那一支．容易证明另一支相当于斥力效应下的轨道．我们不对偏心率有任意值的双曲线运动作一般的讨论，但只于 § 85 内，在近似抛物线运动的名义下，考察偏心率与 1 接近的圆锥曲线运动．

现在讨论两体问题．这是两个自由质点（A 与 B）按照牛顿定律互相吸引的运动问题（假设外力为零）（图 107）．质心 G 的绝对运动为匀速直线运动．先研究 B 点对于 A 点的运动．这两点在内力的作用下而运动．因此 B 点的绝对加速度为

$$\frac{F}{m'} = -k\frac{m}{r^2}$$

由约定的符号规则，A 点的绝对加速度为

$$-\frac{F}{m} = k\frac{m'}{r^2}$$

B 点对于 A 点的相对加速度是这两点的绝对加速度之差，即

$$-k\frac{m+m'}{r^2}$$

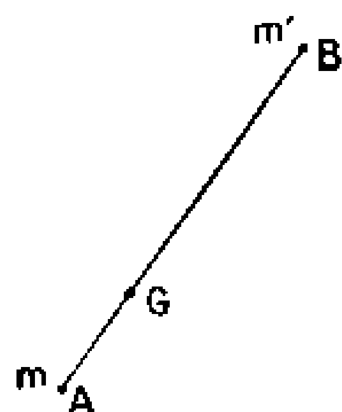


图 107

B 点对于 A 点的运动，正如 A 是固定的引力中心，其质量是这一系统的总质量一样．因此相对运动的轨道还是圆锥曲线，其参量与偏心率的表达式为

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{C^2}{k(m+m')} \\ e^2 &= 1 + \frac{hp}{k(m+m')} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

而且

$$V^2 = k(m+m')\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right) \tag{8}$$

在各种情况下，轨道上 r 为极小和 V 为极大之点叫做近日点，即圆锥曲线上最接近太阳的顶点．近日距是

$$q = \frac{p}{1+e}$$

我们再证明运动的速端曲线是正圆．分速很容易求得；径向分量，因：

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos v}{p} \qquad -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}=-\frac{e\sin v}{p}\frac{dv}{dt}$$

于是为

$$\frac{dr}{dt}=\frac{Ce\sin v}{p} \tag{9}$$

再算与向径正交的分量:

$$r\frac{dv}{dt}=\frac{C}{r}=\frac{C(1+e\cos v)}{p} \tag{10}$$

将(9)与(10)两式联合，可以表明速度是长度不变的两个向量的几何和，这两量(图 108)是

$$V_1=\frac{C}{p} \qquad V_2=\frac{Ce}{p}=V_1e$$

V_1 与向径 AB 正交，V_2 与过圆锥曲线的焦点轴线 Ax 正交，指向与近日点的速度的方向相同．可见，速端曲线是半径为 $\frac{C}{p}$ 的正圆，其中心到极点 A 的距离为 $\frac{Ce}{p}$．因此，在开普勒运动的情形，极点在速端曲线之内；但在抛物线的情形，极点则在速端曲线之上．在双曲线的情形，极点在速端曲线之外，而且容易证明速端曲线只是圆的一个部分．

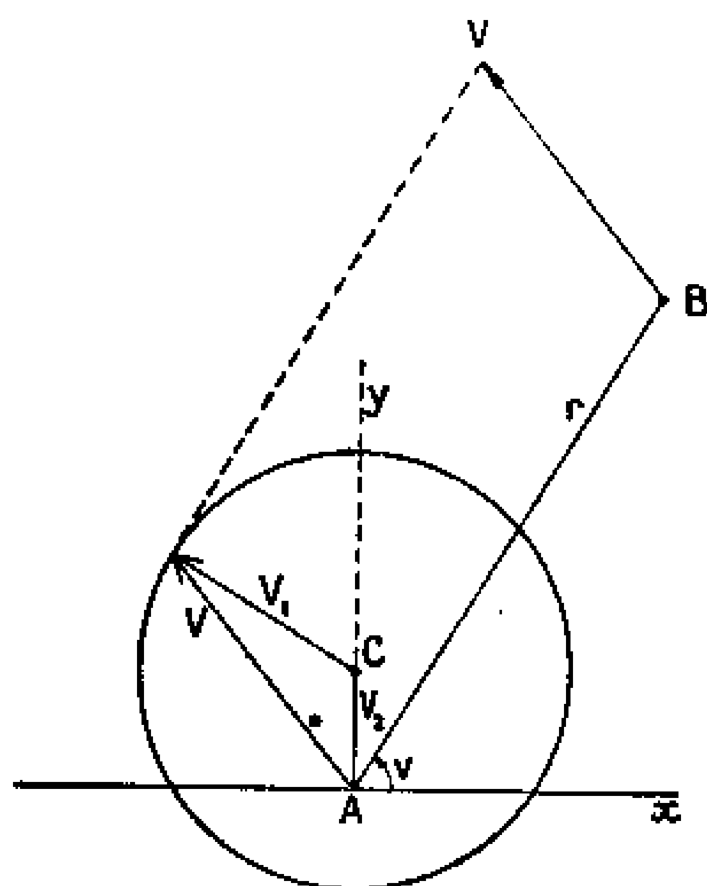


图 108　速端曲线

设 β 表示速度与向径间之角的余角，则

$$\tan\beta=\frac{dr}{rdv}=\frac{e\sin v}{1+e\cos v}=\frac{re\sin v}{p} \tag{11}$$

在圆运动的情形，$\beta=0$．

以下各节我们将研究椭圆运动(行星与周期彗星)和抛物线运动(彗星)．这一章所讨论的运动都以太阳为固定的标点．我们无形之中假定太阳系里没有外力的作用，因而其质量中心没有加速度．这假设的意义是以这质量中心为原点，并将坐标轴指向恒星的参照系，是一种绝对参照系(§ 1)．

§ 83　椭圆运动或开普勒运动

设 S 代表太阳，B 代表行星(或彗星)，P 表示近日点，A 表示远日点，换言之，即椭圆的长轴(也叫拱线)上的两个顶点(图 109)．

设 a 表示轨道的半长轴，我们已知它与参量 p 和偏心率 e 的关系为

$$a=\frac{p}{1-e^2} \tag{1}$$

于是

$$C^2=k(m+m')a(1-e^2) \tag{2}$$

$$V^2=k(m+m')\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

速度 V 等于质量为 m' 的动点无初速度、自由地向太阳坠落，从距离 $2a$ 到达 r 处时的速度．

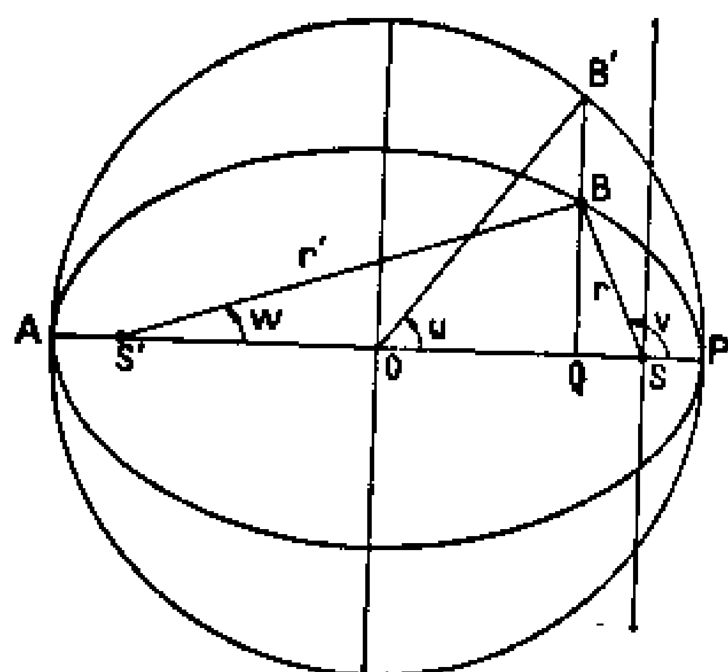


图 109

已知椭圆的面积与恒星周期 T，可以将面积速度表示为

$$C=\frac{2\pi}{T}a^2\sqrt{1-e^2} \tag{4a}$$

设 n 表示行星的平均运动，则

$$C=na^2\sqrt{1-e^2} \tag{4b}$$

由(2)与(4a)或(4b)消去 C，得

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=n^2a^3=k(m+m') \tag{5}$$

若行星的质量与太阳比较可以略而不计，则行星之间彼此没有作用，因而它们的运动严格地遵循开普勒的头两个定律．它们的半长轴与恒星周期的关系便是

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{km}{4\pi^2}$$

即开普勒第三定律．事实上，行星的质量虽比太阳小而却不可忽略，因此：1．行星彼此间所施的摄动有相当显著的效应（见十二章）；2．$a^3:T^2$ 之比对于一切行星不是严格地有相同的数值．太阳系里开普勒定律虽然很近似地得到证实，但是如要精密地计算行星的运动，便须使用牛顿定律，而且须将太阳系每个成员所施的力一并加以考虑．

以 n^2a^3 代替方程式(3)内的 $k(m+m')$，则

$$V=na\sqrt{\frac{2a-r}{r}}=na\sqrt{\frac{r'}{r}}$$

r' 表示轨道上对第二焦点的向径．当行星经过轨道的短轴两端之时，$r'=r$，则 $V=na$．

由此容易检验速端曲线的半径为(参看前节图 108)

$$V_1=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$$

它的中心与极点的距离等于

$$V_2=V_1e=\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}$$

方便的方法是将行星的极坐标表为偏近点角的函数．从椭圆上的 B 点作 BQ 线与拱线 PA 正交．它与大辅助圆相交于 B' 点．偏近点角

$$u=\angle POB'$$

我们可以立刻检验有如下的关系式(三章 § 30)

$$\left.\begin{aligned} r\cos v&=a(\cos u-e)\\ r\sin v&=a\sqrt{1-e^2}\sin u\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因而

$$\left.\begin{aligned} r&=a(1-e\cos u)\\ \cos v&=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}\\ \sin v&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(6)内第一式与(7)内第一式可以写为

$$
\left.\begin{aligned}
r\left(\cos^2\frac{v}{2}-\sin^2\frac{v}{2}\right)&=a(\cos u-e)\\
r\left(\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2\frac{v}{2}\right)&=a(1-e\cos u)
\end{aligned}\right\}\tag{8}
$$

将这两式加和减，便得

$$
\left.\begin{aligned}
r\cos^2\frac{v}{2}&=a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}\\
r\sin^2\frac{v}{2}&=a(1+e)\sin^2\frac{u}{2}
\end{aligned}\right\}\tag{9}
$$

于是

$$
\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}\tag{10}
$$

这公式立刻提供 v 表为 u 的函数的展开式．由于我们业已证明(§ 18)，从

$$
\tan y=p\tan x
$$

式内 $p>0$，可推出

$$
y=x+q\sin 2x+\frac{q^2}{2}\sin 4x+\frac{q^3}{3}\sin 6x+\cdots
$$

式内

$$
q=\frac{p-1}{p+1}
$$

对于现在的情形，

$$
\left.\begin{aligned}
q&=\frac{\sqrt{1+e}-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}+\sqrt{1-e}}=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}=\frac{e}{2}+\frac{e^3}{8}+\cdots\\
v&=u+2q\sin u+q^2\sin 2u+\frac{2}{3}q^3\sin 3u+\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{11}
$$

对于地球的情形，

$$
e=0.01673014\quad(1950.0)
$$

求得

$$
\left.\begin{aligned}
v&=u+3451''.08\sin u+14''.44\sin 2u+0''.08\sin 3u+\cdots\\
v&=u+0^\circ.958633\sin u+0^\circ.004010\sin 2u+0^\circ.000022\sin 3u+\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{12}
$$

§ 84　开普勒方程展开为时间的函数的公式

为了决定行星在 t 时的位置，须将 u 表为 t 的函数．我们已将行星的坐标表为参量 u 的函数．为此，我们使用下列两式：

$$
\left.\begin{aligned}
&r^2\frac{dv}{dt}=C\quad\text{或写为}\quad r^2dv=na^2\sqrt{1-e^2}\,dt\\
&\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}
\end{aligned}\right\}\tag{1}
$$

由第二式的微分得

$$
\frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}
$$

由前节(9)式内的一式，这式可以写为

$$\frac{dv}{du}=\sqrt{1-e^2}\,\frac{a}{r}=\frac{\sin v}{\sin u}$$

从这式与(1)内的第一式消去 v，便得如下的重要关系：

$$\frac{du}{dt}=\frac{na}{r}=\frac{n}{1-e\cos u} \tag{2}$$

这是已经分离变数的微分方程，积分后便有

$$u-e\sin u=n(t-t_0) \tag{3}$$

这叫做开普勒方程．已知 t 与 t_0 时其解答提供偏近点角．容易检验 t_0 是过近日点的时刻．而

$$M=n(t-t_0) \tag{4}$$

叫做平近点角．这是与行星同时从近日点出发，以匀角速 n 运动的一点，在 t 时的真近点角．

开普勒方程显然有一个根，因为其左端是 u 的连续增函数，与 u 同时从 $-\infty$ 变到 $+\infty$．我们可用牛顿的逐渐逼近法去解这个方程．设 u_0 为这方程的一个近似根，先计算与之对应的 M 的数值 M_0：

$$M_0=u_0-e\sin u_0$$

两者之差

$$\varepsilon_0=M-M_0=e\sin u_0-(u_0-M)$$

一般不为零．设 u 为所寻求的根，则大约有

$$u-u_0=\varepsilon_0\,\frac{du}{dM}$$

因此由下式得比 u_0 更接近的第二近似根 u_1：

$$u_1=u_0+\frac{\varepsilon_0}{1-e\cos u_0}$$

再将 u_1 象 u_0 那样，用作去求第三近似值 u_2，并这样逐渐逼近下去．连续几个残差 ε_1，ε_2…逐渐变小．e 愈小时这方法收敛得愈快．

我们还可用另外的方法去求这近似值，若我们已知 u 的两个近似值 u' 与 u''，一较大而一较小．我们算出与之对应的平近点角 M' 与 M''，且用直线内插法以求 u_1：

$$u_1=u'+(u''-u')\,\frac{M-M'}{M'-M''}$$

如果需要，还可用 u 的两个第二近似值，做同样的计算，如此逐渐逼近下去．

如果偏心率不接近于 1，第二法比较迅速．对于一般的情形，有利的办法是取一个已经很接近的数值 u_0．偏心率小时，可取

$$u_0=M+e\sin M$$

于是

$$\varepsilon_0=e(\sin u_0-\sin M)$$

通常使用一种开普勒运动的数字表(附表 XXXI)，给出 u 的近似值，例如对 e 和 M 的函数作双内插，可求到 $0^\circ.01$．如果我们要编制一本星历表，更好是计算一个辅助表；当给定的某一定 e 值时，偏近点角每一度在表内列出 M 的数值．

使用以百分之一度或千分之一度为间距的三角真数表，则大大便利计算．将偏心率表为度数，而以 57.29578 乘其真数之值．

以上所说的逐渐逼近法可用于一切椭圆轨道．总之，偏心率近于 1 时，我们可用另外的方法(将在 § 85 内叙述)迅速地求出行星的坐标：

例 1 对于 1950 的地球，已知

$$e=0.01673014=0^\circ\!.958566$$
$$M=45^\circ\!.00000$$

用 6 位真数表计算 u, v 与 r.

因偏心率小，这里可设

$$u_0=M+e\sin M$$

$$\begin{aligned}
M&=45^\circ\!.00000 & \sin M&=0.707107\\
e\sin M&=0^\circ\!.67781 & \sin u_0&=0.715422\\
u_0&=45^\circ\!.67781 & \cos u_0&=0.698692\\
e\sin u_0&=0^\circ\!.68578 & &\\
u_0-M&=0^\circ\!.67781 & &\\
\varepsilon_0&=0^\circ\!.00797 & 1-e\cos u_0&=0.98831\\
u_1&=u_0+0^\circ\!.00806 & &\\
u_1&=45^\circ\!.68587 & \sin u_1&=0.715521\\
e\sin u_1&=0^\circ\!.68587 & \cos u_1&=0.698592\\
\varepsilon_1&=0^\circ\!.00000 & &
\end{aligned}$$

u_1 之解由此确定．于是由 § 83 内的(10)与(7)两公式得出

$$v=46^\circ\!.37583 \qquad \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}=1.016872\right)$$

$$\frac{r}{a}=0.988312$$

例 2 已知：

$$e=0.750986 \quad M=87^\circ\!.38920$$

求 u, v 与 r.

由表 XXXI，用双内插法得

$$u=123^\circ\!.33$$

先试用下列两个近似值($e=43^\circ\!.02833$)：

$$\begin{aligned}
&u' \ 123^\circ\!.33000 & &u'' \ 123^\circ\!.34000 & &u''-u'=0^\circ\!.01000\\
&e\sin u' \ \ 35^\circ\!.95103 & &e\sin u'' \ \ 35^\circ\!.94690 & &M''-M'=0^\circ\!.01413\\
&M' \ 87^\circ\!.37897 & &M'' \ 87^\circ\!.39310 & &M-M'=0^\circ\!.01023
\end{aligned}$$

$$u-u'=0^\circ\!.01\,\frac{0.01023}{0.01413}=0^\circ\!.00724$$

$$u=123^\circ\!.33724 \qquad \cos u=0.549566$$

由此得

$$v=157^\circ\!.01450 \qquad \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}=2.651731\right)$$

$$\frac{r}{a}=0.587284$$

设将 u, r, v 等展开为偏心率的乘幂的函数之时，这些展开式中的系数是平近点角的周期函数，因而是时间的函数．这一特性对于许多应用提供很大的优点．可是这样得出的级数，除了 e 之值很小的情形之外，不便于数字的计算，而且拉普拉斯还证明，$e>0.66274$

时，这些展开式不一定是收敛的.

现在假定这些展开式存在，而且在 e 小于上述的收敛半径之时有效这一假设下，推出几个展开式. 事实上，我们只在偏心率小时，才用这些展开式.

利用泰劳公式将偏近点角展开为偏心率的函数，一直到四阶项:

$$u=(u)_0+e(u')_0+\frac{1}{2}e^2(u'')_0+\frac{1}{6}e^3(u''')_0+\frac{1}{24}e^4(u'''')_0+\cdots$$

这些导数是对于 e 而取的，容易求得其前四个为

$$u-e\sin u=M$$
$$u'(1-e\cos u)-\sin u=0$$
$$u''(1-e\cos u)-u'(2\cos u-e\sin uu')=0$$
$$u'''(1-e\cos u)-u''(3\cos u-3e\sin uu')+u'^2(3\sin u+e\cos uu')=0$$
$$u''''(1-e\cos u)-4u'''(\cos u-e\sin uu')+3e\sin uu''+4\cos uu'^3$$
$$+6u'u''(2\sin u+e\cos uu')-e\sin uu'^4=0$$

设 $e=0$, 由此依次得

$$u_0=M$$
$$(u')_0=\sin M$$
$$(u'')_0=\sin 2M$$
$$(u''')_0=\frac{9}{4}\sin 3M-\frac{3}{4}\sin M$$
$$(u'''')_0=8\sin 4M-4\sin 2M$$

由拉格朗日级数得证明其公项的表达式为

$$\frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}(\sin^n M)$$

最后

$$u=M+e\sin M+\frac{e^2}{2}\sin 2M+\frac{e^3}{8}(3\sin 3M-\sin M)$$
$$+\frac{e^4}{6}(2\sin 4M-\sin 2M)+\cdots$$

我们可将这式写为傅里叶级数的形式:

$$u=M+\left(e-\frac{e^3}{8}\right)\sin M+\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{6}\right)\sin 2M+\frac{3e^2}{8}\sin 3M+\frac{e^4}{3}\sin 4M+\cdots \quad (5)$$

并可证明其公项为

$$A_n\sin nM=\frac{2}{n}J_n(ne)\sin nM$$

J_n 是以 ne 为变数的 n 阶白塞耳函数. 其前几个系数的表达式为

$$A_1=e-\frac{e^3}{8}+\frac{e^5}{192}-\cdots$$
$$A_2=\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{6}+\frac{e^6}{48}-\cdots$$
$$A_3=\frac{3e^2}{8}-\frac{27}{128}e^5+\frac{243}{5120}e^7-\cdots$$
$$A_4=\frac{e^4}{3}-\frac{4}{15}e^6+\frac{4}{45}e^8-\cdots$$

……………………

由 u 的展开式可以推出其他几个展开式．显著的一个是

$$\sin u=\frac{u-M}{e}=\left(1-\frac{e^2}{8}\right)\sin M+\left(\frac{e}{2}-\frac{e^3}{6}\right)\sin 2M$$
$$+\frac{3e^2}{8}\sin 3M+\frac{e^3}{3}\sin 4M+\cdots \tag{6}$$

另一方面，以上的关系式(2)可写为

$$\frac{du}{dM}=\frac{a}{r}$$

于是得

$$\frac{a}{r}=1+\left(e-\frac{e^3}{8}\right)\cos M+\left(e^2-\frac{e^4}{3}\right)\cos 2M+\frac{9}{8}e^3\cos 3M+\frac{4}{3}e^4\cos 4M-\cdots \tag{7}$$

由除法最后展开式给出

$$\frac{r}{a}=1+\frac{e^2}{2}-\left(e-\frac{3}{8}e^3\right)\cos M-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{3}e^4\right)\cos 2M$$
$$-\frac{3}{8}e^3\cos 3M-\frac{1}{3}e^4\cos 4M-\cdots \tag{8}$$

注意：r 对于时间的平均值不等于半长轴，而等于

$$a\left(1+\frac{e^2}{2}\right)$$

因
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r}{a}\,dM=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^2}{a^2}\,du=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-e\cos u)^2du=1+\frac{e^2}{2}$$

再考虑到
$$e\cos u=1-\frac{r}{a}$$

于是
$$\cos u=-\frac{e}{2}+\left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\cos M+\left(\frac{e}{2}-\frac{e^3}{3}\right)\cos 2M$$
$$+\frac{3}{8}e^2\cos 3M+\frac{1}{3}e^3\cos 4M+\cdots$$

以下两个量叫做行星的简化坐标：

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{r}{a}\cos v=\cos u-e\\ Y&=\frac{r}{a}\sin v=\sqrt{1-e^2}\sin u\end{aligned}\right\}$$

由 $\sin u$ 与 $\cos u$ 的展开式得

$$\left.\begin{aligned}X=&-\frac{3}{2}e+\left(1-\frac{3}{8}e^2\right)\cos M+\left(\frac{e}{2}-\frac{e^3}{3}\right)\cos 2M\\ &+\frac{3}{8}e^2\cos 3M+\frac{1}{3}e^3\cos 4M+\cdots\\ Y=&\left(1-\frac{5}{8}e^2\right)\sin M+\left(\frac{e}{2}-\frac{5}{12}e^3\right)\sin 2M\\ &+\frac{3}{8}e^2\sin 3M+\frac{1}{3}e^3\sin 4M+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

有人编制成 X 与 Y 的函数表，因其对于星历表的近似计算有用[1]．

最后，利用面积定律：

1) Innes: Tables of X and Y, App. to Union Obs. Circ. No. 71, 1927.

$$r^2\frac{dv}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}$$

可将 v 的展开式和以上的展开式取得联系．这式可以写为

$$\frac{dv}{dM}=\frac{dv}{ndt}=\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} \tag{10}$$

(7)式的平方可以写为

$$\frac{a^2}{r^2}=1+\frac{e^2}{2}+\frac{3}{8}e^4+\left(2e+\frac{3}{4}e^3\right)\cos M+\left(\frac{5}{2}e^2+\frac{e^4}{3}\right)\cos 2M$$
$$+\frac{13}{4}e^3\cos 3M+\frac{103}{24}e^4\cos 4M+\cdots$$

又因

$$\sqrt{1-e^2}=1-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{8}-\cdots$$

以上两式相乘，可以推出

$$\frac{dv}{dM}=1+\left(2e-\frac{e^3}{4}\right)\cos M+\left(\frac{5}{2}e^2-\frac{11}{12}e^4\right)\cos 2M$$
$$+\frac{13}{4}e^3\cos 3M+\frac{103}{24}e^4\cos 4M+\cdots$$

积分后得

$$v=M+\left(2e-\frac{e^3}{4}\right)\sin M+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4\right)\sin 2M$$
$$+\frac{13}{12}e^3\sin 3M+\frac{103}{96}e^4\sin 4M+\cdots \tag{11}$$

这一展开式立刻提供中心差 $v-M$ 的展开式[1]．

例　展开地球的真近点角与向径，设其偏心率

$$e=0.01673014=3450''.839 \quad (1950)$$

代入上式求得

$$v=M+6901''.436\sin M+72''.158\sin 2M+1''.047\sin 3M+0''.016\sin 4M+\cdots$$

$$\frac{r}{a}=1.00013995-0.01672838\cos M-0.00013992\cos 2M$$
$$-0.00000176\cos 3M-0.00000003\cos 4M-\cdots$$

当 $M=45°$，这两个展开式给出

$$v=45°+4880''.052+72''.158+0''.740+0''.000=46°22'32''.95$$

$$\frac{r}{a}=1.00013995-0.01182875+0.00000124+0.00000003=0.9883125$$

与前节用解开普勒方程的方法所得的结果相同．

中心差 $v-M$ 的极大值在

$$\frac{dv}{dt}=n$$

的时候，或由于(10)式发生于

$$r^2=a^2\sqrt{1-e^2} \tag{12}$$

之时．对应的向径是轨道的长短两半轴的几何平均值．由此容易从关系式(12)推出对应

1) 在§30里已经用初级的方法推导出前几项．

的真近点角 v_m，这只须将 r 表示为 v 的函数，于是求得

$$e\cos v_m=(1-e^2)^{3/4}-1 \tag{13}$$

同法可应用以计算偏近点角 u_m；即

$$e\cos u_m=1-(1-e^2)^{1/4} \tag{14}$$

求得 u_m 后，先由开普勒方程得 M_m 然后算 $C_m=v_m-M_m$.

中心差 C 的极大值

e	u_m	v_m	M_m	C_m
0.0	90°.00	90°.00	90°.00	0°.00
0.1	88.57	94.31	82.84	11.47
0.2	87.09	98.67	75.65	23.03
0.3	85.55	103.16	68.41	34.75
0.4	83.88	107.84	61.09	46.75
0.5	82.02	112.84	53.65	59.19
0.6	79.87	118.30	46.02	72.28
0.7	77.21	124.50	38.10	86.40
0.8	73.64	131.99	29.66	102.34
0.9	67.82	142.31	20.07	122.24
1.0	0.00	180.00	0.00	180.00

由 $\arccos v_m$ 的展开式立刻将 v_m 表为 e 的展开式. 同样我们得到 u_m, M_m 与 C_m 的展开式：

$$v_m=90^\circ+\frac{3}{4}e+\frac{21}{128}e^3+\frac{3409}{40960}e^5+\frac{97875}{1835008}e^7+\cdots$$

$$C_m=2e+\frac{11}{48}e^3+\frac{599}{5120}e^2+\frac{17219}{229376}e^7+\cdots$$

在轨道短轴的顶点 $B(u_B=90^\circ)$，

$$\left.\begin{aligned}\cos v_B&=-e\\ M_B&=90^\circ-e\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}v_B&=90^\circ+e+\frac{e^3}{6}+\frac{3}{40}e^5+\frac{5}{112}e^7+\cdots\\ C_B&=2e+\frac{e^3}{6}+\frac{3}{40}e^5+\frac{5}{112}e^7+\cdots\end{aligned}\right\}$$

现在推出有关椭圆的第二焦点的几个公式. 设以 r' 表示第二向径的长度，以 w 表示向径与拱线之间的角(图 109). 为了要求 r' 与 w 的表达式，只须在 r 与 v 表为 u 的函数的公式里将 e 改为 $-e$：

$$r'=a(1+e\cos u)$$

$$\cos w=\frac{\cos u+e}{1+e\cos u}$$

$$\sin w=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1+e\cos u}$$

$$\tan\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{u}{2}=\frac{1-e}{1+e}\tan\frac{v}{2}$$

由最后一式得

$$\frac{dw}{dv}=\frac{1-e}{1+e}\,\frac{\cos^2\dfrac{w}{2}}{\cos^2\dfrac{v}{2}}=\frac{\sin w}{\sin v}=\frac{r}{r'}$$

于是

$$\frac{dw}{dM}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\cos^2 u}$$

这个表达式与1相比较，其差是二阶项．因此，若只取一阶项，则第二向径可以看做在匀速运动．严格言之，将 $\cos u$ 表示为 M 的函数的展开式，得

$$\frac{dw}{dM}=1-\frac{e^3}{2}\cos M+\frac{e^2}{2}\cos 2M+\frac{e^3}{2}\cos 3M+\cdots$$

$$w=M-\frac{e^3}{2}\sin M+\frac{e^2}{4}\sin 2M+\frac{e^2}{6}\sin 3M+\cdots$$

这个展开式里的系数都比真近点角 v 的展开式里对应之项的系数小，特别是 $\sin M$ 项两个系数，由一阶到三阶，两者之差异常显著．在地球的情形，这公式的数字展开式如下：

$$w=M-0''.48\sin M+14''.47\sin 2M+0''.16\sin 3M+\cdots$$

椭圆运动的主要公式汇集于下表内：

椭圆运动的主要公式

$$p=a(1-e^2)=\frac{C^2}{k(m+m')}\qquad C=na^2\sqrt{1-e^2}\qquad n^2a^3=k(m+m')$$

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}=a(1-e\cos u)$$

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos v=a(\cos u-e)\\ y&=r\sin v=a\sqrt{1-e^2}\sin u\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}\cos v&=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}\\ \sin v&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}\end{aligned}$$

$$\tan v=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{\cos u-e}\qquad \tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}v&=u+2q\sin u+q^2\sin 2u+\frac{2}{3}q^3\sin 3u+\frac{1}{2}q^4\sin 4u+\cdots\\ q&=\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}=\frac{e}{2}+\frac{e^3}{8}+\frac{e^5}{16}+\frac{5}{128}e^7+\cdots\\ v^2&=k(m+m')\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)=n^2a^2\,\frac{2a-r}{r}\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{nae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}\qquad r\frac{dv}{dt}=\frac{na(1+e\cos v)}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\frac{dv}{dt}=n\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&u-e\sin u=M=n(t-t_0);\qquad n=\frac{2\pi}{T}\text{(开普勒方程)}\\
&u=M+\left(e-\frac{e^3}{8}\right)\sin M+\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{6}\right)\sin 2M+\frac{3}{8}e\sin 3M+\frac{1}{3}e^4\sin 4M+\cdots\\
&\frac{a}{r}=1+\left(e-\frac{e^3}{8}\right)\cos M+\left(e^2-\frac{e^4}{3}\right)\cos 2M+\frac{9}{8}e^3\cos 3M+\frac{4}{3}e^4\cos 4M+\cdots\\
&\frac{r}{a}=1+\frac{e^2}{2}-\left(e-\frac{3}{8}e^3\right)\cos M-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{3}\right)\cos 2M\\
&\qquad-\frac{3}{8}e^3\cos 3M-\frac{1}{3}e^4\cos 4M+\cdots\\
&v=M+\left(2e-\frac{e^3}{4}\right)\sin M+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4\right)\sin 2M\\
&\qquad+\frac{13}{12}e^3\sin 3M+\frac{103}{96}e^4\sin 4M+\cdots
\end{aligned}\right\}$$

历史简述

现在简略地叙述古人对行星运动的见解．他们看出行星运动里具有两种周期性的离差，一种与行星轨道上的运动有关(即是我们今天所说的中心差)，另一种与地球在轨道上的运动(至少这是我们今天的解释)，而作成所谓周年视差的效应．托勒密在其《数学大综合》或《至大论》书中所叙述的、而为公元二世纪人们一致信奉的世界体系，基本是以地为中心的[1]；换句话说，行星都围绕静止的地球而运动．原则上一切运动都在正圆轨道上，有时是简单的，有时是复杂的．

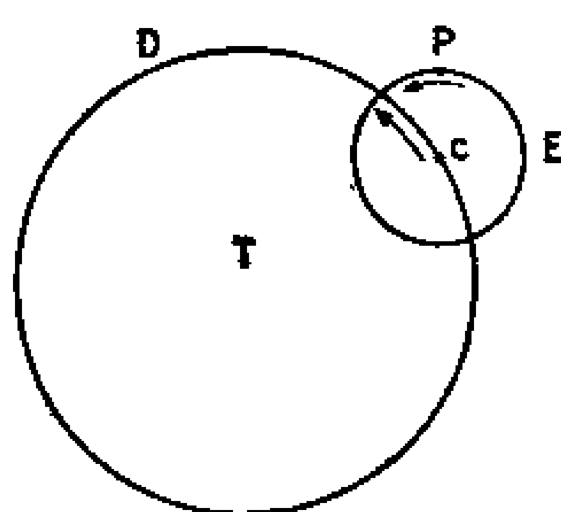


图 110　本轮与均轮

我们先讨论第二种离差，希腊人用本轮和均轮两种圆运动去解释它．假设一颗行星 P (图 110) 在本轮 E 上运动，其中心 C 在另一圆周 D(均轮)上改位，其移动一周的时间恰好等于行星的恒星周期．若我们使行星的均轮半径等于行星的日心距，并以本轮半径等于地日间的距离，便容易明了托勒密体系所表示的地心运动与哥白尼体系没有什么差异．但是古希腊人并不将行星的本轮看做是相等的圆，因而他们就不能认识行星轨道的相对大小．

1543 年哥白尼所提出的日心体系，其主要优点是以一个轨道(即地球的轨道)代替了所有的行星的本轮，由此得以得求出行星轨道的相对大小，哥白尼由行星在大距或方照时的观测轻易地推出这些数据．

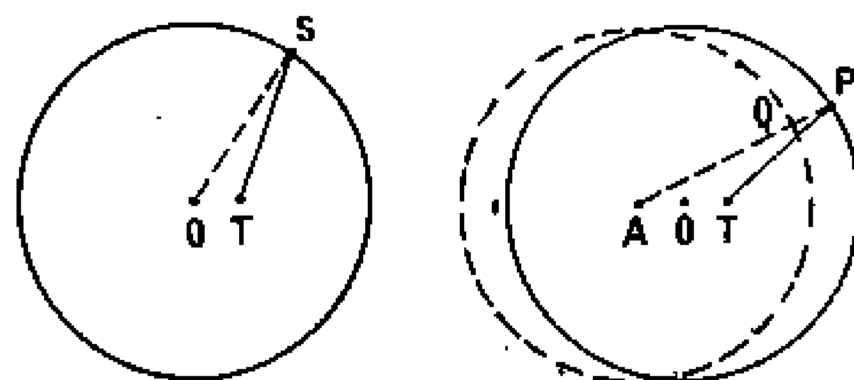


图 111　偏心圆　　等距偏心圆

为了说明第一种离差(即中心差)，古希腊人将地球 T 放在均轮中心之外一点，这样地心体系便失掉了简单性与均一性．据托勒密说，太阳的轨道是一个偏心圆，它在那上而作匀速运动．在这假设下，要正确地表达太阳在黄经上的地心运动，显然应使地球的偏心率两倍于开普勒轨道的偏心率(图 111 左)．

1) 哥白尼的日心体系古代也有倡导的人，例如希腊萨莫斯的阿里斯塔克便是显著的一位．

上行星*的轨道也是正圆的，但其线速度是变化的．托勒密将上行星的等距点放在对于 O 与 T 点为对称的 A 点上(图 111 右)．这样，在第一近似值下满足了面积定律．但是为了保留(至少在表面上)匀速圆运动的原则，他假设了另外一个与轨道半径相等而中心在等距点上的圆，而称为等距偏心圆．行星与等距偏心圆的中心的联线在这圆周上的交点 Q 作匀速运动．

有趣味的是，将行星的向径和真近点角的展开式在偏心、等距偏心与开普勒轨道三种情形下的表达式分别开列于下，以资比较：

(1) 偏心轨道　假设地球距离轨道中心为 $2ae$，行星以匀速在偏心圆轨道上运行，则

$$\left.\begin{aligned} r&=a[1-2e\cos M+e^2(1-\cos 2M)+\cdots] \\ v&=M+2e\sin M+2e^2\sin 2M+\cdots \end{aligned}\right\}$$

(2) 等距偏心轨道　假设地球距离轨道中心为 ae，而等距偏心圆上的点作匀速运动，则

$$\left.\begin{aligned} r&=a\left[1-e\cos M+\frac{3}{4}e^2(1-\cos 2M)+\cdots\right] \\ v&=M+2e\sin M+e^2\sin 2M+\cdots \end{aligned}\right\}$$

(3) 开普勒椭圆轨道

$$\left.\begin{aligned} r&=a\left[1-e\cos M+\frac{1}{2}e^2(1-\cos 2M)+\cdots\right] \\ v&=M+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\cdots \end{aligned}\right\}$$

对于太阳(或地球)的情形，轨道的偏心率不大(0.016)，由这三种假设所得出的真近点角相差不过是 $0'.5$；因此，古代人没法由观测去加以判断．但第一假设，经他们应用于地球的运动，发现由这理论所得的向径很欠正确．开普勒利用第谷对于火星的观测，推出地球的近日距与远日距，而发现了这种不正确的事实．他便将地球的轨道和其他行星的轨道一样看待，假设为等距偏心圆．这一发现，古书里叫做“偏心率的平分”使开普勒得以编制比较正确的太阳运行表，因而为了改进哥白尼所定的行星轨道根数，开普勒将第谷的观测整理有相当的成效．但是他很快就发现火星(轨道的偏心率为 0.093) 的位置不能放在一个圆周之上．火星的平近点角在 $90°$ 或 $270°$ 附近，比在拱点处，距离其轨道中心约远 4/1000，可见火星的轨道是卵形的．那时知道得最清楚的卵形是椭圆，希腊人阿波郎尼斯(Apollonius) 曾经阐明了这曲线的性质．开普勒因此发现太阳在其焦点上的椭圆更能表现火星的观测．在等距偏心圆的假设下，黄经的计算与观测两种数值之差，可达 $10'$，但若采取椭圆轨道的假设，则这一差异便消除到误差的范围之内．开普勒有关火星运行的著作刊布于 1609 年．

十七世纪的天文学家采取一种“简化椭圆”的假设，将开普勒的问题作近似的解答，这样便避免了超越方程而只用纯粹三角方程去处理．他们虽然假设运动是椭圆的，但同时假定第二向径作匀速的旋转．设在以上所推出的 v 和 w 的关系式里，以 M 代替 w，便可立刻求得 v；因而不必去解开普勒方程，可是这样便没有严格地遵守面积定律．容易检验

* 今称外行星，即地球轨道之外的行星，如火、木、土三行星便是．古人采取地心说，认为这些行星的轨道在太阳轨道之上，故称上行星——译者注

这种算法在 v 上所犯的误差是与偏心率 e 的二阶项同数量级的，而在向径上所引起的误差只与 e 的三阶项同数量级. 设以 v' 表示简化椭圆假设下的真点角，则

$$v'-v=\frac{1}{4}e^3\sin M-\frac{1}{4}e^2\sin 2M-\frac{5}{12}e^3\sin 3M-\cdots$$

这差值对于火星可达 8′，对于水星可达 42′，对于其他偏心率较大的行星，结果的近似度更差.

§85 抛物线运动，近似抛物线运动

有些周期彗星的轨道是椭圆的，但与行星的差别是其偏心率很大，一般常在 1 的附近（例如恩克彗 $P=3.3$ 年，$e=0.85$；哈雷彗 $P=76$ 年，$e=0.967$）；每年发现几颗彗星，其轨道的偏心率很接近于 1，因而我们以抛物线轨道去计算它们的根数时，可以相当正确地表达它们的位置. 抛物线运动的公式很容易由 §82 里的一般公式推出，只须将 $h=0$. 若设彗星的质量可以忽略（事实上彗星的质量很小）则有

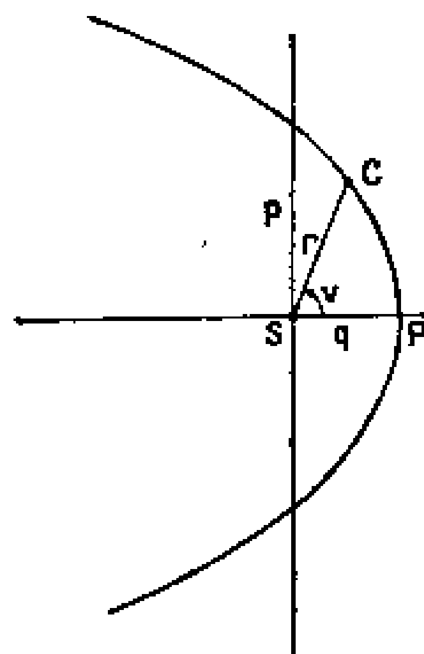


图 112

$$e=1\qquad p=\frac{C^2}{km}$$

$$r=\frac{p}{1+\cos v}=\frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}=q\left(1+\tan^2\frac{v}{2}\right)$$

式内设 $$q=\frac{1}{2}p$$

这即是近日距（图 112）.

令 $\tan\frac{v}{2}=s$，则

$$\left.\begin{aligned}&r=q(1+s^2)\\&x=r\cos v=q(1-s^2)\\&y=r\sin v=2qs\\&\tan v=\frac{2s}{1-s^2}\end{aligned}\right\}$$

面积常数的数值为 $$C=\sqrt{2kmq}$$

设取我们将在 §90 内规定的单位制[1)]，则

$$C=0.02432744\sqrt{q}$$

轨道上的速度 V 将为动能的积分所给出

$$V^2=\frac{2km}{r}=\frac{C^2}{qr}\qquad V=\frac{C}{q\sqrt{1+s^2}}$$

这是一个初速度为零、质量可以略而不计的天体，从无限远处自由坠落到离太阳 r 处所有的速度. **抛物线速度**等于距离太阳相同处的圆速度和 $\sqrt{2}$ 的乘积.

我们可将速度 V 看做是如下两个大小等长的向量之和：

1）时间的单位为平太阳日，质量的单位为太阳，并取 k 为高斯常数，则长度的单位是与地球轨道的半长轴相当接近的数值. 见 §90.

$$V_1=V_2=\sqrt{\frac{km}{2q}}$$

其中一个与向径正交,另一个与轨道之轴正交. 如以焦点为极而绘速端曲线,则将得到一个在焦点与抛物线之轴相切的圆.

而积定律提供抛物线运动的真近点角与时间之间的一个简单关系:

$$r^2\frac{dv}{dt}=C$$

$$dt=\frac{r^2}{C}dv$$

但

$$dv=\frac{2ds}{1+s^2}$$

$$t-T=\frac{2q^2}{C}\int_0^s(1+s^2)ds$$

$$t-T=\frac{2q^2}{C}\left(s+\frac{s^3}{3}\right)$$

$$t-T=\frac{\sqrt{2}\,q^{3/2}}{3\sqrt{km}}(3s+s^3) \tag{1}$$

T 表示彗星过近日点的时刻.

若将 q 与 C 表为天文单位,则

$$t-T=27.403895q^{3/2}(3s+s^3)\quad \text{平太阳日} \tag{2}$$

据习惯设

$$\mathfrak{M}(v)=75s+25s^3 \tag{3}$$

则可为 $\mathfrak{M}(v)$ 编制一个数字表(Baker 表). 若已知 v, 则过近日点后所经历的时间, 可由下列公式算出

$$t-T=1.0961558q^{3/2}\mathfrak{M}(v)\quad \text{平太阳日} \tag{4}$$

在 $q=1$ 的情形,真近点角由 0° 到 90°, 即 $\mathfrak{M}$ 由 0 变至 100, 所需的时间为 109.61… 日, 因此古天文书里将一颗近日距等于一个天文单位的虚构彗星叫做 109 日彗.

已知 $t-T$ 为若干日,为了计算 v, 可将公式(4)改写为

$$\mathfrak{M}(v)=0.91227906q^{-3/2}(t-T) \tag{5}$$

已知真近点角时,只需一个正切真数表便可计算 $\mathfrak{M}$. 反之, 为了利用公式(5)去解逆问题,而免摸索的劳苦,便应编制一个特殊的数字表. Baker 表不便于作内插之用,除非表的范围和三角表一样大. 另外还须注意,在许多情形 v 角的认识并无直接的用途;因此实际计算星历表时所需要的公式常用 $s=\tan\frac{v}{2}$ 这个量. 书末有关彗星运动的表(XXXII 与 XXXIII)是在已知 $\mathfrak{M}$ 及 $v<113°4'$ 的条件下,直接提供 $s=\tan\frac{v}{2}$ 的数值 (表 A); 对于 $v>108°33'$, 以 $\mathfrak{M}^{-1/3}$ 为引数, 提供 $\sigma=\cot\frac{v}{2}$(表 B). 表内间距的选择是为了便于使用白塞耳内插公式(见附录). 为了使用表 B, 可用下列的关系:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}}}=1.0310762\frac{\sqrt{q}}{\sqrt[3]{t-T}}$$

例 1 已知: $t-T=316.6979$ 日

$$q=1.357225\qquad q^{3/2}=1.581167$$

$$\mathfrak{M}=\frac{0.91227906}{1.581167}\times 316.6979=182.7238$$

表 XXXII(A)由白塞耳内插法提供 s;(注意间距是 0.5):

$$\begin{array}{r} 1.4393508 \\ +9705 \\ +5 \\ \hline s=1.4403218 \end{array}$$

$$s^2=2.0745269$$

$$v=110^\circ\!.45634$$

$$r=q(1+s^2)=4.172825$$

$$x=r\cos v=q(1-s^2)=-1.458375$$

$$y=r\sin v=2qs=+3.909682$$

例 2 已知:

$$t-T=25.59541\text{ 日}\qquad q=0.0524868$$

$$\sqrt[3]{t-T}=2.947049\qquad \sqrt{q}=0.229100$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}}}=\frac{1.0310762\times 0.229100}{2.947049}=0.0801546$$

这里应使用的是表 XXXIII(B):

$$\begin{array}{r} 0.2474473 \\ +5345 \\ -10 \\ \hline \end{array}$$

$$\sigma=\cot\frac{v}{2}=0.2479808\qquad s=\tan\frac{v}{2}=4.032570$$

$$s^2=16.261621$$

$$v=152^\circ\!.14540$$

$$r=0.906007$$

$$x=r\cos v=-0.801034$$

$$y=r\sin v=+0.423313$$

由以上可见,抛物线运动的计算比较开普勒运动简单.若椭圆轨道的偏心率接近于 1 时,解开普勒方程相当费力.下面的计算方式是以上所说的抛物线运动算法的普遍化,很成功地应用于偏心率接近于 1 的轨道,也就是可应用于偏心率稍大于 1 的双曲线轨道和偏心率稍小于 1 的椭圆轨道;这两种情形统称为近似抛物线轨道.

令

$$q=\frac{p}{1+e}\quad(\text{近日距})$$

$$\lambda=\frac{1-e}{1+e}$$

$$s=\tan\frac{v}{2}$$

不管 e 的数值为何,总有

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}=\frac{q(1+s^2)}{1+\lambda s^2}$$

$$C=\sqrt{kmq(1+e)}=\sqrt{\frac{2kmq}{1+\lambda}}$$

因此面积定律可以写为

$$\sqrt{\frac{2kmq}{1+\lambda}}\,dt=r^2dv=\frac{2q^2(1+s^2)ds}{(1+\lambda s^2)^2}$$

对于椭圆轨道，参量 $\lambda>0$（λ 等于近日距与远日距之比），对于抛物线轨道 $\lambda=0$，对于双曲线轨道 $\lambda<0$. 积分这个方程得

$$\sqrt{\frac{km}{2(1+\lambda)}}\frac{t-T}{q^{3/2}}=\int_0^s\frac{(1+s^2)ds}{(1+\lambda s^2)^2}$$

$$=\int_0^s[1+s^2-2\lambda(s^2+s^4)+3\lambda^2(s^4+s^6)-4\lambda^3(s^6+s^8)+\cdots]ds$$

$$\sqrt{\frac{km}{2(1+\lambda)}}\frac{t-T}{q^{3/2}}=s+\frac{s^3}{3}-2\lambda\left(\frac{s^3}{3}+\frac{s^5}{5}\right)$$

$$+3\lambda^2\left(\frac{s^5}{5}+\frac{s^7}{7}\right)-4\lambda^3\left(\frac{s^7}{7}+\frac{s^9}{9}\right)+\cdots \tag{6}$$

式内若设 $\lambda=0$，便重新得到抛物线运动已经求得的关系式 (1). 当 $\lambda\neq0$，而其绝对值为一小量，而且 v, q 和 e 又已知时，可由方程(6)决定过近日点后所经历的时间. 级数(6)的计算没有什么困难.

为了处理逆问题，即已知 $t-T$, q 与 e 时求 v，这样便须解方程(6)去求 s. 为此，我们须用下列的设计. 设 S 为一辅助量，其定义为

$$S+\frac{S^3}{3}=s+\frac{s^3}{3}-2\lambda\left(\frac{s^3}{3}+\frac{s^5}{5}\right)+\cdots \tag{7}$$

将(6)式改为如下的形式便可求得 S

$$\mathfrak{M}(S)=\frac{0.9122791}{q^{3/2}\sqrt{1+\lambda}}(t-T) \tag{8}$$

求这个方程之解时，可利用抛物线运动的表(表 XXXII 或 XXXIII). 将级数(7)反演，即将 s 表示为 S 的函数的展开式:

$$s=S+a\lambda+b\lambda^2+c\lambda^3+\cdots \tag{9}$$

式内 a, b, $c\cdots$ 是 S 的函数，附表 XXXIVC 有这些数字之值. 将 s 的展开式(9)代入(7)式，然后比较方程两端的 S 的系数，便可求表达 a, b, $c\cdots$ 的文字式，明显有

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{S^3}{1+S^2}\,\frac{10+6S^2}{15}\\ b&=\frac{S^5}{(1+S^2)^3}\,\frac{1155+2195S^2+1485S^4+333S^6}{1575}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

既得 S，则用(9)式便可立刻算出 s. 跟着便得

$$\left.\begin{aligned}v&=2\arctan s=\arctan\frac{2s}{1-s^2}\\ r&=\frac{q(1+s^2)}{1+\lambda s^2}\\ r\cos v&=\frac{q(1-s^2)}{1+\lambda s^2}\\ r\sin v&=\frac{2qs}{1+\lambda s^2}\end{aligned}\right\}$$

当 S 的数值超过 1.5 时，表 XXXIII(B)提供

$$\Sigma=\frac{1}{S}$$

于是取

$$\sigma=\cot\frac{v}{2}$$

作为未知量，并令

$$\sigma=\Sigma-\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\lambda^2}{\beta}-\frac{\lambda^3}{\gamma}-\cdots \tag{10}$$

除数 $\alpha, \beta, \gamma\cdots$ 是 Σ 的函数，由表 XXXV(D)给出．即

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{15(\Sigma+\Sigma^3)}{6+10\Sigma^2}\\ \beta&=\frac{1575(\Sigma+\Sigma^3)^3}{81+393\Sigma^2+655\Sigma^4+455\Sigma^6}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

由此计算得 σ 之后，便可推出彗星的位置：

$$\left.\begin{aligned}v&=2\,\mathrm{arc}\cot\sigma\\ r&=\frac{q(1+\sigma^2)}{\sigma^2+\lambda}\\ r\cos v&=\frac{q(\sigma^2-1)}{\sigma^2+\lambda}\\ r\sin v&=\frac{2q\sigma}{\sigma^2+\lambda}\end{aligned}\right\}$$

以上所叙述的方法适用于以下的情形：即 λ 相当小时，或真近点角不太接近于 180° 时．

例 1 椭圆轨道．已知：

$$e=0.96728(00) \qquad q=0.58715(00) \qquad t-T=10.47754\ \text{日}$$

求彗星在其轨道平面内的坐标(这是哈雷彗 1910 年出现时的轨道根数见表 XXX)．

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=0.0166321\\ q^{3/2}&=0.4499079\\ \sqrt{1+\lambda}&=1.0082818\\ \mathfrak{M}(S)&=21.07086\end{aligned}\right\}$$

表 A(用法详前)给出

$$S=0.274082$$

由表 C(XXXIV)得

$$\begin{aligned}a&=0.013342\\ b&=0.00105\\ S&=0.274082\\ a\lambda&=\quad +222\\ \hline s&=0.274304\end{aligned}$$

最后

$$\left.\begin{aligned}v&=30^\circ\!.67830\\ r&=0.630540\\ r\cos v&=+0.542293\\ r\sin v&=+0.321713\end{aligned}\right\}$$

例 2 双曲线轨道．已知：

$$e=1.025938 \qquad q=0.148996 \qquad t-T=33.08433\text{ 日}$$

求彗星在其轨道平面内的坐标．

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -0.0128030 \\ q^{3/2} &= 0.05751246 \\ \sqrt{1+\lambda} &= 0.9935779 \\ \mathfrak{M}(S) &= 528.1852 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}}} &= 0.1237099 \end{aligned}\right\}$$

表 B 提供 Σ；表 D(XXXV) 给出对应的 α, β, γ 的数值：

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= 0.4157847 \\ \alpha &= 0.946459 \\ \beta &= 1.06902 \\ \gamma &= 0.696 \end{aligned}\right\}$$

从而 $\sigma=\cot\dfrac{v}{2}$：

$$\left.\begin{aligned} \Sigma &= \ \ 0.4157847 \\ -\lambda/\alpha &= \ \ +135272 \\ -\lambda^2/\beta &= \ \ -1593 \\ -\lambda^3/\gamma &= \ \ +30 \\ \hline \sigma &= \ \ 0.4291616 \end{aligned}\right\}$$

于是推出

$$\left.\begin{aligned} v &= 133^\circ\!.54567 \\ r &= 1.029533 \\ r\cos v &= -0.709279 \\ r\sin v &= +0.746232 \end{aligned}\right\}$$

§ 86　行星与彗星的轨道根数

将太阳作为坐标系的原点，黄道作为基本面(见 § 44)，真春分点作为面内的起算点．这样便规定日心黄道坐标系．如已知轨道面对于黄道的升交点与交角，则轨道的位置便确定了(图 113)．设以 ☊ 表示升交点的黄经，i 表示倾角．为了完全决定这个角，过交点在天球上作黄道与行星轨道的两个切线(方向是运动的方向)，则这两个方向之间的角便是 i 角．若 $i<90^\circ$，则运动是顺向的；若 $90^\circ<i<180^\circ$，则运动是逆向的．

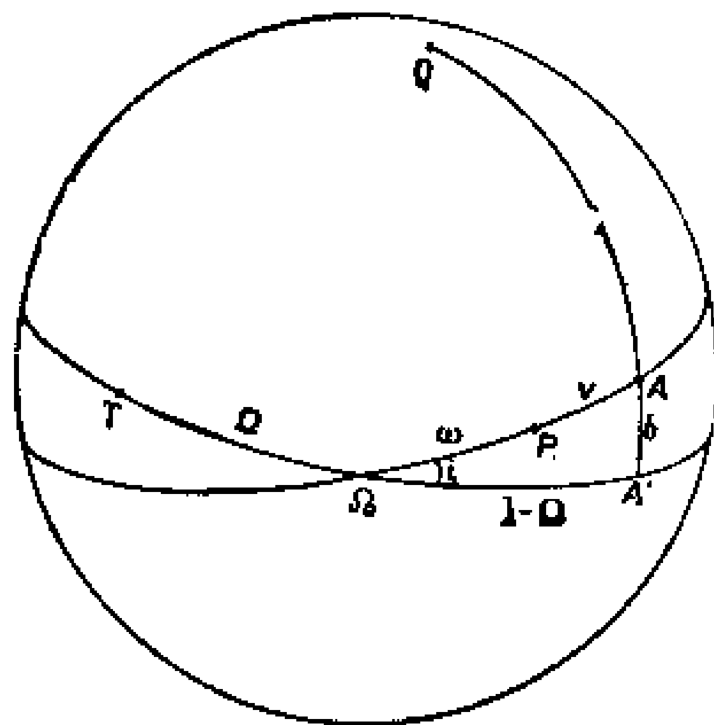


图　113

设 P 为行星的近日点的方向．令 ☊$P=\omega$，这根数叫做升交距角．以 ϖ 表示 γ☊ 与 ☊P 之和，即 $\varpi=\Omega+\omega$，叫做近日点黄经．为了同时确定轨道的大小与位置，在 Ω, i 与 ϖ(或 ω)三根数之外，

还应加上半长轴 a 与偏心率 e. 由开普勒第三律:

$$n^2a^3=k(m+m')$$

平均运动 n 容易而且经常由其与半长轴 a 的关系计算出来，因为这个根数出现在平近点角的计算里.

剩下的便是规定 t 时行星的位置. 设 M 与 v 分别表示平近点角与真点角. 据定义，行星的平经度等于 ϖ 加 M,同样行星在轨道上的真经度等于 $\varpi+v$. 这两个角的计算一部分在黄道上，一部分在行星的轨道面上，不应当与其对应的黄经混淆，因为黄经完全是在黄道上量度. 设 L_0 表示初始时刻(历元)的平黄经之值，则 t 时的平黄经之值等于 L_0+nt, 因此

$$\varpi+M=L_0+nt$$

或

$$M=L_0+nt-\varpi$$

由 $L_0-\varpi$, n 和 e 三已知量更与时间 t 联合,便足够决定向径 r 与真点角 v.

总上所述,行星对于太阳的运动完全为某一定历元下列 6 个常数所决定:

升交点黄经	Ω
倾角	i
近日点黄经	ϖ
偏心率	e
平均运动	n
历元的平经度	L_0

在小行星表内，ϖ 为 $\omega=\varpi-\Omega$ 所代替. 并以 $\varphi=\arcsin e$ 代 e, 这是为对数计算的设计，今天已很少使用了.

相同的方法可以规定彗星的抛物线轨道. 在这情形,我们以 ω 角去定近日点的方向，以近日距 q 和过近日点时刻 T 去定抛物线. 因此，抛物线轨道($e=1$)为下列 5 个根数所规定:

升交点黄经	Ω
倾角	i
近日点的升交距角	ω
近日距	q
过近日点时刻	T

这些根数里有些受到岁差与章动的影响,以后还要说明,它们都受到行星的摄动的影响,因此,它们的完全表达式包含有长期项与周期项. 天文年历里载有大行星轨道根数表(并见本书附表 XXIX)，每一根数里都含有由岁差和长期摄动而来的项. 为了将其改算到对于某一时期的春分点的数字,应在平经度、升交点黄经和近日点黄经上加入章动的改正值.

由于小行星与彗星的长期摄动一般没有计算，它们的轨道表只提供某一历元的平均根数. 我们在这些(未计摄动)平均根数上加以岁差的改正值，而换算为对另一历元的数值. 现在给出应用的公式:

有关岁差的符号,使用 § 44 所规定的. 设 E 表示历元 τ 时的平黄道 (图 114)，E' 表示历元 $\tau+t$ 时的平黄道; k 表示两黄道的交角; Q 与 Q' 表示它们的极; A 与 A' 表示这两

个黄道和大圆 QQ' 的交点；♈与 ♈′ 为对应的两个春分点；则

$$♈A=\varphi-90^\circ \qquad ♈'A'=\varphi+\delta\lambda-90^\circ$$

更设 Π 表示行星轨道的极（假设不变），☊ 与 ☊′ 表示升交点的两个位置；Ω 与 $\Omega+\delta\Omega$ 表示这两点的黄经；i 与 $i+\delta i$ 表示对应的交角；ω 与 $\omega+\delta\omega$ 表示对应的近日点（假设不变）与交点间的角距离；则

$$☊A=\varphi-\Omega-90^\circ$$

$$☊'A'=\varphi+\delta\lambda-\Omega-\delta\Omega-90^\circ$$

三角形 $QQ'\Pi$ 的要素之值如下：

$$\angle Q=☊A+90^\circ=\varphi-\Omega \qquad \Pi Q'=i+\delta i$$

$$\angle Q'=90^\circ-☊'A' \qquad \Pi Q=i$$

$$\angle \Pi=\delta\omega \qquad QQ'=\delta k$$

由于 δk 很小，1000 年间只达到 8′；除了交角很小的情形外，我们可以写

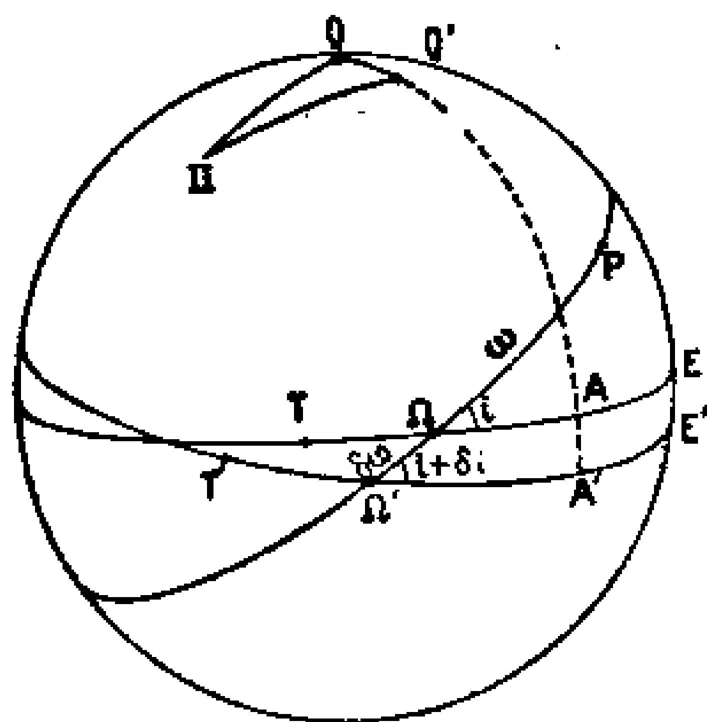


图 114

$$\delta\omega=\delta k\,\frac{\sin(\varphi-\Omega)}{\sin i}$$

$$\delta i=-\delta k\cos(\varphi-\Omega)$$

$$☊'A'-☊A=\delta\omega\cos i$$

由此得出轨道根数，由于岁差影响，在历元 $\tau+t$ 的数值为

$$\Omega'=\Omega+\delta\lambda-\delta k\sin(\varphi-\Omega)\cot i$$

$$\omega'=\omega+\delta k\sin(\varphi-\Omega)\operatorname{cosec} i$$

$$i'=i-\delta k\cos(\varphi-\Omega)$$

表 XVI 内有公式给出历元 τ 的 φ 的数值以及在历元 τ 与 $\tau+t$ 之间黄经和黄纬上的岁差 $\delta\lambda$ 与 δk。

§ 87 行星或彗星的日心与地心坐标的计算

这一节要讨论的是已知行星或彗星的轨道根数，求计算其星历表。

设 A 表示 t 时行星在天球上的日心位置（图 113），l 与 b 为其黄道坐标

$$l=♈A' \qquad b=A'A$$

☊A 弧的量度为

$$☊A=v+\varpi-\Omega=v+\omega$$

这叫做升交距角，由此得

$$\sin b=\sin i\sin(v+\omega) \tag{1}$$

至于黄经可由下列两式求出，由直角三角形 ☊AA' 得

$$\left.\begin{aligned}\cos b\cos(l-\Omega)&=\cos(v+\omega)\\ \cos b\sin(l-\Omega)&=\cos i\sin(v+\omega)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

设行星的向径为 r，则其日心黄道直角坐标为

$$\left.\begin{aligned}x'&=r\cos b\cos l\\ y'&=r\cos b\sin l\\ z'&=r\sin b\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由 (1)(2) 与 (3) 三式消去 l 与 b，便将直角坐标表示为轨道根数与真近点角的函数：

$$\left.\begin{aligned}x'&=r[\cos\Omega\cos(v+\omega)-\cos i\sin\Omega\sin(v+\omega)]\\y'&=r[\sin\Omega\cos(v+\omega)+\cos i\cos\Omega\sin(v+\omega)]\\z'&=r\sin i\sin(v+\omega)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

为了展开这些表达式，我们可将其表示为便于计算的形式如下：

$$\left.\begin{aligned}x'&=P'_x r\cos v+Q'_x r\sin v\\y'&=P'_y r\cos v+Q'_y r\sin v\\z'&=P'_z r\cos v+Q'_z r\sin v\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式内

$$\left.\begin{aligned}P'_x&=\cos\Omega\cos\omega-\cos i\sin\Omega\sin\omega\\P'_y&=\sin\Omega\cos\omega+\cos i\cos\Omega\sin\omega\\P'_z&=\sin i\sin\omega\\Q'_x&=-\cos\Omega\sin\omega-\cos i\sin\Omega\cos\omega\\Q'_y&=-\sin\Omega\sin\omega+\cos i\cos\Omega\cos\omega\\Q'_z&=\sin i\cos\omega\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

由此可见，

$$\Sigma P'^2=\Sigma Q'^2=1$$

因为

$$\Sigma P'Q'=0,$$

$$r^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

若轨道是椭圆，则

$$\left.\begin{aligned}r\cos v&=a(\cos u-e)\\r\sin v&=a\sqrt{1-e^2}\sin u\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式内的偏近点角 u，可从开普勒方程之解而求得．在抛物线轨道的情形，更方便地写为

$$\left.\begin{aligned}r\cos v&=q\left(1-\tan^2\frac{v}{2}\right)=q(1-s^2)\\r\sin v&=2q\tan\frac{v}{2}=2qs\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

s 的求法已说明于前节．

将坐标轴围绕二分线转过 $-\varepsilon$ 角，便将坐标转化为行星的日心赤道坐标：

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\\y&=y'\cos\varepsilon-z'\sin\varepsilon\\z&=y'\sin\varepsilon+z'\cos\varepsilon\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

从(5)与(9)两组关系式消去 x', y' 与 z'，便得出便于计算的赤道坐标：

$$\left.\begin{aligned}x&=P_x r\cos v+Q_x r\sin v\\y&=P_y r\cos v+Q_y r\sin v\\z&=P_z r\cos v+Q_z r\sin v\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式内

$$
\left.\begin{aligned}
P_x &= P'_x \\
P_y &= P'_y \cos\varepsilon - P'_z \sin\varepsilon \\
P_z &= P'_y \sin\varepsilon + P'_z \cos\varepsilon \\
Q_x &= Q'_x \\
Q_y &= Q'_y \cos\varepsilon - Q'_z \sin\varepsilon \\
Q_z &= Q'_y \sin\varepsilon + Q'_z \cos\varepsilon
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

以下关系式仍成立:

$$
\Sigma P^2 = \Sigma Q^2 = 1
$$
$$
\Sigma PQ = 0
$$

若轨道是椭圆的,可令

$$
A = Pa \qquad B = Qa\sqrt{1-e^2}
$$

于是

$$
\left.\begin{aligned}
x &= A_x(\cos u - e) + B_x \sin u \\
y &= A_y(\cos u - e) + B_y \sin u \\
z &= A_z(\cos u - e) + B_z \sin u
\end{aligned}\right\} \tag{10b}
$$

我们使用这些公式,于§97与§101内去计算星历表.显然有

$$
\Sigma A^2 = a^2 \qquad \Sigma B^2 = a^2(1-e^2) \qquad \Sigma AB = 0
$$

设 λ 与 β 分别为太阳的地心黄经与黄纬,其所属的春分点与行星坐标所属的相同(β 经常是一个小量);R 表示地日间的距离.太阳的地心赤道坐标 X, Y, Z 为如下的公式所给出:

$$
\left.\begin{aligned}
X &= R\cos\beta\cos\lambda \\
Y &= R[\cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\sin\beta] \\
Z &= R[\sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda + \cos\varepsilon\sin\beta]
\end{aligned}\right\} \tag{12}
$$

于是行星的地心赤道直角坐标的表达式为

$$
\left.\begin{aligned}
\xi &= x + X = \Delta\cos\delta\cos\alpha \\
\eta &= y + Y = \Delta\cos\delta\sin\alpha \\
\zeta &= z + Z = \Delta\sin\delta
\end{aligned}\right\} \tag{13}
$$

Δ 表示行星的地心距,α 与 δ 分别表示其赤经与赤纬.解方程(13)便可将这三个未知量表为

$$
\left.\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\eta}{\xi} \\
\tan\delta &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \\
\Delta^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2
\end{aligned}\right\}
$$

为了实施这些计算,设我们采取的是对历元1月0日的平均根数与平黄赤交角,则求得的数字是地心平坐标;加上历元以后一段时间的岁差与章动,并行星光行差的改正(算法见§60),便可将其转换为视坐标.

如果采取的根数是对观测时的平春分点、平黄道与平黄赤交角的数值,则可避免岁差的改正.如果要将根数的长期变化考虑进去(对于大行星的情形便是这样)便应采取第二

种算法．至于小行星与彗星，我们只需要它们的平坐标（这里平坐标的意义见6章§60），只须作行星光行差的改正，便可立刻归算到对于历元1月0日的平均根数．

§88 太阳系，行星的地心运动

太阳系里有九个大行星，其中两个在地球轨道之内，叫做内行星；六个在地球轨道之外，叫做外行星．下表提供它们在1900年的轨道根数．本书后面有一个比较完全的行星轨道根数与其长期变化的表（表XXIX）：

	a	e	i	ϖ	Ω
水　星	0.3871	0.2056	7°0′	75°54′	47° 9′
金　星	0.7233	0.0068	3 24	130 10	75 47
地　球	1.0000	0.0167	0 0	101 13	—
火　星	1.5237	0.0933	1 51	334 13	48 47
木　星	5.2026	0.0483	1 19	12 43	99 27
土　星	9.5547	0.0559	2 30	91 6	112 47
天王星	19.2181	0.0463	0 46	171 33	73 29
海王星	30.1096	0.0090	1 47	46 44	130 41

§84后面的公式可以计算每个行星的最大中心差以及对应的真近点角、平近点角与向径的数值，结果载于下表：

	$(v-M)_{极大}$	$v_{极大}$	$M_{极大}$	$r_{极大}/a$
水　星	23°41′	98°55′	75°14′	0.98926
金　星	0 47	90 18	89 31	0.99999
地　球	1 55	90 43	88 48	0.99993
火　星	10 42	94 1	83 19	0.99782
木　星	5 32	92 5	86 32	0.99942
土　星	6 24	92 24	86 0	0.99922
天王星	5 19	92 0	86 41	0.99946
海王星	1 2	90 23	89 21	0.99998

大行星之外还有许多小行星，其周期大多数在火木两星的周期之间．1930年更在海王星轨道之外发现了冥王星，其轨道的交角与偏心率都很大：

$$a=39.6 \qquad i=17°7'$$
$$e=0.246 \qquad \varpi=221°;$$

公转周期约为250年．

行星到水星轨道（$a=0.4$）的距离大约是2的连续整乘幂．即可以设（提丢斯-波德经验规则）：

$$a=0.4\times0.3\times2^{n-1}$$

n是正整数．由下表可见，海王星便不遵守这个规则，而应以冥王星去代替它．

	n	a 计算值	a 观测值
水　星	—	0.4	0.39
金　星	1	0.7	0.72
地　球	2	1.0	1.00
火　星	3	1.6	1.52
—	4	2.8	—
木　星	5	5.2	5.20
土　星	6	10.0	9.55
天王星	7	19.6	19.22
海王星	8	38.8	30.11

在 $n=4$, 即 $a=2.8$ 这个距离处没有大行星，但这空隙为一圈小行星所填补. 小行星最重要几颗的半长轴如下:

1. 谷神星	$a=2.767$
2. 智神星	2.770
3. 婚神星	2.670
4. 灶神星	2.361

小行星经人证认了的迄至 1942 年中为 1546 颗*，现时的增长率，每年 25 至 30 颗.

行星的恒星周期 T, 以其对于恒星的平均运动除 360° 而求得, 至于其会合周期 θ 可规定为行星与地球继续两次日心合所经历的时间. 以地球和行星的平均运动之差除 360° 而求得

$$\theta=\frac{360^\circ}{|n'-n|}$$

轨道愈接近地球的行星，其会合周愈长.

	对于恒星的平均运动 n	$q=\sqrt{\frac{a'}{a}}$	恒星周期 T		会合周期 θ	
			日	恒星年	日	儒略年
水　星	14732″.4	0.6222	87.969	0.241	115.88	0.317
金　星	5767.7	0.8505	224.701	0.615	583.92	1.599
地　球	3548.2	1.0000	365.256	1.000	—	—
火　星	1886.5	1.2344	686.980	1.881	779.94	2.135
木　星	299.13	2.2809	4332.59	11.862	398.88	1.092
土　星	120.45	3.0911	10759.2	29.457	378.09	1.035
天王星	42.231	4.3838	30688.4	84.019	369.66	1.012
海王星	21.535	5.4872	60181.3	164.765	367.49	1.006

当行星与地球在日心合时，行星的地心运动是逆行的. 设 P 与 P' 表示两个行星(其中一个将作为地球)，它们与太阳的距离分别为 a 与 a'(这里略去偏心率与倾角)，平均运动为 n 与 n'. 由开普勒第三律，两行星的线速度之比 $V:V'$，与其距离的平方根为反比，因为由

* 迄至 1969 年 10 月 1 日得到永久序号的小行星已有 1748 颗(现已超过 2000 颗)——译者注

$$n^2a^3 = n'^2a'^3$$

得
$$\frac{V'}{V} = \frac{n'a'}{na} = \sqrt{\frac{a}{a'}}$$

因此，当两行星在日心合时，一个对于他一个的运动必然是逆行的．这便是外行星冲时或内行星下合时的情况．在这一位置上，行星的地心黄经的每日变率利用下列的公式容易求得

$$\Delta_1\lambda = \frac{-na}{a-a'}\left(\sqrt{\frac{a}{a'}}-1\right) \tag{1}$$

这里 a 与 n 是地球轨道的数字，$n = 3548''$

设（见上表）
$$\frac{V}{V'} = \sqrt{\frac{a'}{a}} = q$$

则
$$\Delta_1\lambda = \frac{-n}{q+q^2}$$

反之，在日心冲时，行星的相对运动总是顺向的；对于外行星这是冲的时刻，对于内行星这是上合的时刻．于是行星的地心黄经的每日变率为

$$\Delta_2\lambda = \frac{na}{a+a'}\left(\sqrt{\frac{a}{a'}}+1\right) = n\,\frac{1+q}{q+q^3} \tag{2}$$

7 个大行星的 $\Delta_1\lambda$ 与 $\Delta_2\lambda$ 的数字见后面的表．

行星的地心运动是交替地顺行与逆行，因此在某些时期内，行星处在留的情况中，那时它的黄经适在相对的极大或极小之际．设 L 与 L' 为两行星 P 与 P' 的日心黄经，它们的直角坐标为

$$x = a\cos L \qquad x' = a'\cos L'$$
$$y = a\sin L \qquad y' = a'\sin L'$$

倾角与偏心率均略而不计．行星的地心黄经为下列方程所给出：

$$\tan\lambda = \frac{a'\sin L' - a\sin L}{a'\cos L' - a\cos L}$$

由这式的导数不难检验，当

$$\cos(L'_s - L_s) = \frac{a'^2n + a^2n}{aa'(n+n')}$$

之时，行星留（n 与 n' 为平均运动）．

由于
$$a' = q^2a \qquad n' = \frac{n}{q^3}$$

且有
$$\cos(L'_s - L_s) = \frac{\sqrt{aa'}}{a+a'\sqrt{aa'}} = \frac{q}{1-q+q^2}$$

$$\pm\sin(L'_s - L_s) = \frac{(q-1)\sqrt{1+q^2}}{1-q+q^2}$$

$$\pm\tan(L'_s - L_s) = \frac{q-1}{q}\sqrt{1+q^2} \tag{3}$$

由于留时 $L'-L$ 角的数值可用这些公式算出，因而容易推出逆行总共经历的时间为

$$T_s = 2\,\frac{L'_s - L_s}{|n'-n|} \tag{4}$$

如果设 $q=1$，则逆行时间趋向于一年的 $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$ 日，即55日．这结果的取得是根据行星与地球在同一平面上作等速运动而来的．当 q 作无限的增长时，则逆行时间增长直到半年为其极限．

容易证明，在留时内行星与太阳(或外行星与太阳背点)的角距离 l_s 为下式所给出：

$$\pm \tan l_s = \frac{a'}{a} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a'}{a}}} = \frac{q^2}{\sqrt{1+q^2}} \tag{5}$$

由 $2l_s$ 弧减去逆行期间地球的日心黄经改变的弧，则得*逆行弧*($\rho = 2l_s - nT_s$)，即是两个留点之间的地心黄经之差(这段弧内包括一个下合或一个冲按行星是内或外而定)，逆行弧量度行星在天球上的视轨道所描出的环圈的平均幅度(见图116)．下表记载由以上几个公式(1至5)所求得的七个大行星的结果：

	角运动		留			
	下合	上合	$L'_s - L_s$	逆行期	距离太阳	逆行弧
水星	−3516″	+6669″	35°34′	22.9日	18°12′	13°49′
金星	−2255	+4480	13 0	42.2	28 51	16 9
	冲	合				
火星	−1286″	+2545″	16°47′	72.7日	136°12′	15°57′
木星	−474	+823	54 26	120.6	115 35	9 58
土星	−281	+445	65 32	137.7	108 46	6 47
天王星	−150	+216	73 55	151.8	103 10	4 4
海王星	−100	+135	77 38	158.5	100 30	2 49

现在简略地讨论内行星(水星与金星)的地心运动．图115大约表示水星的情形．在 M_1 时，水星与太阳上合．平均约在36日以后，水星来到 M_2，处于*东大距*，日落后出现于西方．这以前水星的相是凸圆形，到东大距时则出现半轮．大距后平均约11日达到 M_3 地心运动停止顺行，于是水星留．留后平均约11日，水星与太阳下合．在半轮与下合之间水星的相是*娥眉形*．在上合与下合之间视直径增长(平均值由5″至11″)．

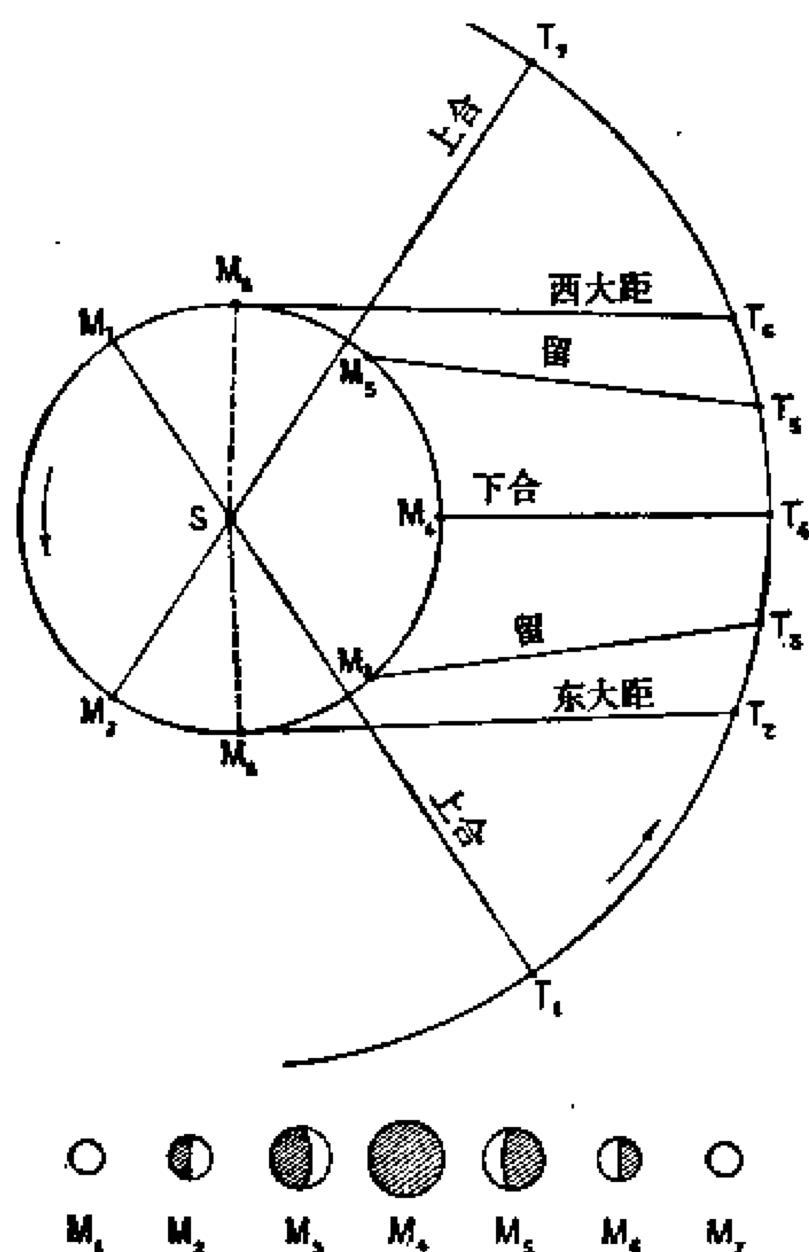


图 115

这以后相同的现象循逆向发展，即经过留与西大距(这时水星于黎明前出现于东方)，最后再回到上合，而完成一个会合周期．在下合与其后的上合之间，视直径继续变短．

金星表现类似的现象，不过运动比较缓慢，会合周期长达584日，而水星的会合周期只有116日．此外，由于地心距离的相对变化较大，金星的视直径比水星的变

化也相对的大些(平均由 10″ 到 61″).

如不考虑行星轨道的偏心率与倾角,大距时太阳、行星与地球组成直角三角形. 设 L 与 L' 分别为行星与地球的日心黄经,则

$$\cos(L_g' - L_g) = \frac{a'}{a} = q^2$$

这样求得的黄经差比以上对于留时所得出的稍微大些. 图 115 中所表示的 M_2 与 M_3 及 M_5 与 M_6 是按实际情况而绘出的. 所谓大距即行星与太阳之间的最大角距离, 即 $L'-L$ 的余角. 中间为下合分开的继续两次大距所经历的时间的表达式为

$$2\,\frac{L_g' - L_g}{n' - n}$$

由此式求得的数值列入下表:

	大距	
	距离太阳	时间间隔
水　　星	22°46′	43.3 日
金　　星	46 20	141.7

行星与太阳之间的角距离可达如下的数值: 水星 27°.8, 金星 47°.8, 这些数字与以上的结果之差是由于轨道的偏心率. 在远日点大距之时,角距离显然超过平均值,在水星特别是这样的. 反之,若大距发生于近日点时,行星与太阳的角距离远远不及这个平均值.

行星的地心运动, 可以由太阳对于地球的运动与行星对于太阳的运动综合而成. 再将轨道的倾角考虑进去,便可得着如图 116 那样蜿蜒的环圈式轨道.

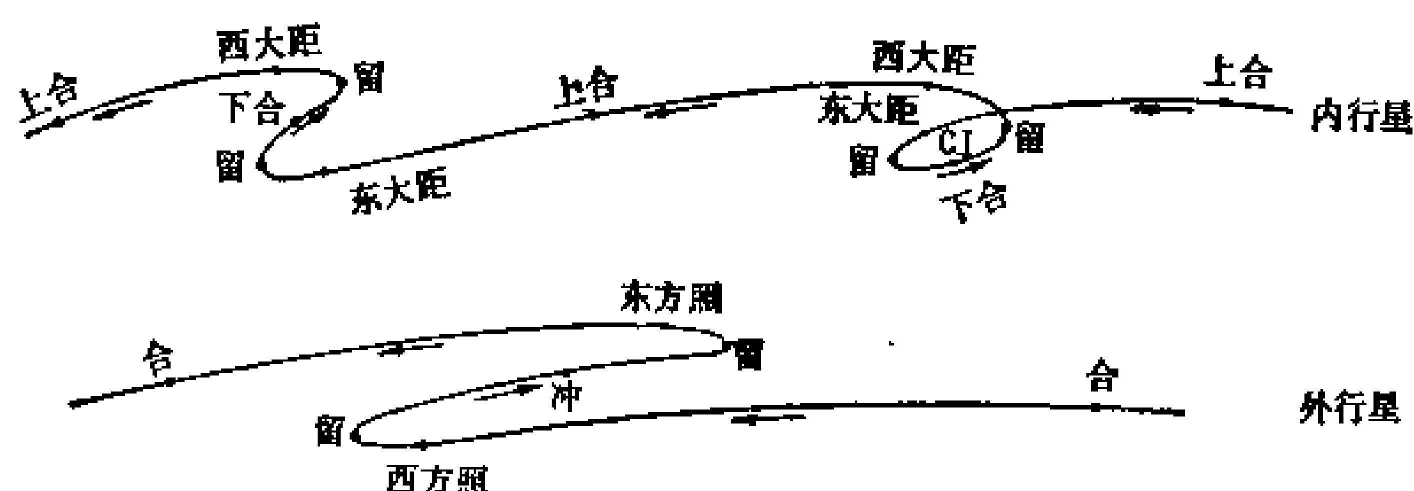


图 116

下表摘录内行星在一会合周期内, 两次上合之间的星历表(表中 $2s$ 表示视直径, m 表示星等, k 表示行星圆面被照明的分数).

半轮出现(如倾角为零,则发生于大距之时); 可在大距前后一或二日.

若在合、大距、留等的日期上加入会合周期的整倍数,去推算未来的星历表,所得的结果将使人大大失望,原因是倾角与偏心率有很大的影响. 例如水星在 1948 年上合与下合发生的时间间隔为 47.6 日, 69.1 日, 55.9 日, 48.7 日, 69.2 日, 53.8 日. 而由上面计算出的会合周期之半是 57.9 日.

同样逆行期为 21.9 日, 24.1 日, 20.9 日, 而由公式 4 算得的平均逆行期为 22.9 日. 至于东西两大距的时间间隔,若不计入轨道的偏心率与倾角,则为 43.2 日,但实际是 42.1 日, 48.5 日, 40.7 日. 应当指出,这是由于水星轨道的偏心率特别大的原因.

水　星

年	月	日	时		2s	m	k
1948	1	3	13	上合	4″.6	−0.8	1.00
	2	2	18	升交点	6.5	−0.6	0.62
		4	15	东大距 18°16′	6.8	−0.4	0.53
		5	8	半轮	7.0	−0.3	0.50
		7	9	近日点	7.5	0.0	0.40
		11	3	留	8.5	0.7	0.22
		20	3	下合	10.4	2.8	0.00
		22	14	极长视直径	10.5	2.6	0.02
	3	4	0	留	9.3	1.0	0.26
		12	2	降交点	8.0	0.6	0.44
		15	10	半轮	7.6	0.5	0.50
		17	17	西大距 27°39′	7.4	0.5	0.53
		22	9	远日点	6.8	0.4	0.60
	4	26	15	极短视直径	5.0	−1.4	0.99
		29	5	上合	5.0	−1.7	1.00

金　星

年	月	日	时		2s	m	k
1946	1	31	16	远日点	10″	−3.5	1.00
	2	1	13	上合	10	−3.5	1.00
		4	13	极短视直径	10	−3.5	1.00
	4	20	9	升交点	11	−3.3	0.95
	5	24	1	近日点	12	−3.4	0.88
	8	9	22	降交点	18	−3.7	0.63
	9	6	2	半轮	24	−4.0	0.50
		7	1	东大距 46°13′	24	−4.0	0.50
		13	9	远日点	26	−4.0	0.46
	10	13	—	极大亮度	40	−4.3	0.26
		28	5	留	51	−4.2	0.13
	11	17	19	下合	63	−3.0	0.00
		18	8	极长视直径	63	−3.0	0.00
	12	1	2	升交点	58	−4.0	0.06
		8	10	留	53	−4.2	0.11
		23	—	极大亮度	41	−4.4	0.26
1947	1	3	16	近日点	35	−4.3	0.34
		28	1	半轮	25	−4.0	0.50
		28	10	西大距 46°50′	25	−4.0	0.50
	3	22	15	降交点	16	−3.6	0.72
	4	26	0	远日点	13	−3.4	0.82
	7	13	19	升交点	10	−3.3	0.96
	8	16	9	近日点	10	−3.4	1.00
		31	4	极短视直径	10	−3.5	1.00
	9	3	14	上合	10	−3.5	1.00

现在提出这样一个问题：行星的恒星周期 θ 或会合周期 T 有否一个整倍数足够近似地等于年的整倍数？这样的周期便可使地球与行星再回到原来的相对情况，即复回到相同的黄经，而平近点角与升交距角亦再近似地回到相同的数值. 对于水星，可以采取其会合周期 θ 整倍数(或其恒星周期 T 的整倍数)与恒星年 A 的整倍数，如下的近似关系：

$$\left.\begin{aligned} 19\theta &= 25T + 2^{\mathrm{d}}.4 = 6A + 10^{\mathrm{d}}.1 \\ 22\theta &= 29T - 1.8 = 7A - 7.5 \\ 41\theta &= 54T + 0.6 = 13A + 2.7 \\ 145\theta &= 191T + 0.1 = 46A + 0.5 \end{aligned}\right\} \text{水星}$$

6 与 7 年两个周期比较短是其优点，但不确切，因而没有很大的实际用途. 13 与 46 年两个周期比较确切(特别是 46 年). 对于金星 8 年的周期既短而又很近似：

$$\left.\begin{aligned} 5\theta &= 13T - 1^{\mathrm{d}}.5 = 8A - 2^{\mathrm{d}}.4 \\ 152\theta &= 395T - 0.8 = 243A - 1.3 \end{aligned}\right\} \text{金星}$$

地球遇水星轨道的交点，约在每年 11 月 9 日(升交点)与 5 月 7 日(降交点). 若这日期大约与水星的下合期相合，便发生*水星凌日*(*过日面*)的现象. 水星凌日最近发生的时期，在 11 月的有 1940, 1953, 1960 与 1973；在 5 月的有 1937 与 1970. 由于 11 月的凌日在近日点附近，水星的地心距显然比远日点附近的 5 月凌日时的地心距长些；而且 11 月凌日的次数约为 5 月凌日的次数的两倍. 水星凌日现象每隔 46 年相当确切地重复出现[1](见上表与 15 章).

同样，若金星的下合适逢 12 月 8 日(过升交点)或 6 月 6 日(过降交点)，则发生*金星凌日*现象. 最近的 6 月的凌日发生于 1761 与 1769, 12 月的凌日发生于 1874 与 1882, 未来的金星凌日在 2004 与 2012 年的 6 月. 除了很少的例外，这现象每 243 年重演一次.

外行星距离太阳较远，因而其地心运动与内行星不同. 在 J_1 处(图 117) 行星(这里假设为木星)与太阳相合，因而不能看见. 在 J_2 时 ST_2J_2 三角形的 T 角是直角，行星对于太阳处在*西方照*；它在半夜出东地平，地方时 6 时中天. 它的相为极大，在这位置上火星是凸圆形，而明暗界限是凸出的. 木星和土星的相在背着太阳的边沿上显得特别昏暗. 到达 J_3 处行星*留*，其视直径即将增长. 它的相已显著地减少. 最后在 J_4 行星与太阳相冲，呈现最长的视直径，但其相为零. 它在地方时半夜 0 时中天. 冲后，相同的现象循逆向发展. 行星在冲时逆行，到 J_5 处留，到 J_6 处为*东方照*；相为极大，东方照缺东边沿，不象前次西方照缺西边沿. 东方照时行星于地方时 18 时中天，上半夜可见. 最后到 J_7 处再发生一次合，这样便完成了一个会合周期.

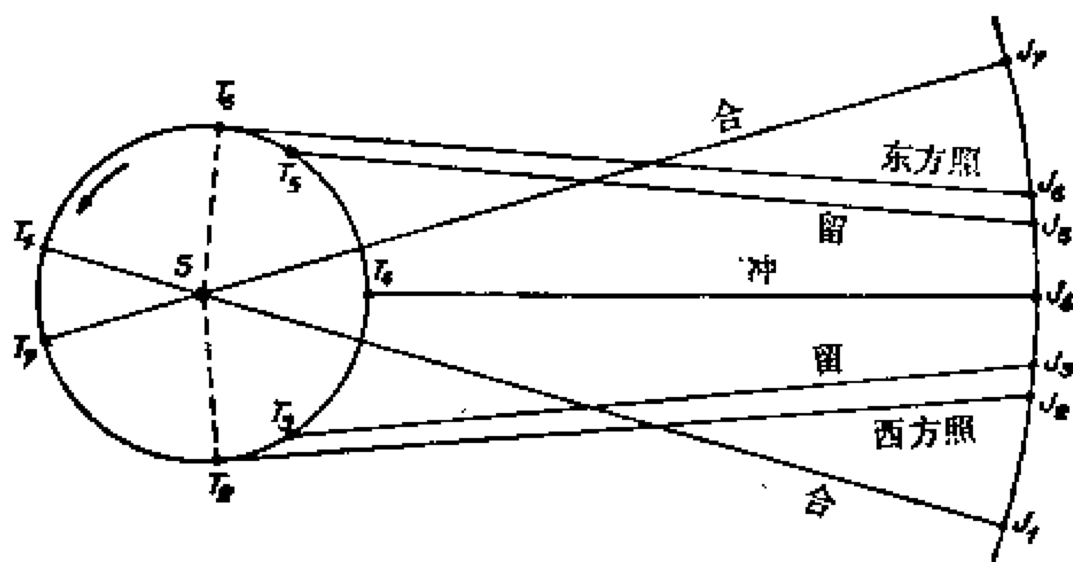


图 117

行星在方照时，那里的观测者看见地球在大距，因此可用下列的公式去求地球与行星的日心黄经差：

1) 1937 年的掠边凌日，1983 年不再出现. 凌日理论与其周期性将于 §136 讨论.

$$\cos(L_q' - L_q) = \frac{1}{q^2}$$

容易计算中间有同一冲的继续两方照所经历的平均时间．这段时间对于接近地球的行星很长，到了距离为5天文单位时为极小，然后再缓慢地增加，当半长轴无限增长时，便达半年(182.6日)为其极限．

方　照

	$L_q' - L_q$	平均时间
火　星	48°59′	212.2日
木　星	78 55	174.9
土　星	84 0	176.4
天王星	87 1	178.7
海王星	88 6	179.9

这里所列出的是平均值，由于偏心率与倾角不是可以忽略的量，真实数字与平均数字可能相差很大，特别是在偏心率显著的火星的情形．

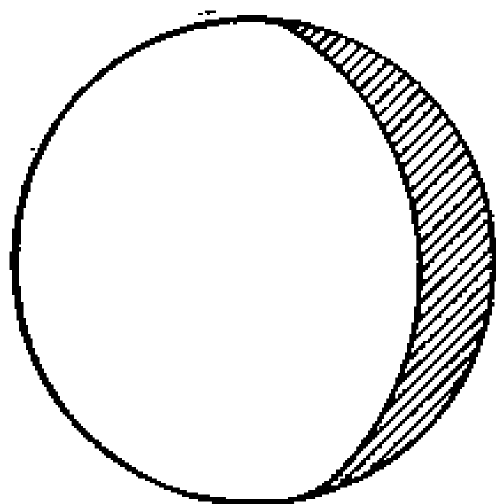


图118　最大相时的火星

外行星亦如内行星，其视轨道是蜿蜒的环圈形状(图116下)．下表摘录火星与木星在一会合周期里的星历表．火星表内给出它的视直径 $2s$，星等 m 与其圆面明亮部分所占的分数 k，图118表示最大相时的火星．木星表内给出赤道视直径 $2s$，星等 m，而不给出明亮部分的分数 k，因为它与1相差总是很少．(1942年9月9日：升交点；1945年12月18日：远日点；1948年12月26日：降交点；1951年11月20日：近日点)．

火　星

年	月	日	时		$2s$	m	k
1944	11	8	12	降交点	3″7	1.7	1.00
		14	18	合	3.7	1.7	1.00
1945	5	9	17	近日点	4.9	0.8	0.93
	9	8	18	升交点	6.8	0.2	0.88
		24	—	最大相(41°39′)	7.4	0.0	0.87
	10	19	1	西方照	8.6	−0.2	0.88
	12	5	19	留	12.2	−0.9	0.94
1946	1	10	8	最长视直径	14.7	−1.2	1.00
		14	1	冲	14.6	−1.2	1.00
	2	21	21	留	11.5	−0.2	0.95
	4	18	2	远日点	7.1	1.0	0.90
		19	1	东方照	7.0	1.0	0.90
		22	—	最大相(37°6′)	6.9	1.0	0.90
	9	26	11	降交点	4.0	1.5	0.98
	11	27	10	最短视直径	3.9	1.5	1.00
1947	1	6	8	合	3.9	1.4	1.00

木　　星

年	月	日	时		$2s$	m
1946	10	29	22	最短视直径	31″	−1.2
		31	20	合	31	−1.2
1947	2	16	1	西方照	37	−1.6
		18	—	最大相(10°31′)	37	−1.6
	3	14	11	留	40	−1.8
	5	14	8	冲	45	−2.1
		15	20	最长视直径	45	−2.1
	7	15	23	留	41	−1.8
	8	11	—	最大相(10°52′)	37	−1.7
		12	9	东方照	37	−1.7
	11	29	7	最短视直径	31	−1.3
	12	1	10	合	31	−1.3

在一会合周期里围绕太阳经行一周以上的行星只有火星．以后还要讨论火星的会合运动的情况．至于其他几个外行星，连续两次冲之间在黄道上经过的弧不长．它们的平均值是

木　星	33°.1
土　星	12.7
天王星	4.3
海王星	2.2

可见在一会合周期里，木星只由黄道上的一宫移到其次一宫；而土星与其他二行星移动更加缓慢．

但火星的地心运动则与此相反．在一会合周期里，火星的黄经的增长，一周之上还加48°.7（即408°.7）．可见火星在黄道十二宫里至少都经过了一次．下表列出连续十个冲的黄经：

年	月	日	视　直　径	黄　经
1931	1	27	14″	127°
1933	3	1	14	161
1935	4	6	15	196
1937	5	19	18	238
1939	7	23	24	300
1941	10	10	23	17
1943	12	5	17	73
1946	1	14	15	113
1948	2	17	14	148
1950	3	23	14	182

由于火星近日点的黄经为335°，因而在8月29日附近发生的冲在其近日点附近（大冲），在2月25日附近发生的冲离其远日点不远．

火星轨道的偏心率很大，因而不能据其会合周期去预推其地心运动各种情况的重演．近日点与远日点之间发生的冲常比平均日期迟，可推迟到25.7日，而在轨道的另一半上，这现象又可比平均日期早，可提早到26.1日（这差异的原因是由于地球轨道的偏心率）．

至于连续两次冲之间的时间在远日点附近比在近日点附近稍短一些．两次冲的黄经差，在前一情形比在后一情形要小一些．例如1933年的远日冲发生于1931年的远日冲后764.0日，黄经变化了34°(加一周)，而1941年的近日冲发生于1939年的近日冲之后810.2日，黄经变化了77°(加一周)．对应的黄经差分别为33°.7与77°.6.

再回到同一黄经之冲的近似周期，有如下几种，但结果都不好：

$$\left.\begin{aligned} 7\theta &= 8T - 36^{\mathrm{d}}.3 = 15A - 19^{\mathrm{d}}.3 \\ 15\theta &= 17T + 20.4 = 32A + 10.8 \\ 37\theta &= 42T + 4.5 = 79A + 2.4 \end{aligned}\right\} \quad \text{火星}$$

其中只有79年的周期还相当确切，值得保留．下面的实际规则也许有用：适宜于火星的物理观测的近日冲，一般相隔约15年，日期在7月至10月内；但每一序列里只有3或4个冲．下面便是这些冲的序列：

1862—1877—1892— 1907

1909—1924—1939

1941—1956—1971—1986

1988—2003—等……

图119里绘上火星与地球的轨道，并标出1941至1999年间火星冲日所占的位置．这些位置在黄经上的分布很不均匀，连续两次冲日的角距离的变化，如上所言，由33°.7至77°.6.

最后还须提请注意，最短地心距出现的日期不与冲的日期相合，最大相的日期也不与

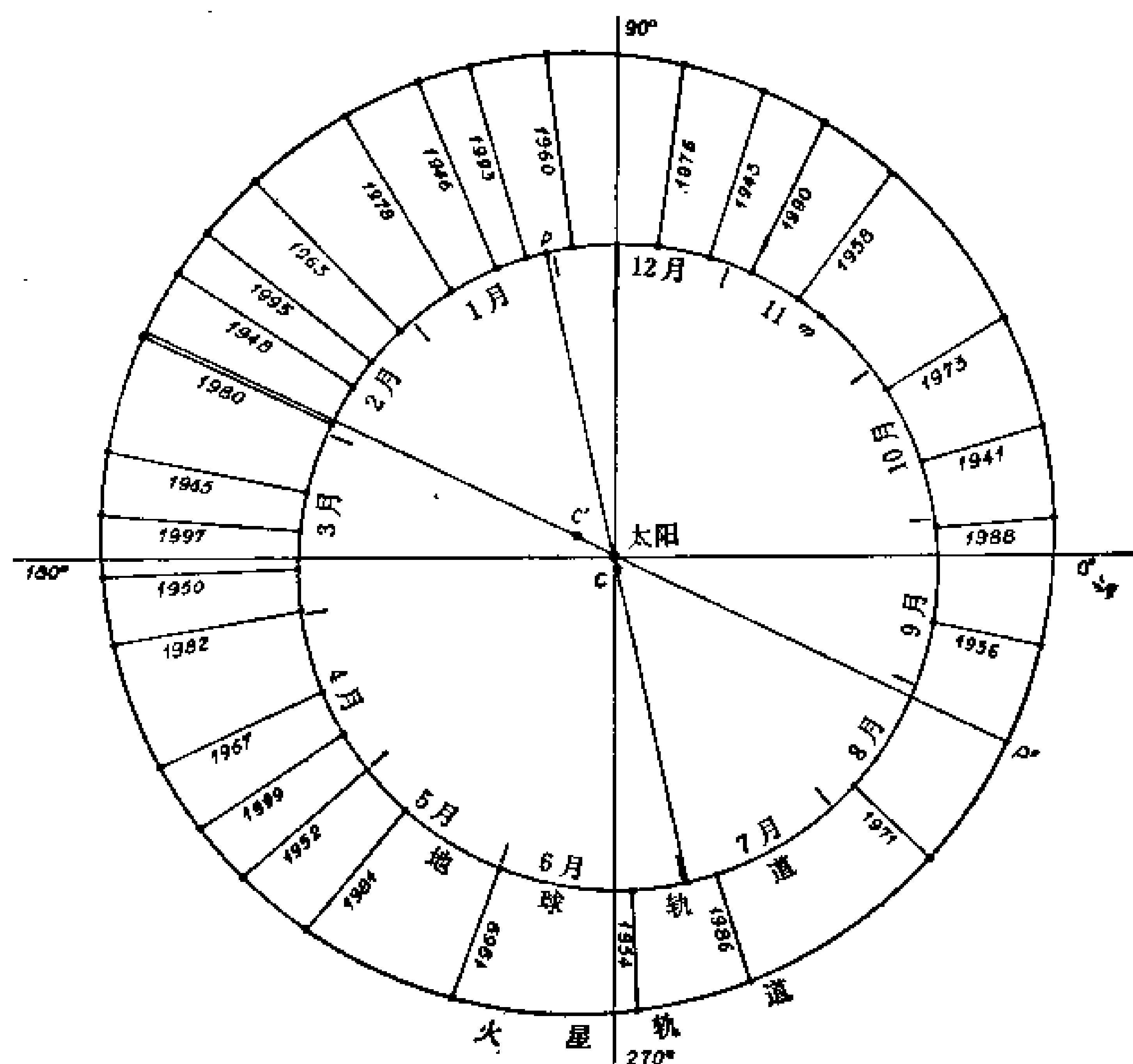


图119　1941至1999年的火星冲日

方照的日期相合．这些差异主要由于火星轨道的偏心率(比较大)与倾角而来．

结束这一节以前略谈一点小行星．大多数小行星在大望远镜里象恒星那样的小光点．只有很少几颗在冲时才有可觉察的圆面；其视直径很少达到1″．据估计，谷神星①与灶神星④直径约650公里；智神星②200公里；婚神星③300公里，这以后发现的小行星，大多数的直径只有几公里．

小行星轨道的半长轴差不多全在1.7与4.3之间，尤以2.7与3.4之间更加密集．因此小行星轨道大部分在火木二星轨道之间．轨道的倾角有时很大(智神星：35°)，偏心率有时也很大[Hela(699)：0.41]．而且还发现几颗，其半长轴与平均值相差很大．

(1) 1898年发现的爱神星433，周期(1.76年)比较火星的周期(1.88年)还短．它的远日距(1.78)超过火星的远日距，但它的近日距只是1.13(火星的近日距：1.38)，因此爱神星比较火星可能更接近地球得多．这颗小行星引起许多重要工作，本书中有几处提到．

(2) 自1932年以来，人们发现几颗小行星，其近日距远短于一个天文单位．其中三颗的周期比火星的周期还短：如Apollon(1.81年)，Hermès(1.47年)，Icare(1.12年)．Icare比水星更接近太阳；Adonis也是这样，虽然它的周期(2.76年)比火星的周期长，可是它的偏心率达0.78．Hermes是月球之外最接近地球的天体只有0.004天文单位．

(3) 小行星环圈的另一边有15个叫做脱罗亚群的小行星(它们是按托罗亚战争中的英雄Achille，Hector，Ulysse等命名)，其周期在11.49与11.97年之间，和木星的周期(11.86年)相当接近．托罗亚群小行星大致满足拉格朗日三体问题的一个稳定的特殊解，即它们中每一个与太阳和木星组成一个近似的等边三角形．

(4) 最后，还须提一下小行星Hidalgo(944)，其倾角达42°，偏心率为0.66，过近日点时距离太阳(2.0)和火星相似，而其远日点(9.6)比土星还远．

Icare，Hidalgo与其他几颗小行星的轨道，就倾角与偏心率看，都和一些周期彗星相似．由于它们上面没有蒸发的气体，所以才将它们当做行星．反之，周期彗星Schwassmaun-Wachmann(1)，其半长轴(6.39)、偏心率(0.135)与交角(10°)，初看去具有行星的特征，但以其物理情况(彗核)，而被列为彗星．

§89 行星的质量、直径与密度

应用开普勒第三定律，可以决定有卫星的行星的质量．设以m，m'与m''分别表示太阳、行星与卫星的质量．更设a'与a''表示行星与卫星轨道的半长轴，n'与n''表示其各自的平均运动．围绕太阳按开普勒轨道运行的是行星与卫星组成的系统的引力中心，应设质量$m'+m''$会聚在那一点上．于是

$$n'^2a'^3=k(m+m'+m'')$$

同样，卫星的轨道应满足下列的关系：

$$n''^2a''^3=k(m'+m'')$$

因此

$$\left(\frac{n'}{n''}\right)^2\left(\frac{a'}{a''}\right)^3=\frac{m}{m'+m''}+1 \tag{1}$$

太阳与行星的质量之比经常很大，即使对于最大的木星，也超过1000. 反之，卫星的质量对于行星，除了月球之外，一般是可以略而不计的. 因此(1)式的右端一般可以作为是等于 m/m' 的. 可是卫星的轨道受到太阳的摄动，我们将证明(§ 114)在地球与月球的情形，由这种摄动而来的改正因数，显然不是1.

若将(1)式应用于地-月系，可将 $\frac{a'}{a''}$ 之比换为 $\sin P:\sin \varpi_0$, P 与 ϖ_0 分别表示月亮与太阳的视差.

至于没有卫星的行星(水星与金星)，其质量可由它们对于太阳系其他天体的摄动而求得；但由这方法所得的结果不很精确，特别是对于质量小、而且接近太阳的天体.

由近年的研究推出的太阳附近的行星的质量相当精确. 例如腊布在1950年曾经讨论爱神星于1926至1945年间所受到的水星、金星、地球(加月球)与火星的摄动，从而得出这几颗行星的质量的倒数(和可几误差)如下：

水　星	6210000±	43000
金　星	408645	208
地球＋月球	328452	43
火　星	3110000	7700

这方法用以求地球的质量有一个优点，因为这样求得的结果与太阳的视差无关，但利用卫星的方法就须牵涉到太阳的视差(见§70).

由以上方法所求得的太阳系里的天体(包括太阳)的质量，都表示为对于其中一体(太阳或地球)的比例. 因此，只须将地球的质量测定而表为物理学上的单位，便可将太阳与行星的质量表为相同的单位(§ 114里我们将说明怎样测定月球的质量与地球的质量之比). 设以地为正球形，R 为其半径，d 为其平均密度，其质量 m' 可以表为

$$m'=\frac{4}{3}\pi R^3 d$$

于是地球而上单位质量所受的引力为

$$\frac{km'}{R^2}=\frac{4}{3}k\pi Rd$$

假定这引力便是重力 g(以后还要解说)，便得

$$kd=\frac{3g}{4\pi R} \tag{2}$$

常数 k 已为物理学家利用扭摆对引力作了直接的测定. 因此(2)式提供地球的平均密度. 如果考虑地球的扁率与自转运动，这公式还须加以修改. 根据黑梅特(Helmert)，设 R 表示地球的赤道半径，g_0 表示赤道上的重力加速度(由摆的周期的观测而求得)，ω 表示地球自转的角速度，ε 表示其扁率，则

$$\frac{km'}{R^2}=g_0(1-\varepsilon)+\frac{3}{2}\omega^2 R$$

至于地球的体积(计入扁率)的表达式为

$$\frac{4}{3}\pi R^3(1-\varepsilon)$$

于是 $$kd=\frac{3}{4}\frac{g_0+\frac{3}{2}\omega^2R(1+\varepsilon)}{\pi R}$$

据黑梅特取 $$g_0=978.030\ \text{厘米/秒}^2,$$

据黑福德(Hayford)取

$$R=6378.388\times10^5\ \text{厘米}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{297}$$

则得 $$kd=\frac{978.03+5.11}{26718}\times10^{-5}\text{c. g. s.}=36.80\times10^{-8}\text{c. g. s.}$$

由 k 值的测量的研究,取

$$k=6.65\times10^{-8}\text{c. g. s.}$$

于是算出 $$\left.\begin{aligned}d&=5.53\ \text{克/厘米}^3\\ m'&=6.0\times10^{27}\ \text{克}\end{aligned}\right\}$$

因为太阳的质量 m 是 2×10^{33} 克.

下表给出大行星的直径质量与平均密度. 直径的求得是根据测微器对于视直径的测量;对于水星、天王星与海王星是不很确定的,因此这三个行星的密度的数值也不很可靠. 木星与土星的数字的求得,是计入了它们的扁率的.

	直　径	质　量	平均密度	平均视直径(从太阳看)
水　星	0.37	0.054	5.9	17″
金　星	0.97	0.82	5.0	23
地　球	1.00	1.00	5.5	18
火　星	0.54	0.108	3.8	6
木　星	11.1	318.4	1.4	38
土　星	9.4	95.2	0.7	17
天王星	3.9	14.6	1.3	4
海王星	3.5	17.3	2.2	2
太　阳	109.0	333432	(1.4)	

四个内行星比四个外行星体积小得多,密度大得多. 木星和天王星的密度与太阳相近,而土星的密度显然很小.

§90 天文学的单位

亦如力学上的单位制,天文学家研究太阳系所采用的单位,也是从三个基本量,即长度,质量与时间而导出的. 质量与时间的单位是自然界所提供的,而长度的单位则是人定的.

质量的单位是太阳的质量($m=1$);时间的单位[1]是平太阳日. 地球轨道的半轴一向被取为长度的单位,但由于下述的原因:不得不放弃了它.

地-月系的引力中心的轨道遵循开普勒第三定律:

$$n^2a^3=km(1+\mu) \tag{1}$$

1) 关于时间的单位,参看 §65.

式内
$$\mu=\frac{m'+m''}{m}$$
这关系式立即提供 km 之积的量纲为 L^3T^{-2}

式(1)内各项不尽是为观测所给定的．它们的数值不仅有测量上的误差，也有由理论而来的误差．

(1) 公式中的平均运动 n 便不是由观测所给出的，其理论值与观测值由于行星的摄动而有偏差(§ 109)．

(2) 质量比 μ 的计算，或从观测的摄动直接导出，或由月球的运动推算，也都受摄动理论的影响：后一情形里太阳的视差(还未测定到足够精确的程度)也发生作用．

假设 $a=1$，则方程(1)提供 km 之积的数值
$$km=\frac{n^2a^3}{1+\mu}$$
但由此求得的数值，既与由观测而来的某些数据、也和摄动理论的结果有关；因此，这个数值是常受到修改的．从这里据下式去决定任一行星的半长轴 a'：
$$a'^3=a^3\left(\frac{n}{n'}\right)^2\frac{1+\mu'}{1+\mu}\quad(a=1)$$
可见这一决定的结果不但与行星的数据也和地球的数据有关．太阳的视差或地球的质量有修改时，便对其他行星轨道的大小(表示为地球轨道半长轴的函数)发生影响．

要避免这种不便之处，只好放弃使 $a=1$ 的假定．于是一劳永逸地给与 km 之积以一确定的数值(设 $m=1$，则给与 k 以一确定的数值)．这样，长度的单位便是间接的测定量(按照以上所说的 km 之积的量纲)．于是方程(1)便可将 a 表示为这一单位的数字；其他行星的轨道的半长轴亦同样可由下式求得：
$$n'^2a'^3=km(1+\mu')$$
n 或 μ 的数值即使有变化亦不致影响 a' 的测定，除了其他的间接效应，例如地球对于行星所施的摄动之计算有所修改，而这摄动是直接和地球的质量有关系的．

天文学工作者决定保留高斯从方程(1)所求得的 k 的确定数值，他在这式内设 $a=1$，并付与其他常数以当时认为最好的数值．国际天文协会于 1938 年决议采取
$$\sqrt{k}=0.017202098950000$$
或
$$k=0.000295912208286$$
至于 a 的数值，便由下式给出
$$a=\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)^{2/3}m^{1/3}(1+\mu)^{1/3}$$
m 这个因子等于 1，μ 很小，于是这公式所给出的 a 的数值很近于 1(由于提供 k 值的计算方式)．由此可见，$\sqrt{k}$ 是与 n 接近的数字．我们经常将这数字表示为角的单位：
$$\sqrt{k}=3548''.1876069651$$
$$\sqrt{k}=0^{\circ}.985607668601425$$
至于 a 的数值，由它所根据的理论而定；

据勒威耶： $a=1.00000129$

据纽康 $a=1.00000023$

若以腊布所求得的地球的质量去代纽康所求得的，则 a 的后一数值没有什么变化．

无摄动、而质量可略、其半长轴等于天文单位的行星，其恒星周期为

$$P_0=\frac{2\pi}{\sqrt{k}}=365.2568983263\ 日$$

§91 彗　　星

自有历史以来，经人观测而有记录的彗星，为数超过1400[1]. 每年出现几颗彗星，其中大多数只能在望远镜里才看得见. 若观测条件适宜，人们在彗星上可以分别出下列几个部分：

(1) 彗核很小，象一个明亮的星点，其直径只有几百米的数量级. 只有很少数距地近的彗星，才分辨出彗核.

(2) 彗核气是彗核周围的大气，分布不广，但有相当确定的范围，常被人误为彗核.

(3) 彗发是极其稀薄的气体，延伸得很长，有时可以扩散到太阳那样的范围.

(4) 彗尾，常在背着太阳的一面；有些彗星无尾，有些彗尾很长，可以达到一个天文单位.

彗星的质量不多，其大部分密集在彗核内，围绕太阳作椭圆抛物线或双曲线轨道运动的便是彗核. 百分之六十的彗星，偏心率与1相差之量常在这个根数的测定误差范围之内；例如，可以观测一年的彗星，大多数的轨道是抛物线的(§85). 偏心率小于1的彗星叫做周期彗星. 载有170个周期彗星的表里，只有39个曾经被人确定观测了至少两次的出现(其中一个是比拉彗星，在1846年分裂为二)； 书末表XXX记载复返被人观测到的周期彗星. 还有少数彗星，偏心率大于1，最大的还没有超过1.009. 经法耶(Fayet)、斯冲格林(Strömgren)等的研究，似已证实这些彗星原来本是抛物线的，由于大行星(特别是木星)所施的摄动，而使其轨道改变为双曲线.

反之，还有67个周期彗星(其中一些只观测过一次)，原来的轨道本是抛物线，但因木星的摄动，而被捕获在太阳系内. 它们的倾角象行星那样相当小，但远日距超过10个天文单位的彗星的倾角，常在0°至180°之间作随机的分布.

彗星在距离太阳相当近时才可以被人观测得到，其中最亮的亦须在4或5天文单位处. 有一个彗星在远日点处也被人观测到，这是§88里谈过其轨道象行星Schwassmann-Wachmann (1) 彗星. 至于新彗星常在其近日点附近被人发现. 因此暂时用抛物线型的轨道根数去表达初期的观测，常得着相当准确的结果. 但须在几个星期的观测以后，人们才可以决定其偏心率与1相差或多或少的程度.

1) 参看F. Baldet在法国经度局年鉴(1950)里的彗星表. 附表中有关彗星的统计数据(迄至1956年终)取自1957年年鉴.

第十一章 轨道计算

§92 概　论

在一确定的力场内，一质点的运动，依靠6个常数，它们可能是t时质点的坐标与这些坐标对于t的导数，也可能是与这些量联系的其他6个量．对于特殊情形，如在太阳的引力场里这6个常数，就可能定出轨道的根数(§86)．

这6个根数的计算是假设已知由观测得来的6个独立的数据．我们可以采用运动的天体在3个时刻t的地心坐标作为这6个数据．

若天体在黄道内运行，这里面有相应于观测时刻的地球中心的三个位置，问题便成了平面的，于是未知数减少到4个．但每一观测只提供一个独立的数据，即运动体的地心黄经，因而需要4个观测．由此可见，若要对倾角小的轨道根数作相当精确的测定，4个观测仍属必需．本书里不讨论这一情形，读者可参看这方面的专著[1]．

一颗彗星刚被发现之后，天文工作者赶快测定它的根数，以便计算寻找它的星历表，否则由于星光减弱，它有被失掉的危险．假定彗星轨道在太阳附近的一段弧很接近于抛物线．因此假设取$e=1$，于是未知数减少为5个．在3个完全观测的情形，中间一个位置的作用，在计算的前一部分，仅是一个辅助量的决定，这一量与第一和第三次观测位置，用于计算末后一部分，而舍弃中间一个位置的坐标(奥耳伯尔方法)．

根据3个观测的位置对任何轨道的6个根数的计算，不能化为一个代数学的问题，除非这3个观测在时间里是无限接近的情形．换句话说，若知历元t的行星或彗星的地心坐标以及它们对于时间的一、二阶导数，我们便可写出一个代数方程组，由其解答可以得出轨道根数的数值，这是拉普拉斯方法所根据的原理．可是应当注意这方法所用的数据，有些不是观测所直接提供的．对于历元t的两个坐标可以是直接得来的数据，但是它们的一阶与二阶导数只能就近似的公式算出(根据至少三个非同时的观测，其中一个可能为历元t)．于是由拉普拉斯方法面来的方程，便不是严格的正确．由于这些方程的解需要6个数字值，面其中4个只是近似值，所以这样求得的根数，应该于以后加以改正，其他方法所给出的根数也是一样地需要加以改正的．

若观测时间不是无限地接近，中间相隔一段或长或短的时间(彗星的情形不到一星期，小行星的情形3或4星期)，问题可能容许一个代数的近似解，直接用到观测的6个坐标．高斯方法便提供这个类型的解．奥耳伯斯方法求抛物线轨道也是这样．

这些方法在实际上的应用曾导出各种改进的形式．这是由于对转换式或近似式的展开，在项数有多少的不同，读者可参看有关轨道计算的专著[2]．本章只对主要方法在基

1) 例如 Дубяго: Определение Орбит 或易照华: 天体力学教程第三章§11——译者注

2) 从前的转换式多为对数计算而设计，但自从计算机广泛使用以后，失掉了它们的作用．读者可参看: G. Merton 在 M. N. 85卷，(1925)里一篇文章: "A Modification of Gauss' Method for the Determination of Orbits"，本书多处引用．

本原则上加以阐发并举出数字的例子，并不企图作详尽无遗的叙述，亦不拟为职业计算者提供计算指南.

本章所用的单位是§90里所讲过的. 太阳的质量为1，而略去计算根数的行星的或彗星的质量；并取(§90)

$$k=0.000295912208286$$

$$\sqrt{k}=0.017202098950000=3548''.18761=0^\circ.9856076686$$

(1938年国际天文协会决议的采用值).

按照一般的规则，与国际天文协会的决定，行星或彗星的观测刊布的形式，是对于当年1月0的平均根数的平位置(参看§60). 因此须从视坐标里减去"归算到当天"的一组改正值(岁差、章动与光行差)，或将被观测的星的位置归算到对于1月0的比较星的平位置去. 这样，才会得到行星或彗星的平坐标.

对于目视观测，行星或彗星的位置，藉动丝测微计，将其归算到视场里恒星的位置. 测微计所提供的是较差坐标，因而须改正蒙气差的效应. 为将较差坐标归算到1月0，还须将较差岁差、章动与光行差的效应一并加以改正，但这些改正值经常是可以略去的，只在改正了蒙气差之后的较差坐标上加入比较星对于1月0的平坐标，便得行星或彗星的平坐标.

对于照相观测，照片的归算需要三个定标的恒星. 岁差、章动以及由较差光行差和蒙气差而来的视场变形，在这种归算方式里均自动地消除掉了. 将这些照相位置归算到对1月0的定标星，便可直接用作轨道的计算.

重提一下：t时的平坐标提供t时观测者的位置和$t-\tau$时的行星的地心位置两者间的联线，τ是按下式(§60)算出的光行时差：

$$\tau=0^d.005774\Delta \tag{1}$$

如要将平位置改为几何位置，则在平坐标上须加入恒星的周年光行差. 这样求得的几何位置便是联接行星与观测者同在$t-\tau$时的位置.

这里所说的平位置是对于地面而不是对于地心的. 如地心距Δ还不知道，便不能计算周日视差(对于行星光行时差τ的改正也是这样). 因此在第一近似计算里，或不计入视差或将Δ取为一个近似的假定值. 一般令$\Delta=1$，不会有太大的误差，在进入第二近似值以前，则利用第一近似计算所提供的距离以推出视差与光行时差更确切的数值.

但是如果按纯粹几何的方式而引入太阳的位置时(例如高斯方法)，下面的设计便不需要作视差的计算. 在计算里我们不用太阳的地心坐标，而用其地面坐标. 方法是将其与由观测所提供的行星或彗星的粗略的地面坐标作几何的加合. 设以X, Y, Z表示太阳的地心赤道坐标，T表示观测时的地方恒星时，ρ与φ'表示观测者的地心坐标(见§18)，则太阳的地面赤道坐标的表达式为

$$X_1=X-\rho\cos\varphi'\cos P\sin\varpi_0$$
$$Y_1=Y-\rho\cos\varphi'\sin T\sin\varpi_0$$
$$Z_1=Z-\rho\sin\varphi'\sin\varpi_0$$

式内

$$\sin\varpi_0=\sin 8''.80=0.0000427$$

在用高斯方法的数字例子上，我们将使用到这些公式.

§93 预解的问题 I

I. 轨道上两三个位置间的关系；三角形的面积；椭圆轨道的高斯方程.

设以⊙表示太阳，P_1, P_2 与 P_3 表示行星或彗星的三个位置，并以 $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ 与 $x_3y_3z_3$ 表示其日心直角坐标. 以 S_1, S_2, S_3 分别表示 $\odot P_1P_2$, $\odot P_2P_3$, $\odot P_3P_1$ 三个三角形的面积. 我们将对这些坐标与面积建立一组重要的关系式.

由于 $P_1P_2P_3$ 的平面经过原点⊙，其坐标的行列式为零:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

展开之，得

$$x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) = 0.$$

括弧以内的量分别表示 S_2, S_3 与 S_1 三个面积在 yz 面上的射影. 故

$$\frac{y_2z_3 - y_3z_2}{y_1z_3 - y_3z_1} = \frac{S_2}{S_3}$$

$$\frac{y_1z_2 - y_2z_1}{y_1z_3 - y_3z_1} = \frac{S_1}{S_3}$$

由于这行列式也可对于其他两列而展开，便可得如下的三个关系式

$$\left.\begin{aligned} x_1\frac{S_2}{S_3} - x_2 + x_3\frac{S_1}{S_3} &= 0 \\ y_1\frac{S_2}{S_3} - y_2 + y_3\frac{S_1}{S_3} &= 0 \\ z_1\frac{S_2}{S_3} - z_2 + z_3\frac{S_1}{S_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这是高斯和奥耳伯斯两个方法的基本方程.

这些方程里含有三角形面积之比，需要求到它们的(至少是近似的)表达式. 为了计算这些比例，须将面积 S 展开为时间的函数. 为简化起见，假设轨道是对于它所在平面内的两个日心直角坐标轴而定. 令 P_0 与 P 为行星或彗星在 t_0 与 $t=t_0+\theta$ 两时刻的位置，x_0y_0 与 xy 为其坐标. 令 S 表示三角形 $P_0\odot P$ 的面积，而 Σ 表示两向径与轨道上的弧 P_0P 所围成的扇形的面积. 这两个面积的表达式为

$$\left.\begin{aligned} 2S &= x_0y - y_0x \\ 2\Sigma &= C\theta \end{aligned}\right\}$$

C 表示面积常数. 将 x 与 y 展开为时间的函数:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \theta\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + \frac{\theta^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 + \frac{\theta^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_0 + \frac{\theta^4}{4!}\left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)_0 + \cdots \\ y &= y_0 + \theta\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \frac{\theta^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 + \frac{\theta^3}{3!}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_0 + \frac{\theta^4}{4!}\left(\frac{d^4y}{dt^4}\right)_0 + \cdots \end{aligned}\right\}$$

便得 S 的展开式如下:

$$2S = \theta\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right]_0 + \frac{\theta^2}{2!}\left[x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right]_0 + \frac{\theta^3}{3!}\left[x\frac{d^3y}{dt^3} - y\frac{d^3x}{dt^3}\right]_0 + \frac{\theta^4}{4!}\left[x\frac{d^4y}{dt^4} - y\frac{d^4x}{dt^4}\right]_0 + \cdots$$

由面积定律，可知

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C$$

于是

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$x\frac{d^3y}{dt^3}-y\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x\frac{d^4y}{dt^4}-y\frac{d^4x}{dt^4}=2\left[\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3}\right]$$

又，牛顿引力的加速度在两轴上的射影的表达式为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{r^3}\qquad\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{ky}{r^3}$$

因此

$$\frac{d^3x}{dt^3}=-\frac{k}{r^3}\frac{dx}{dt}+\frac{3k}{r^4}x\frac{dr}{dt}\qquad\frac{d^3y}{dt^3}=\cdots$$

于是

$$x\frac{d^3y}{dt^3}-y\frac{d^3x}{dt^3}=-\frac{kC}{r^3}$$

$$x\frac{d^4y}{dt^4}-y\frac{d^4x}{dt^4}=\frac{6kC}{r^4}\frac{dr}{dt}$$

故三角形的面积展开为时间的函数有如下的形式：

$$2S=C\theta\left[1-\frac{k}{6}\frac{1}{r_0^3}\theta^2+\frac{k}{4}\frac{1}{r_0^4}\theta^3\left(\frac{dr}{dt}\right)_0+\cdots\right]\tag{2}$$

将这个结果应用于 $t_1t_2t_3$ 三时刻行星在空间的三位置 P_1, P_2, P_3 所定的三角形的面积；设 r_1, r_2, r_3 表示三向径，并令

$$t_2-t_1=\theta_1\qquad t_3-t_2=\theta_2\qquad t_3-t_1=\theta_3$$

这三个量都是正的.

由于关系式(2)，我们可以写出表示面积 S_1 与 S_2 的公式，将中间一个位置作为初始位置，即将向径 r_2 引入方程(2)得

$$\left.\begin{aligned}2S_1&=C\theta_1\left[1-\frac{k}{6}\frac{1}{r_2^3}\theta_1^2-\frac{k}{4}\frac{1}{r_2^4}\theta_1^3\left(\frac{dr}{dt}\right)_2+\cdots\right]\\2S_2&=C\theta_2\left[1-\frac{k}{6}\frac{1}{r_2^3}\theta_2^2+\frac{k}{4}\frac{1}{r_2^4}\theta_2^3\left(\frac{dr}{dt}\right)_2+\cdots\right]\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

至于面积 S_3，可以表示为向径 r_1 的函数：

$$2S_3=C\theta_3\left[1-\frac{k}{6}\frac{1}{r_1^3}\theta_3^2+\frac{k}{4}\frac{1}{r_1^4}\theta_3^3\left(\frac{dr}{dt}\right)_1+\cdots\right]$$

在所要的近似程度下，可以合理地假设：

$$\frac{1}{r_1^3}=\frac{1}{r_2^3}+\frac{3}{r_2^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)_2\theta_1$$

于是（在 4 阶项里使 $r_2=r_1$）

$$2S_3=C\theta_3\left[1-\frac{k}{6}\frac{1}{r_2^3}\theta_3^2+\frac{k}{4}\frac{1}{r_2^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)_2\theta_3^2(\theta_2-\theta_1)+\cdots\right]\tag{4}$$

由除法，(3)(4)两式提供我们所要计算的面积之比：

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_1}{S_3}&=\frac{\theta_1}{\theta_3}\left[1+\frac{k}{6}\,\frac{1}{r_2^3}\,(\theta_3^2-\theta_1^2)-\frac{k}{4}\,\frac{1}{r_2^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)_2\theta_2(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)+\cdots\right]\\\frac{S_2}{S_3}&=\frac{\theta_2}{\theta_3}\left[1+\frac{k}{6}\,\frac{1}{r_2^3}\,(\theta_3^2-\theta_2^2)+\frac{k}{4}\,\frac{1}{r_2^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)_2\theta_1(\theta_1\theta_3-\theta_2^2)+\cdots\right]\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

这些展开式一直到时间的第三阶项.

在相同的近似度,我们还可得着

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\theta_2}{\theta_1}\left[1-\frac{k}{6}\,\frac{1}{r_2^3}\,(\theta_2^2-\theta_1^2)+\frac{k}{4}\,\frac{1}{r_2^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)_2(\theta_2^3+\theta_1^3)+\cdots\right]\tag{6}$$

设只取这展开式第一项,即设

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\theta_2}{\theta_1},$$

则误差是对于时间的二阶项;但若观测的时间是等距的,则这误差降至三阶(见奥耳伯尔方法).

若要将计算准确到时间的三阶项,公式(5)与(6)是不合用的,因为它们中间有向径的导数.因而高斯方法只用到二阶项.若需要更好的近似值,则应当使用吉布斯(Gibbs)的公式,现将其推导于下.

仍以 $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ 表示 P_1, P_2, P_3 三个位置的日心坐标,将这些坐标展开为时间 θ 的函数,从中间一个观测时刻 t_2 起算,一直到 θ 的四阶项:

$$x=x_2\pm a\theta+b\theta^2\pm c\theta^3+d\theta^4\cdots$$

在牛顿引力场里,加速度在两轴的投影为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{r^3}\cdots$$

由此得有关 x 的 6 个方程如下:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x_2-a\theta_1+b\theta_1^2-c\theta_1^3+d\theta_1^4\\x_2&=x_2\\x_3&=x_2+a\theta_2+b\theta_2^2+c\theta_2^3+d\theta_2^4\\-\frac{kx_1}{r_1^3}&=2b-6c\theta_1+12d\theta_1^2\\-\frac{kx_2}{r_2^3}&=2b\\-\frac{kx_3}{r_3^3}&=2b+6c\theta_2+12d\theta_2^2\end{aligned}\right\}$$

若将前 3 式分别乘以 θ_2, $-\theta_3=-(\theta_1+\theta_2)$, θ_1 之后相加,便消掉 x_2 与 a. 由此得到的新方程只含未知量 b, c 与 d. 以相同的方法对待后面 3 个方程,便可消掉未知量 b 与 而得着一个只含 d 的方程.还须一个含 b, c 与 d 的第三方程,这可由后三式相加而得到.于是方程组转化为如下的形式:

$$\left.\begin{aligned}&\theta_2x_1-\theta_3x_2+\theta_1x_3=\theta_1\theta_2\theta_3[b+c(\theta_2-\theta_1)+d(\theta_1^2-\theta_1\theta_2+\theta_2^2)]\\&-\frac{k}{12}\left(\frac{\theta_2x_1}{r_1^3}-\frac{\theta_3x_2}{r_2^3}+\frac{\theta_1x_3}{r_3^3}\right)=\theta_1\theta_2\theta_3d\\&-\frac{k}{6}\left(\frac{x_1}{r_1^3}+\frac{x_2}{r_2^3}+\frac{x_3}{r_3^3}\right)=b+c(\theta_2-\theta_1)+2d(\theta_1^2+\theta_2^2)\end{aligned}\right\}$$

为了消去未知量 b, c, d, 将以上三式分别乘以 1, $\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2$, 和 $-\theta_1\theta_2\theta_3$ 之后,两端相

加,便得含 x 的方程如下:

$$\theta_2 x_1\left[1+\frac{k}{12}\,\frac{1}{r_1^3}(\theta_1\theta_3-\theta_2^2)\right]-\theta_3 x_2\left[1-\frac{k}{12}\,\frac{1}{r_2^3}(\theta_1\theta_2+\theta_3^2)\right]$$
$$+\theta_1 x_3\left[1+\frac{k}{12}\,\frac{1}{r_3^3}(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)\right]=0$$

或

$$\theta_2 x_1\left(1+\frac{\psi_1}{r_1^3}\right)-\theta_3 x_2\left(1-\frac{\psi_2}{r_2^3}\right)+\theta_1 x_3\left(1+\frac{\psi_3}{r_3^3}\right)=0 \tag{A}$$

式内设

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=\frac{k}{12}(\theta_1\theta_3-\theta_2^2)\\ \psi_2&=\frac{k}{12}(\theta_1\theta_2+\theta_3^2)\\ \psi_3&=\frac{k}{12}(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)\end{aligned}\right\}$$

在方程 A 内先以 y、后以 z 代 x, 便得到三个线性方程组, 其形状与这一节开始的方程组(1)相似. 这两个方程组的叠合,便提供吉布斯公式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_2}{S_3}&=\frac{\theta_2}{\theta_3}\,\frac{1+\dfrac{\psi_1}{r_1^3}}{1-\dfrac{\psi_2}{r_2^3}}\\ \frac{S_1}{S_3}&=\frac{\theta_1}{\theta_3}\,\frac{1+\dfrac{\psi_3}{r_3^3}}{1-\dfrac{\psi_3}{r_2^3}}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

公式(7)比公式(5)更加接近真实,且不含任何导数,但有 3 个向径. 这些公式在高斯方法求第二近似值时使用,其第一近似值的计算已经提供了这 3 个向径.

高斯方法的最后一次逼近,需要更近似的三角形面积的比值,高斯将这问题转化为

$$\gamma=\frac{\Sigma}{S}$$

即扇形与其对应的三角形两个面积之比的计算. 例如, 要计算 1 与 3 两极端位置和太阳所定的扇形与三角形之比 γ, 我们利用 § 83 里(椭圆运动的研究)所推导出的关系:

$$\left.\begin{aligned}r_1\cos v_1&=a(\cos u_1-e)\\ r_1\sin v_1&=a\sqrt{1-e^2}\sin u_1\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}r_3\cos v_3&=a(\cos u_3-e)\\ r_3\sin v_3&=a\sqrt{1-e^2}\sin u_3\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r_1}\cos\frac{v_1}{2}&=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{u_1}{2}\\ \sqrt{r_1}\sin\frac{v_1}{2}&=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{u_1}{2}\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\sqrt{r_3}\cos\frac{v_3}{2}&=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{u_3}{2}\\ \sqrt{r_3}\sin\frac{v_3}{2}&=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{u_3}{2}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}r_1&=a(1-e\cos u_1)\qquad & r_3&=a(1-e\cos u_3)\\ u_1-e\sin u_1&=M_1 & u_3-e\sin u_3&=M_3\end{aligned} \tag{10}$$

令 $\qquad t_3-t_1=\theta_3\qquad u_3-u_1=2g\qquad \chi_3=\sqrt{2r_1r_3}\cos\dfrac{v_3-v_1}{2}$

则用已知数据可以计算 χ_3 一量,因为

$$\chi_3=r_1r_3+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3$$

而 χ_3 的符号与 $\cos\frac{v_3-v_1}{2}$ 的符号相同.

扇形的面积可以写为下列三个形状之一:

$$2\Sigma_3=C\theta_3=na^2\sqrt{1-e^2}\,\theta_3=a^2\sqrt{1-e^2}(M_3-M_1)$$

从开普勒方程取出 M, 最后一式还可写为

$$2\Sigma_3=a^2\sqrt{1-e^2}\,[2g-e(\sin u_3-\sin u_1)]$$

至于三角形的面积可从关系式(8),两端互相叉乘相加而求得

$$2S_3=r_1r_3\sin(v_3-v_1)=a^2\sqrt{1-e^2}\,[\sin 2g-e(\sin u_3-\sin u_1)]$$

以上二式之差

$$\Sigma_3-S_3=\frac{a^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,(2g-\sin 2g) \tag{11}$$

这式的右端含三个未知数: a, e 与 u. 由以下的计算可以消去其前面两个. 组合 (9) 与 (10)两式,可得

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{r_1r_3}\sin\frac{v_3-v_1}{2}=a\sqrt{1-e^2}\sin g\\&\sqrt{r_1r_3}\cos\frac{v_3-v_1}{2}=\frac{\chi_3}{\sqrt{2}}=a\left(\cos g-e\cos\frac{u_3+u_1}{2}\right)\\&\frac{1}{2}(r_1+r_3)=a\left(1-e\cos g\cos\frac{u_3+u_1}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

由(12)式的前两式相乘,便得三角形面积的另一表达式:

$$S_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_3a\sqrt{1-e^2}\sin g \tag{13}$$

以(13)式除(11)式消去 e 而得

$$\gamma-1=\frac{a}{\chi_3\sqrt{2}}\,\frac{2g-\sin 2g}{\sin g} \tag{14}$$

但从方程(13)可推出一个含扇形面积的公式,即取(13)式两端的平方,并代 $a(1-e^2)$, 以

$$p=\frac{C^2}{k}=\frac{4\Sigma_3^2}{k\theta_3^2}$$

即得

$$S_3^2=\frac{1}{2}\chi_3^2ap\sin^2 g=2\chi_3^2a\,\frac{\Sigma_3^2}{k\theta_3^2}\sin^2 g$$

于是

$$\gamma^2=\frac{k\theta_3^2}{2\chi_3^2a\sin^2 g} \tag{15}$$

将(14)与(15)两式相乘,消去 a, 更令

$$m=\frac{k\theta_3^2}{2\sqrt{2}\,\chi_3^3}$$

这是可用已知数据求得的量,于是得方程式:

$$\gamma^3-\gamma^2=m\,\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g} \tag{16}$$

这式里的未知量只有 γ 与 g. 为了推导另一个含这两个未知量的关系式,在关系式(12)后面两式子里消去 e, 得

$$a\sin^2 g=\chi_3\sqrt{2}\left(l+\sin^2\frac{g}{2}\right)$$

其中
$$l=\frac{r_1+r_3}{2\sqrt{2}\,\chi_3}-\frac{1}{2}$$
为另一未知量．于是方程(15)写为
$$\gamma^2=\frac{m}{l+\sin^2\frac{g}{2}} \tag{17}$$

γ 的计算转化为方程(16)与(17)的求解，未知量是代数的，而 g 则不是代数未知量．这些方程是精确的．但 γ 的数值只能用逐渐逼近法，去寻求到所欲得的位数．下面是高斯提出的解法

令
$$\sin^2\frac{g}{2}=\rho$$
则
$$\cos g=1-2\rho \qquad \sin^2 g=4\rho(1-\rho)$$
故
$$2g-\sin 2g=\frac{1}{6}\sin^3 2g+\frac{3}{40}\sin^5 2g+\frac{5}{112}\sin^7 2g+\frac{35}{1152}\sin^9 2g+\cdots$$
$$\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}=\frac{4}{3}\cos^3 g+\frac{12}{5}\sin^2 g\cos^5 g+\frac{40}{7}\sin^4 g\cos^7 g+\frac{140}{9}\sin^6 g\cos^9 g+\cdots$$
$$=\frac{4}{3}(1-2\rho)^3+\frac{48}{5}\rho(1-\rho)(1-2\rho)^5+\frac{640}{7}\rho^2(1-\rho)^2(1-2\rho)^7$$
$$+\frac{8960}{9}\rho^3(1-\rho)^3(1-2\rho)^9+\cdots=\frac{4}{3}\left[1+\frac{6}{5}\rho+\frac{48}{35}\rho^2+\frac{32}{21}\rho^3+\cdots\right]$$
第 p 项的表达式为
$$\frac{4\cdot 6\cdots(2p+2)}{3\cdot 5\cdots(2p+1)}\rho^{p-1}$$
高斯指出以上一量的倒数的展开式收敛得更迅速，于是据除法或据未定系数法：
$$\frac{\sin^3 g}{2g-\sin 2g}=\frac{3}{4}-\frac{9}{10}\rho+\frac{9}{175}\rho^2+\frac{26}{875}\rho^3+\cdots=\frac{3}{4}-\frac{9}{10}(\rho-\xi)$$
其中
$$\xi=\frac{2}{35}\rho^2+\frac{52}{1575}\rho^3+\cdots$$
函数 ξ，对于时间为第四阶，曾经高斯对于在 0 与 0.6 之间的 ρ 编为数字表；但由下表容易明白，ρ 与 ξ 只能有很小的数值：

ρ	u_3-u_1	$\xi\cdot 10^7$
0.000	0°00	0
1	7.24	1
2	10.25	2
3	12.56	5
4	14.50	9
5	16.22	14
6	17.77	21
7	19.20	28
8	20.53	37
9	21.77	47
0.010	22.96	58

在这以后，再回到方程(16)与(17)：

$$\gamma^3-\gamma^2=\frac{m}{\frac{3}{4}-\frac{9}{10}(\rho-\xi)}$$

$$\gamma^2=\frac{m}{l+\rho}$$

由此消去 ρ 的一阶项得如下的方程，它仍然是超越的，因为 h 里还含有 $\xi(\rho)$ 一项

$$\gamma^3-\gamma^2-h\gamma-\frac{h}{9}=0 \tag{18}$$

式内
$$h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi}=\frac{k\theta_3^2}{\chi_3^2\left[r_1+r_3+\frac{2\sqrt{2}}{3}\chi_3(1+3\xi)\right]}$$

设已知 h 的数值，则方程(18)(高斯方程)变为代数的．当 $h<0.02$ 时，下列展开式提供出 γ 的实根：

$$\gamma=1+\frac{10}{9}h-\frac{100}{81}h^2+\frac{2410}{729}h^3-\frac{65910}{6561}h^4+\cdots$$

附表 XXXVI 提供对于 $h<0.15$ 时，由内插法以求 γ 之值．

但 h 的表达式里，含有 ξ 这一个未知数值的量，因为 ξ 是 ρ 的函数，而

$$\rho=\sin^2\frac{u_3-u_1}{4}$$

开始计算时，还不知道它的数值．幸而这数值很小，在第一近似计算里可以将其略去．因此，设 $\xi=0$，先算出 h 的一个暂用值，然后推出 γ 的一个近似值，再由下式求：

$$\rho=\frac{m}{\gamma^2}-l$$

我们就这样决定 ξ(附表 XXXVI 提供 $1+3\xi$ 那个数量)．于是挨次得 h 的第二值，γ 的第二值和 ρ 的更确切的数值．若与这个 ρ 对应的 ξ 的数值，与用以作计算的 ξ 没有什么差异，则 γ 的第二值便为确定．否则，如法重新计算，逐渐逼近，直到最后解，与其前一解相同时为止．

向径间的夹角很少超过 30° 或 40°．若这个角接近 180°，则比值 γ 无限增长；若 v_3-v_1 超过 180°，则 γ 变为负数．高斯方程仍然保存它的意义，但决定轨道根数问题的逐渐逼近法不再具有收敛性了．

现将对高斯方程求数字解的公式汇集于下：

$$\gamma^3-\gamma^2-h\gamma-\frac{h}{9}=0$$

$$h=\frac{h\theta_3^2}{\chi^2\left[r_1+r_3+\frac{2\sqrt{2}}{3}\chi(1+3\xi)\right]}$$

$$\chi^2=r_1r_3+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3$$

$$\rho=\frac{m}{\gamma^2}-l$$

$$l=\frac{r_1+r_3}{2\sqrt{2}\chi_3}-\frac{1}{2}$$

$$m=\frac{k\theta_3^2}{2\sqrt{2}\chi_3^3}$$

§94 预解的问题 II

II. 轨道上连续两位置的其他关系；抛物线轨道的欧勒方程

同上设 $x_1y_1z_1$ 与 $x_3y_3z_3$ 为 t_1 与 t_3 时行星或彗星连续两位置的日心坐标. 以 S_3 表示三角形 $\odot P_1P_3$ 的面积，则

$$2S_3 = r_1r_3\sin(v_3-v_1)$$

r_1 与 r_3 表示两位置的向径，v_1 与 v_3为其真近点角. 还有

$$r_1r_3\cos(v_3-v_1)=x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3$$

从而

$$\left.\begin{aligned}\sin(v_3-v_1)&=\frac{2S_3}{r_1r_3}\\ \cos(v_3-v_1)&=\frac{x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3}{r_1r_3}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

另外，无论轨道的性质，总有

$$\left.\begin{aligned}e\cos v_1&=\frac{p}{r_1}-1=d_1\\ e\cos v_3&=\frac{p}{r_3}-1=d_3\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

上两式先减后加，可得

$$\left.\begin{aligned}e\sin\frac{v_3+v_1}{2}\sin\frac{v_3-v_1}{2}&=\frac{p}{2}\,\frac{r_3-r_1}{r_1r_3}=\frac{1}{2}(d_1-d_3)\\ e\cos\frac{v_3+v_1}{2}\cos\frac{v_3-v_1}{2}&=\frac{p}{2}\,\frac{r_3+r_1}{r_1r_3}-1=\frac{1}{2}(d_1+d_3)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

因此

$$\tan\frac{v_3+v_1}{2}=\frac{d_1-d_3}{d_1+d_3}\cot\frac{v_3-v_1}{2}\tag{4}$$

若 p 和 v_3-v_1 已知时，则可用这一式分别计算 v_1 与 v_3; 跟着得

$$e=d_1\sec v_1=d_3\sec v_3\tag{5}$$

设 χ_3 的规定如上节那样，则可检验如下的关系:

$$\tan\frac{v_3+v_1}{2}=\frac{r_3-r_1}{r_3+r_1-2\dfrac{r_1r_3}{p}}\;\frac{\chi_3^2}{2S}$$

设 c 为联接 1 与 3 两位置的弦，则在一切的情形都有

$$c^2=r_1^2+r_3^2-2r_1r_3\cos(v_3-v_1)$$

于是

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\frac{v_3-v_1}{2}&=\frac{(r_3+r_1)^2-c^2}{4r_1r_3}\\ \sin^2\frac{v_3-v_1}{2}&=\frac{c^2-(r_3-r_1)^2}{4r_1r_3}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

故

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{v_3-v_1}{2}&=\pm\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{r_1r_3}}\\ \sin\frac{v_3-v_1}{2}&=\frac{\gamma\delta}{2\sqrt{r_1r_3}}\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式内设
$$\alpha=\sqrt{r_1+r_3+c} \qquad \gamma=\sqrt{c-r_1+r_3}$$
$$\beta=\sqrt{r_1+r_3-c} \qquad \delta=\sqrt{c+r_1-r_3}$$

由此可见
$$4S-\alpha\beta\gamma\delta$$
这是据初等几何学，由三边之长求三角形面积的定理而得来的.

若轨道是抛物线，我们还可将 $\sin\frac{v_3-v_1}{2}$ 表为根式 α 与 β 和近日距 q 的函数，因为在这一情形，
$$\cos\frac{v_1}{2}=\sqrt{\frac{q}{r_1}} \qquad \cos\frac{v_3}{2}=\sqrt{\frac{q}{r_3}}$$
$$2\cos\frac{v_1}{2}\cos\frac{v_3}{2}=\cos\frac{v_3+v_1}{2}+\cos\frac{v_3-v_1}{2}=\frac{2q}{\sqrt{r_1r_3}}$$

若以 $\cos\frac{v_3-v_1}{2}$ 乘此方程，更与(3)的第二式
$$\cos\frac{v_3+v_1}{2}\cos\frac{v_3-v_1}{2}=q\,\frac{r_1+r_3}{r_1r_3}-1$$

联系，便得
$$q=\frac{r_1r_3\sin^2\frac{v_3-v_1}{2}}{r_1+r_3-2\sqrt{r_1r_3}\cos\frac{v_3-v_1}{2}}$$

求抛物线轨道时将用到这个公式. 这式又可写为
$$q=\frac{\gamma^2\delta^2}{2(\alpha\mp\beta)^2}=\frac{1}{4}\,\frac{c^2(r_3-r_1)^2}{r_1+r_3\mp\sqrt{(r_1+r_3)^2-c^2}}$$

由此便得所寻求的关系式:
$$\sin\frac{v_3-v_1}{2}=\sqrt{\frac{q}{2r_1r_3}}\,(\alpha\mp\beta)$$

对于 $v_3-v_1<180°$ 的情形使用负号，对于 $180°<v_3-v_1<360°$ 的情形使用正号(这是很少有的情形).

现在推导抛物线轨道的欧勒方程. 在§85的方程1里，设 $m=1$，则得两观测相距的时间 $\theta_3=t_3-t_1$ 与真近点角 v_1 和 v_3 之间的一个关系:
$$\frac{\sqrt{2k}}{2q^{3/2}}\theta_3=s_3-s_1+\frac{1}{3}(s_3^3-s_1^3)=\frac{1}{3}(s_3-s_1)(3+s_1^2+s_3^2+s_1s_3)$$
$$=\frac{\sin\frac{v_3-v_1}{2}}{3\cos\frac{v_1}{2}\cos\frac{v_3}{2}}\left[\frac{1}{\cos^2\frac{v_1}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{v_3}{2}}+\frac{\cos\frac{v_3-v_1}{2}}{\cos\frac{v_1}{2}\cos\frac{v_3}{2}}\right]$$

将式内的正弦与余弦改换为其上面所推导出的关系式，便得
$$\frac{\sqrt{2k}}{2q^{3/2}}\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{12q^{3/2}}(\alpha\mp\beta)(2r_1+2r_3\pm\alpha\beta)$$

简化之后得
$$6\sqrt{k}\,\theta_3=\alpha^3\mp\beta^3=(r_1+r_3+c)^{3/2}\mp(r_1+r_3-c)^{3/2} \tag{8}$$

这是欧勒方程. 它以 $\odot C_1C_3$ 三角形三边的函数，表达一个抛物线轨道的彗星从一点 C_1 到另一点 C_3 所需的时间. 朗伯尔证明一个更广泛、可以应用于任何轨道的类似公式，但以其很少使用，不在这里推导了.

在天文学的单位制里，方程(8)内的时间的系数的数值为

$$6\sqrt{k}=0.10321259$$

这以后我们假设 v_3-v_1 角小于半圆周，因而公式(8)里采用负号.

奥耳伯尔方法里的一个方程就是对于 c 去解方程(8). 在求解的设计中，下面叙述的是恩克的方法. 设

$$z=\frac{c}{r_1+r_3}$$

(8)式可写为

$$6\sqrt{k}\,\theta_3=(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}\left[(1+z)^{\frac{3}{2}}-(1-z)^{\frac{3}{2}}\right]$$

或

$$\frac{2\sqrt{k}\,\theta_3}{(r_1+r_3)^{3/2}}=z\left(1-\frac{1}{24}z^2-\frac{1}{128}z^4-\frac{3}{1024}z^6-\cdots\right)$$

设以左端为 φ，并将这级数反演，便得

$$\varphi=\frac{2\sqrt{k}\,\theta_3}{(r_1+r_3)^{3/2}}$$

$$z=\varphi\left(1+\frac{1}{24}\varphi^2+\frac{5}{384}\varphi^4+\frac{59}{9216}\varphi^6+\cdots\right)$$

$$z=\varphi f(\varphi)$$

f 表示缓慢增长的 φ 的函数，常接近于 1，其数字表见本书附表 XXXVII[1].

将 k 的数值代入，再回到原来的符号，便得下列两个关系，将于 § 99 内使用:

$$\left.\begin{aligned}c&=\frac{2\sqrt{k}\,\theta_3}{\sqrt{r_1+r_3}}f(\varphi)=0.03440420\frac{\theta_3}{\sqrt{r_1+r_3}}f(\varphi)\\ \varphi&=\frac{2\sqrt{k}\,\theta_3}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}=0.03440420\frac{\theta_3}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

§ 95 预解的问题 III

III. 为轨道上两点或一点与该点的速度所决定的轨道根数

为了避免以后重复计，我们现在讨论决定轨道的任何方法都要用到的一个问题: 已知 t_1 与 t_3 两个时刻天体的日心坐标，求它的轨道根数. 可是，若使用拉普拉斯方法，这两个位置应当看做是无限地接近，于是要解决的问题成了这样: 已知 t 时天体对于日心坐标轴的位置与速度，求它的轨道根数. 我们将于这一节后半段加以讨论.

设 t_1 与 t_3 时天体的日心黄道坐标为 $x_1y_1z_1$ 与 $x_3y_3z_3$. 仍以 S_3 表示三角形 $\odot P_1P_3$ 的面积. 由于两个面间的角等于其法线间的角，容易证明这面积在三个坐标面上的投影 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 满足下列的关系:

$$\left.\begin{aligned}2\sigma_1&=x_1y_3-x_3y_1=2S_3\cos i\\ 2\sigma_2&=y_1z_3-y_3z_1=2S_3\sin i\sin\Omega\\ 2\sigma_3&=z_3x_1-z_1x_3=2S_3\sin i\cos\Omega\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

---

1) 若没有这样的表，可利用以下的公式计算: 设 ξ 与 η 为两个辅助量，其定义为

$$\sin 3\xi=\frac{3\sqrt{2}}{4}\varphi\qquad \sin\eta=\sqrt{2}\sin\xi\qquad f=\frac{\sin 2\eta}{\varphi}$$

可见 φ 不能大于 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，而对应的 $f(\varphi)$ 之值是 $\frac{3\sqrt{2}}{4}=1.060660$，即其极大值. 它对应于 $z=1$.

为了肯定 σ_3 的符号,须注意围绕 $\odot y$ 的转动是由 $\odot x$ 向 $\odot z$.

方程组(1)的解是容易求得的,即

$$\tan\Omega=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

$$\tan i=\pm\frac{\sqrt{\sigma_2^2+\sigma_3^2}}{\sigma_1}$$

根据 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 三量的符号并注意 $\sin i$ 常是正数,这两个角所在的象限是容易决定的. 若 i 的数值超过 $90°$,则轨道是逆行的.

另外

$$\left.\begin{aligned}\sin(v_3-v_1)&=\frac{2S_3}{r_1r_3}=\frac{2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}}{r_1r_3}\\ \cos(v_3-v_1)&=\frac{x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3}{r_1r_3}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这两式保证在一切情形 v_3-v_1 之差的数值均可得到好的决定.

§87 里第(4)式提供如下两式:

$$\left.\begin{aligned}r\sin(v+\omega)&=\frac{z}{\sin i}=\frac{-x\sin\Omega+y\cos\Omega}{\cos i}\\ r\cos(v+\omega)&=x\cos\Omega+y\sin\Omega\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

由此可得 $v_1+\omega$ 与 $v_3+\omega$ 两角的数值. 为核对起见,可由此求对应的 v_3-v_1 的数值,而看它是否与以上所得的相同.

若轨道是抛物线(奥耳伯尔方法),我们利用下列的公式或与其等效的公式 ($v_3-v_1<180°$):

$$q=\frac{r_1r_3\sin^2\frac{v_3-v_1}{2}}{r_1+r_3-2\sqrt{r_1r_3}\cos\frac{v_3-v_1}{2}}$$

然后从下式得 v_1 与 v_3:

$$\left.\begin{aligned}\cos v_1&=\frac{2q}{r_1}-1\\ \cos v_3&=\frac{2q}{r_3}-1\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

但更好是据 §94 的(3)或(4)式计算 $\frac{v_3+v_1}{2}$, 然后推出 v_1, v_3 与 ω. 余下的还要决定彗星过近日点的时刻 T. 由 §85 得

$$\left.\begin{aligned}t-T&=1^{\text{d}}\!.0961558q^{3/2}\mathfrak{M}(s)\\ \mathfrak{M}(s)&=75s+25s^3\\ s=\tan\frac{v}{2}&=\sqrt{\frac{r}{q}-1}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

由这些关系式得出 T.

现在讨论椭圆轨道的情形. 由 §93 得知面积常数:

$$C=\frac{2\Sigma_3}{\theta_3}=\frac{2S_3\gamma_3}{\theta_3}$$

Σ_3 表示扇形的面积, γ_3 表示扇形与三角形的面积之比.

如上所述,解高斯方程:

$$\gamma^3-\gamma^2-h\gamma-\frac{h}{9}=0$$

便可得 $\gamma_3=\frac{\Sigma_3}{S_3}$. 然后容易计算参量

$$p=\frac{C^2}{k}$$

由 § 94 里方程(4)可以计算两真近角之半和:

$$\tan\frac{v_3+v_1}{2}=\frac{d_1-d_3}{d_1+d_3}\cot\frac{v_3-v_1}{2} \tag{6}$$

既知 v_1, v_2 与 ω, 更由 § 94 里(5)式计算 e. 然后按如下方式完成计算:

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{p}{1-e^2}\\ n&=3548''.18761a^{-\frac{3}{2}}=0^\circ.98560767a^{-\frac{3}{2}}\\ \tan\frac{u}{2}&=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{v}{2}\\ M&=u-e\sin u\\ M_0&=M+n(t_0-t)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

t_0 表示为计算平近点角而取的历元. 计算 t_1 与 t_3 两期的 u 与 M 之时, 得到两个 M_0, 应当是等值的.

为了计算双曲线轨道,亦可发展一个类似的方法,但不在这里叙述.

现在讨论拉普拉斯方法的情形. 假设已知 t 时行星的日心黄道直角坐标与这些坐标对于 t 的一次导数. 先计算面积常数在三个坐标面上的投影, 其运转的方向如上面所规定的

$$\left.\begin{aligned}c_1&=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C\cos i\\ c_2&=y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=C\sin i\sin\Omega\\ c_3&=x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}=C\sin i\cos\Omega\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}\tan\Omega&=\frac{c_2}{c_3}\\ \tan i&=\pm\frac{\sqrt{c_2^2+c_3^2}}{c_1}\\ C&=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\\ p&=\frac{C^2}{k}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

根据下式(§ 82 里所推得的)可以计算偏心率:

$$e^2=1-p\left(\frac{2}{r}-\frac{V^2}{k}\right) \tag{10}$$

式内

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

再据下式计算真近点角:

$$e\cos v=\frac{p}{r}-1$$

但由此定出的 v 的数值可能不好．更好是先计算一个辅助角 β，即速度与向径的法线间之角(见 § 82 的(11)式)容易得知

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta&=\frac{x\dfrac{dx}{dt}+y\dfrac{dy}{dt}+z\dfrac{dz}{dt}}{rV}\\ \sin v&=\frac{p}{er}\tan\beta \quad 或 \quad \tan v=\frac{p}{p-r}\tan\beta\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

若偏心率小，则由 10 式所算出的数值不很精确；但可由表 $\tan v$ 的公式先求得 v，然后由下式之一去计算 e：

$$\left.\begin{aligned}e\cos v&=\frac{p}{r}-1\\ e\sin v&=\frac{p}{r}\tan\beta\end{aligned}\right\}$$

以上的公式都适用于普遍的情形．

在椭圆轨道的情形($e<1$)，可按如下的次序计算：

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{p}{1-e^2}\\ n&=3548''.18761a^{-3/2}=0^\circ.985607669a^{-3/2}\\ \sin u&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\tan\beta\end{aligned}\right\}$$

这里由方程组(3)可以求得 ω，由开普勒方程得 M．

若轨道是抛物线，则有方程式：

$$V^2=\frac{2k}{r}$$

立刻可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{v}{2}=\beta \qquad s=\tan\beta\\ &q=\frac{p}{2}\\ &t-T=1^d.0961558q^{\frac{3}{2}}\mathfrak{M}(s)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

最后，对于双曲线轨道，先算近日距：

$$q=\frac{p}{1+e}$$

过近日点后的时间，可由 § 85 的(6)式求得

$$\left.\begin{aligned}&s=\tan\frac{v}{2} \qquad \lambda=-\frac{e-1}{e+1}\\ &t-T=82^d.211686q^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda}\left[s+\frac{s^3}{3}-2\lambda\left(\frac{s^3}{3}+\frac{s^5}{5}\right)+3\lambda^2\left(\frac{s^5}{5}+\frac{s^7}{7}\right)\cdots\right]\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

§ 96 用高斯方法计算椭圆轨道

计算轨道根数的高斯方法，是根据相隔几个星期的 3 个观测位置，基本上这是一种逐

渐逼近的方法，优点是前一步近似计算为下一步作了准备．虽然这些近似值不一定收敛得很迅速，但每一步的数字计算并不很繁复．由于高斯方法有这种特性，所以一个世纪以来计算者乐于使用．

使用黄道坐标，并无特殊利益(自然在最后计算 Ω, ω 与 i 等轨道根数时必需使用黄道坐标)，因此，在开始时，我们暂且使用日心赤道坐标．设以 x, y, z 表示行星或彗星的日心坐标；X, Y, Z 表示太阳的地心坐标(这可在天文年历内找得)．更以下标 1, 2, 3 分别表示 t_1, t_2, t_3 三个时刻的坐标，且以 λ, μ, ν 表示行星或彗星由观测而得的方向余弦：

$$\left.\begin{aligned} x&=\Delta\cos\delta\cos\alpha-X=\lambda\Delta-X\\ y&=\Delta\cos\delta\sin\alpha-Y=\mu\Delta-Y\\ z&=\Delta\sin\delta\qquad\quad\ -Z=\nu\Delta-Z\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这里可将 X, Y, Z 选为以观测地点为原点的数值 (见 § 92)，以避免再作周日视差的改正．

这三个位置的日心坐标与三个三角形的面积的线性关系(见 § 93)，表达如下：

$$\left.\begin{aligned} x_1\frac{S_2}{S_3}-x_2+x_3\frac{S_1}{S_3}&=0\\ y_1\frac{S_2}{S_3}-y_2+y_3\frac{S_1}{S_3}&=0\\ z_1\frac{S_2}{S_3}-z_2+z_3\frac{S_1}{S_3}&=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

用(1)式，展开方程组(2)：

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\Delta_1\frac{S_2}{S_3}-\lambda_2\Delta_2+\lambda_3\Delta_3\frac{S_1}{S_3}&=\frac{S_2}{S_3}X_1-X_2+\frac{S_1}{S_3}X_3=L\\ \mu_1\Delta_1\frac{S_2}{S_3}-\mu_2\Delta_2+\mu_3\Delta_3\frac{S_1}{S_3}&=\frac{S_2}{S_3}Y_1-Y_2+\frac{S_1}{S_3}Y_3=M\\ \nu_1\Delta_1\frac{S_2}{S_3}-\nu_2\Delta_2+\nu_3\Delta_3\frac{S_1}{S_3}&=\frac{S_2}{S_3}Z_1-Z_2+\frac{S_1}{S_3}Z_3=N\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

这一方程组可以解为下列的形式：

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_2}{S_3}\Delta_1&=a_1L+b_1M+c_1N\\ \Delta_2&=a_2L+b_2M+c_2N\\ \frac{S_1}{S_3}\Delta_3&=a_3L+b_3M+c_3N\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式内设

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\frac{\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2}{D} & b_1&=\frac{\nu_2\lambda_3-\nu_3\lambda_2}{D} & c_1&=\frac{\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2}{D}\\ a_2&=\frac{\mu_1\nu_3-\mu_3\nu_1}{D} & b_2&=\frac{\nu_1\lambda_3-\nu_3\lambda_1}{D} & c_2&=\frac{\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1}{D}\\ a_3&=\frac{\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1}{D} & b_3&=\frac{\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1}{D} & c_3&=\frac{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{D}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{vmatrix}$$

公式(5)内的量皆是已知数,可以容易地计算出来. 这些数值将不须修改而用于以下的一切近似计算里,这便是高斯方法最显著的一个优点.

若已知面积的比例的数值,则 L, M, N 之值亦可计算而使问题完全得到解决. 我们将按如下的演算步骤,用逐渐逼近法来计算这些比例的数值.

第一近似值　上面已经证明,准确至时间的二阶项,有如下的公式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_1}{S_3}&=\frac{\theta_1}{\theta_3}\left[1+\frac{k}{6r_2^3}(\theta_3^2-\theta_1^2)\right]=A_1+\frac{B_1}{r_2^3}\\\frac{S_2}{S_3}&=\frac{\theta_2}{\theta_3}\left[1+\frac{k}{6r_2^3}(\theta_3^2-\theta_2^2)\right]=A_2+\frac{B_2}{r_2^3}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

A, B 等数可以立即算出,只是须知道光行时差. 在第一近似算时可略去地心距的光行时差改进,到第二近似算时才计算进去.

现在利用(6)式,将 L, M, N 三量写为如下的形式(亦准确到时间的二阶项):

$$L=L_1+\frac{L_2}{r_2^3}\qquad M=M_1+\frac{M_2}{r_2^3}\qquad N=N_1+\frac{N_2}{r_2^3}$$

这些系数也是已知数(同上其中仍有光行时差为未知数).

最后,方程组(4)的第二式可写为如下的形式:

$$\Delta_2=P+\frac{Q}{r_2^3}\tag{7}$$

P, Q 二量可以由观测数据而计算得到.

由下列的关系,可以写出另外一式:

$$r_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2$$

最后解决本问题的两个方程为

$$\left.\begin{aligned}r_2^3&=\frac{Q}{\Delta_2-P}\\r_2^2&=\Delta_2^2-2\Delta_2(\lambda_2X_2+\mu_2Y_2+\nu_2Z_2)+R_2^2\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

求方程组(8)的代数解是很困难的, 比较容易的步骤是用内插法去求 Δ_2 的数值: 以期求得 Δ_2, 代入(8)式后提供相同的 r_2. 以下一节(§97)我们将在一数字例子里表明这一试解的过程.

既得 Δ_2 与 r_2 的数值以后, 再依此计算 L, M, N 与 Δ_1 和 Δ_3. 进入第二近似值计算之先,可用下式计算行星光行差:

$$\tau=0^{\mathrm{d}}.005774\Delta$$

用这一数字改正了 t 之后,便可得出 θ 的更近似的数值.

第二近似值　在第一近似计算里既已算出地心距离与向径,现在可用比(6)式更精确的吉布斯公式计算三角形面积之比的新数值.

我们首先计算以下三量:

$$\psi_1=\frac{k}{12}(\theta_1\theta_3-\theta_2^2)\qquad\psi_2=\frac{k}{12}(\theta_1\theta_2+\theta_3^2)\qquad\psi_3=\frac{k}{12}(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)$$

然后计算面积之比:

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\theta_1}{\theta_3}\,\frac{1+\dfrac{\psi_3}{r_3^3}}{1-\dfrac{\psi_2}{r_2^3}}\qquad\qquad\frac{S_2}{S_3}=\frac{\theta_2}{\theta_3}\,\frac{1+\dfrac{\psi_1}{r_1^3}}{1-\dfrac{\psi_1}{r_2^3}}$$

将这些数值代入 L, M, N 的表达式里，便得它们的比以前更近似的数值，于是(4)式便提供地心距 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 的另一组新数值，从而更算出一组新的向径.

这些新数值再依次代入吉布斯公式，一般给出一组与前稍微不同的面积之比．以上演算的步骤可以重复一至几遍，直到某一次与其前一次的结果相同而止．但是由于吉布斯公式也只是近似的，一般只用第一试的结果，而将在第三近似计算里去对解答作确定的调整.

第三近似值 使用§93里的符号，扇形 Σ_3 与三角形 S_3 的面积之比 γ_3 为高斯方程所给出：

$$\gamma_3^3-\gamma_3^2-h_3\gamma_3-\frac{h_3}{9}=0 \tag{9}$$

式内

$$h_3=\frac{k\theta_3^2}{\chi_3^2\left[r_1+r_3+\frac{2\sqrt{2}}{3}\chi_3(1+3\xi_3)\right]}$$

$$\chi_3^2=r_1r_3+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3$$

对应于时刻 θ_1 与 θ_2 的面积比 γ_1 与 γ_2 只藉轮换下标得来的同样的方程而求出.

将第二近似计算求得的向径与坐标之值代入上式，则得面积比的新值．然后将这些新值代入 L, M, N 的表达式和方程组(4)里去，于是得出比以前更近似的一组地心距与向径．在第一试里，ξ 量可以略去.

将这些向径的新数值依次代入高斯方程，这次计入 ξ，便提供一个新解，而可作为第三试的出发点，象这样的计算重复下去．由于吉布斯方法的局限性，可以不必将其推进到底，但是利用方程(9)的演算却可以重复下去，直到某一次的结果大约与前一次的相近为止；因为方程(9)是精确的，它所给出的面积比，可以达到所有的精度.

获得最后解之时，便容易计算坐标 x_1, y_1, z_1 与 x_3, y_3, z_3，于是问题转化为§95里所讨论的问题了.

为检验结果起见，自然可用求得的根数去计算 t_1, t_2, t_3 三个时刻的行星的位置，在计算时更计入行星的光行差与视差．这些由计算而得的位置应该与观测的位置密合到数字计算所能达的精度．原来用以计算根数的1与3两位置的坐标，其计算值应与观测值相合，至于第2位置，如果高斯方程的解进行到底(第三近似计算)，亦应由计算得到相同的近似值.

还该提到，不应相信由三个观测算出的根数是确定了的．确定的根数应能表达小行星在同一次冲里或彗星在同一次出现里的一切观测[1]．因此，根据三次观测所定出的根数不能很准确地表达事实，而且观测里还具有各种偶然误差．所以用高斯方法所得的结果，还应利用较差改正法尽量减少相当于全部的 $o-c$ 的离差(最小二乘法)，以求得这些根数的改进.

若天体的黄经为零，则高斯方法失效，因为方程组(4)的行列式为零了．为了避免这一不定的情形，便应采用第4个观测，即使在星的黄径小、而非零时，亦应当这样做.

---

1) 这里还须计入行星的摄动(见十二章).

§ 97 高斯方法的数字应用

据约翰内斯堡天文台(东经: $1^h52^m18^s$, 南纬: $26°10'52''$) 对于 1342 号小行星 (Brabantia)的三次照相观测, 计算其暂时的轨道根数:

1	1935 年 2 月 13.05561	世界时	10^h	25^m	$28^s.39$	$-5°$	$27'$	$18''.7$		
2	2 月 28.90839		10	1	58.85	-8	39	1.1		1935.0
3	3 月 9.96207		9	49	14.92	-9	54	48.0		

1. 太阳的地面坐标

根据天文年历的表用内插法求得观测三个时刻太阳的直角坐标为

	1.	2.	3.
X	+7928493	+9274052	+9730555
Y	−5398598	−3200618	−1823539
Z	−2341513	−1388219	−0790902

这些数字上面应该加入 § 92 里的改正值, T 表示地方恒星时:

$$\left.\begin{aligned}\Delta X &= -\rho\cos\varphi'\cos T\sin\varpi_0\\ \Delta Y &= -\rho\cos\varphi'\sin T\sin\varpi_0\\ \Delta Z &= -\rho\sin\varphi'\sin\varpi_0\end{aligned}\right\}$$

约翰内斯堡的地心坐标:

$$\rho\cos\varphi' = 0.8982 \qquad \rho\cos\varphi'\sin\varpi_0 = 383.10^{-7}$$

$$\rho\sin\varphi' = -0.4387 \qquad \rho\sin\varphi'\sin\varpi_0 = -187.10^{-7}$$

TU	$1^h20^m\ 4^s$	$21^h48^m\ 5^s$	$23^h\ 5^m23^s$
改正值	13	3 35	3 48
格林威治恒星时	9 28 24	10 27 33	11 3 2
L	1 52 18	1 52 18	1 52 18
T	$12^h40^m59^s$	$10^h11^m31^s$	$12^h\ 4^m31^s$
$\sin T$	−1778	+4558	−0197
$\cos T$	−9840	−8900	−9998
ΔX	+ 377	+ 341	+ 383
ΔY	+ 68	− 175	+ 8
ΔZ	+ 187	+ 187	+ 187

由此算出太阳的地面坐标(为简化书写起见, 仍记为 X, Y, Z);

	1	2	3
X	+7928850	+9274393	+9730938
Y	−5898530	−3200793	−1823531
Z	−2341326	−1388032	−0790715

2. 方向参量，地心距，L, M, N 三量

	1	2	3
$\sin\alpha$	+400856	+492496	+540061
$\cos\alpha$	−916142	−870315	−841625
$\cos\delta$	+995471	+988625	+985069
$\lambda=\cos\delta\cos\alpha$	−911993	−860415	−829059
$\mu=\cos\delta\sin\alpha$	+399041	+486894	+531997
$\nu=\sin\delta$	−095067	−150403	−172158

$\mu_2\nu_3-\mu_3\nu_2=-0.003808752$ $\quad\nu_2\lambda_3-\nu_3\lambda_2=-0.023434365$ $\quad\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2=-0.054074346$

$\mu_1\nu_3-\mu_3\nu_1=-0.018122742$ $\quad\nu_1\lambda_3-\nu_3\lambda_1=-0.078190739$ $\quad\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1=-0.154349008$

$\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1=-0.013729412$ $\quad\nu_1\lambda_2-\nu_2\lambda_1=-0.055369410$ $\quad\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=-0.100703058$

$$D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{vmatrix}=-0.0007370309$$

$$\frac{1}{D}=-1356.795$$

第一基本方程组可以写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_2}{S_3}\Delta_1&=5.16770L+31.79563M+73.36780N\\ \Delta_2&=24.58885L+106.08880M+209.41996N\\ \frac{S_1}{S_3}\Delta_3&=18.62800L+75.12494M+136.63341N\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

而且 $[r^2=\Delta^2-2\Delta(\lambda X+\mu Y+\nu Z)+(X^2+Y^2+Z^2)]$

$$\left.\begin{aligned}r_1^2&=\Delta_1^2+1.832542\Delta_1+0.974926\\ r_2^2&=\Delta_2^2+1.865902\Delta_2+0.981861\\ r_3^2&=\Delta_3^2+1.780301\Delta_3+0.986416\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}L&=\frac{S_2}{S_3}X_1-X_2+\frac{S_1}{S_3}X_3\\ M&=\frac{S_2}{S_3}Y_1-Y_2+\frac{S_1}{S_3}Y_3\\ N&=\frac{S_2}{S_3}Z_1-Z_2+\frac{S_1}{S_3}Z_3\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

方程(1)和(2)将无修改地在后面使用.

第 一 近 似 值

3. 面积比例，L, M, N 三式

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\theta_1}{\theta_3}\left[1+\frac{k}{6}(\theta_3^2-\theta_1^2)\frac{1}{r_2^3}\right]\qquad\frac{S_2}{S_3}=\frac{\theta_2}{\theta_3}\left[1+\frac{k}{6}(\theta_3^2-\theta_2^2)\frac{1}{r_2^3}\right]$$

这里略去行星光行差，在第二次近似计算时才加以考虑. 以下的数值是暂时的:

$\theta_1=t_2-t_1=15^{d}.85278$ $\qquad\theta_1^2=251.31063$

$\theta_2=t_3-t_2=9.05368$ $\qquad\theta_2^2=81.96912$

$\theta_3=\theta_1+\theta_2=24.90646$ $\qquad\theta_3^2=620.33175$

$$\frac{k}{6}=0.00004931870$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_3}=0.636493 \qquad \frac{k}{6}(\theta_3^2-\theta_1^2)=0.0181996$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_3}=0.363507 \qquad \frac{k}{6}(\theta_3^2-\theta_2^2)=0.0265513$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_1}{S_3}&=0.636493+\frac{0.0115839}{r_2^3}\\ \frac{S_2}{S_3}&=0.363507+\frac{0.0096516}{r_2^3}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

于是(3)式写为：

$$\left.\begin{aligned}L&=-0.0198527+\frac{0.0189248}{r_2^3}\\ M&=+0.0077725-\frac{0.0073228}{r_2^3}\\ N&=+0.0033659-\frac{0.0031757}{r_2^3}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

4. $\varDelta_2$ 与 r_2 的计算

将 L, M, N 的这些数值代入1组的第二式里去，得到含 r_2 与 $\varDelta_2$ 的方程，并配合以(2)组的第二式：

$$\varDelta_2=1.04131-\frac{0.97658}{r_2^3}$$

待解的两个方程如下：

$$\left.\begin{aligned}r_2^3&=\frac{0.97658}{1.04131-\varDelta_2}\\ r_2^2&=\varDelta_2^2+1.865904\varDelta_2+0.98186\end{aligned}\right\}$$

经过几次试解[1]，得知 $\varDelta_2$ 大约是0.8872，将以下三值代入以上两式：

$\varDelta_2$	0.8871	0.8872	0.8873
r_2^3	6.33279	6.33690	6.34102
r_2^2	3.42405	3.42441	3.42477

以 r_I 表示 r_2^3 的立方根，以 r_{II} 表示 r_2^2 的平方根：

r_I	1.85011	1.85051	1.85091
r_{II}	1.85042	1.85052	1.85061
差数	−31	−1	+30
	+30	+31	

以上的差数，对 r_1-r_2 为零作直线式内插，便得待求的解：

$$\varDelta_2=0.88720$$

$$r_2=1.85052 \qquad \frac{1}{r_2^3}=0.15781$$

---

(1) 我们先试了 $\varDelta$ 为 0.8, 0.9，然后试 0.87, 0.88 与 0.89。

5. 向径的计算

于是公式(4)与(5)给出：

$$\frac{S_1}{S_3}=0.63832 \qquad \frac{S_2}{S_3}=0.36503$$

$$L=-0.0168662 \qquad M=+0.0066169 \qquad N=+0.0028647$$

将这些数值代入1式得

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{S_2}{S_3}\Delta_1=0.33341 & \Delta_1=0.91338\\ \dfrac{S_1}{S_3}\Delta_3=0.57432 & \Delta_3=0.89974\end{array}\right\}$$

由方程组(2)算出

$$\left.\begin{array}{l}r_1=1.86628\\ r_2=1.85052\\ r_3=1.84330\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}r_1^3=6.50025\\ r_2^3=6.33690\\ r_3^3=6.26307\end{array}\right\}$$

第 二 近 似 值

6. 行星光行差

$$\tau=0^{d}.005774\Delta$$

τ_1	$0^{d}.00527$	$t_1-\tau_1$	$13^{d}.05034$	θ_1	$15^{d}.85293$	θ_1^2	251.31539
τ_2	0.00512	$t_2-\tau_2$	28.90327	θ_2	9.05361	θ_2^2	81.96785
τ_3	0.00519	$t_3-\tau_3$	37.95688	θ_3	24.90654	θ_3^2	620.33573

$$\frac{\theta_1}{\theta_3} \quad 0.6364967 \qquad \frac{\theta_2}{\theta_3} \quad 0.3635033$$

由于地心距 Δ 是近似值，以上的数值还不是确定的。

7. 吉布斯公式

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\theta_1}{\theta_2}\,\frac{1+\dfrac{\psi_3}{r_3^3}}{1-\dfrac{\psi_2}{r_2^3}} \qquad \frac{S_2}{S_3}=\frac{\theta_2}{\theta_3}\,\frac{1+\dfrac{\psi_1}{r_1^3}}{1-\dfrac{\psi_2}{r_2^3}}$$

$$\psi_1=\frac{k}{12}(\theta_1\theta_3-\theta_2^2) \qquad \psi_2=\frac{k}{12}(\theta_1\theta_2+\theta_3^2)$$

$$\psi_3=\frac{k}{12}(\theta_2\theta_3-\theta_1^2)$$

$$\frac{k}{12}=0.00002465935$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1\theta_3-\theta_2^2=312.87379\\ \theta_1\theta_2+\theta_3^2=763.86198\\ \theta_2\theta_3-\theta_1^2=-25.82129\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}\psi_1=0.00771526\\ \psi_2=0.01883634\\ \psi_3=0.00063674\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{\psi_1}{r_1^3}&=1.0011869 \\ 1-\frac{\psi_2}{r_2^3}&=0.9970275 \\ 1+\frac{\psi_3}{r_3^3}&=0.9998983 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{S_1}{S_3}&=0.6383294 \\ \frac{S_2}{S_3}&=0.3650198 \end{aligned}\right\}$$

利用(3)式，使用面积比的新数值，计算 L, M, N.

L	-0.01686619
M	$+0.00662092$
N	$+0.00286650$

将这些量代入(1)式，便得第二近似解:

$$\frac{S_2}{S_3}\Delta_1=0.3336657 \qquad \frac{S_1}{S_3}\Delta_3=0.5748725$$

Δ_1	0.914103
Δ_2	0.887988
Δ_3	0.900589

由此推得

r_1^2	3.485642	r_1	1.866988
r_2^2	3.427282	r_2	1.851292
r_3^2	3.400796	r_3	1.844125

对于前一解而言，吉布斯公式所带来的改变，因而这些公式再次应用既无必要也无益处. 可是下面要说明由吉布斯公式而来的逐渐逼近的收敛性，也不是无用的.

假设不作第一近似计算(3 条至 5 条)，立即使用吉布斯公式，先假定地心距之值为 1，而与向径以对应的数值，则可以捷速的计算得如下的解:

$$\Delta_1=0.94 \qquad \Delta_2=0.91 \qquad \Delta_3=0.92$$

再次作同样的计算时，取地心距之值为 0.9，便可得比第一解更近似的第二解，但不如由以上 4 条和 5 条所算得的那样近似. 但是将这样求得的向径代入吉布斯公式（这一次计入光行时差），便可导至相当接近的第三解，用这一结果去作以下的计算，8 条的计算，便很合宜.

总之，将吉布斯公式作叠代使用(从地心距可能的数值出发)，便可避免先用高斯方程作第一近似解(见 4 条)，因为这样可减轻一点繁重的计算.

第 三 近 似 值

8. 光行时差

τ_1	0ᵈ00527	$t_1-\tau_1$	13ᵈ05034	θ_1	15ᵈ85293	$k\theta_1^2$	0.07436729
τ_2	0.00512	$t_2-\tau_2$	28.90327	θ_2	9.05360	$k\theta_2^2$	0.02425523
τ_3	0.00520	$t_3-\tau_3$	37.95687	θ_3	24.90653	$k\theta_3^2$	0.18356477

$$\frac{\theta_1}{\theta_3}=0.6364969 \qquad \frac{\theta_2}{\theta_3}=0.3635031$$

9. 日心坐标

$$\begin{cases} x=\lambda\Delta-X \\ y=\mu\Delta-Y \\ z=\nu\Delta-Z \end{cases}$$

	r	x	y	z
1	1.866988	−1.626541	+0.904618	+0.147232
2	1.851292	−1.691477	+0.752435	+0.005247
3	1.844125	−1.719735	+0.661464	−0.075972

为校算计，可用如下的公式：

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$

$$x_2=\frac{S_2}{S_3}x_1+\frac{S_1}{S_3}x_3,\ 等\cdots$$

10. χ 与 h 的计算

$$\chi_1^2=r_1r_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\ 等\cdots$$

$$h_1=\frac{k\theta_1^2}{\chi_1^2\left[r_1+r_2+\frac{2\sqrt{2}}{3}\chi_1(1+3\xi_1)\right]}\quad 等\cdots$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}=0.9428090$$

暂时略去 ξ：

χ_1^2	6.889035	χ_1	2.624697
χ_2^2	6.820216	χ_2	2.611554
χ_3^2	6.827365	χ_3	2.612923

	r_1	1.866988	r_2	1.851292	r_1	1.866988
	r_2	1.851292	r_3	1.844125	r_2	1.844125
	$\frac{2\sqrt{2}}{3}\chi$	2.474588		2.462197		2.463487
和		6.192868		6.157614		6.174600
乘以	χ^2	42.66288		41.99626		42.15625
	h_1	0.0017431	h_1	0.0005776	h_3	0.0043544

表 XXXVI 给出对应的 γ 的数值：

γ_1 1.0019327　　γ_2 1.0006410　　γ_3 1.0048127

11. 面积比，距离与向径

三角形面积之比的第三近似值：

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_1}{S_3}&=\frac{\theta_1}{\theta_3}\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=0.6383265 \\ \frac{S_2}{S_3}&=\frac{\theta_2}{\theta_3}\frac{\gamma_3}{\gamma_2}=0.3650186 \end{aligned}\right\}$$

由2条里的公式(3)

L	-0.01686997
M	$+0.00662210$
N	$+0.00286701$

并公式(1)与(2)

$\frac{S_1}{S_3}\Delta_1$	333721	Δ_1	914258
		Δ_2	888127
$\frac{S_1}{S_3}\Delta_3$	574960	Δ_3	900731

由此导出比以前更近似的解:

r_1^2	3.486210	r_1	1.867139
r_2^2	3.427789	r_2	1.851429
r_3^2	3.401305	r_3	1.844263

12. 再次应用

将11条的解与7条的解加以比较，可见相差很少. 根据3个观测(其中两端的观测相隔不过一个月)计算出的向径，不能确定到第五位小数上不差一个单位. 因此，我们只好计算到那一位数而止. 但是我们将利用表达γ的完全公式(见§93)而进行另外一组新的计算. 由

$$l_3=\frac{r_1+r_3-\sqrt{2}\chi_3}{2\sqrt{2}\chi_3} \qquad m_3=\frac{k\theta_3^2}{2\sqrt{2}\chi_3^3} \qquad \rho_3=\frac{m_3}{\gamma_3^2}-l_3$$

由此求得

$\chi_3=2.613128 \qquad l_3=0.0021489 \qquad m_3=0.0036380 \qquad \rho_3=0.00145$

于是表XXXVI给出

$$1+3\xi_3=1.0000005$$

由此可见略去ξ_1与ξ_2(乃至ξ_3)是合理的.

利用Δ的最后一组数值，求得

τ_1	0ᵈ00528	θ_1	15ᵈ85294	$k\theta_1^2$	0.07436788
τ_2	512	θ_2	9.05360	$k\theta_2^2$	0.02425524
τ_3	520	θ_3	24.90654	$k\theta_3^2$	0.18356490

$$\frac{\theta_1}{\theta_3} \quad 0.6364971 \qquad \frac{\theta_3}{\theta_3} \quad 0.3635029$$

象10条内那样的计算重演一次，但这次计入ξ_3. 省略象10条与11条内那样的计算过程，只写出求得的结果如下:

h_1	0.0017427	h_2	0.0005774	h_3	0.0043533
γ_1	1.0019323	γ_2	1.0006411	γ_3	1.0048115
$\frac{S_1}{S_3}$	0.6383262			$\frac{S_2}{S_3}$	0.3650179

L		-0.01687081	
M		$+0.00662253$	
N		$+0.00286720$	
$\frac{S_2}{S_3}\Delta_1$	3337444	Δ_1	914323
		Δ_2	888191
$\frac{S_1}{S_3}\Delta_3$	5750030	Δ_3	900798
r_1^2	3.486448	r_1	1.867203
r_2^2	3.428022	r_2	1.851492
r_3^2	3.401545	r_3	1.844328

将这些结果和11条内的结果加以比较，我们发现在面积比的数值的第七位上改变几个单位，便足以在向径的数值的第五位上改变几个单位．因此不可能再由第三次演算，去对精确度有所推进．换句话说，只好合理地停止在刚才求得的这些结果上了[1]．

根 数 计 算

13．日心赤道坐标

$$x=\lambda\Delta-X \text{ 等}\cdots$$

求得						
	x_1	-1.626741	x_2	-1.691652	x_3	-1.719909
	y_1	$+0.904705$	y_2	$+0.752534$	y_3	$+0.661575$
	z_1	$+0.147211$	z_2	$+0.005216$	z_3	-0.076008

14．日心黄道坐标

$x'=x$　　　　$\varepsilon=23°44774$　(1935.0)

$y'=y\cos\varepsilon+z\sin\varepsilon$　　　　$\sin\varepsilon=0.397913$

$z'=-y\sin\varepsilon+z\cos\varepsilon$　　　　$\cos\varepsilon=0.917424$

x_1'	-1.626741	x_3'	-1.719909
y_1'	$+0.888574$	y_3'	$+0.576700$
z_1'	-0.224939	z_3'	-0.332981

（核算：$x'^2+y'^2+z'^2=r^2$）

15．三角形面积，参量（通径 p）

$$x_1'y_3'-x_3'y_1'=2S_3\cos i \qquad =+0.5901249$$

$$y_1'z_3'-y_3'z_1'=2S_3\sin i\sin\Omega=-0.1661559$$

$$x_1'z_3'-x_3'z_1'=2S_3\sin i\cos\Omega=+0.1547992$$

由这些量的平方之和，得

$$4S_3^2=0.39981797 \qquad 2S_3=0.63231161$$

1）假使在面积比的数值第七位上改变2单位，而再作一次计算，则向径的数值的第五位上，亦改变2单位。

故 $$p=\frac{C^3}{k}=4S_3^2\frac{\gamma_3^2}{k\theta_3^2}=2.199084$$

16. 交角与升交点的黄经

由除法得

$$\cos i=+0.9332818$$
$$\sin i\sin\Omega=-0.2627753$$
$$\sin i\cos\Omega=+0.2448147$$

然后计算(这里例外地保留到七位小数,如前所说,计算角度时使用6位三角真数表):

$$\sin i=+0.3591449 \qquad i=21^\circ\!.04767$$
$$\sin\Omega=-0.7316692$$
$$\cos\Omega=+0.6816599 \qquad \Omega=312^\circ\!.97352$$

17. 真近点角

因 $$\sin(v_3-v_1)=\frac{2S_3}{r_1r_3}=0.183612 \quad 或 \quad \tan\frac{v_3-v_1}{2}=\frac{2S_3}{x_3^2}$$

$$v_3-v_1=10^\circ\!.58023$$

$$d_1=\frac{p}{r_1}-1=0.1777423$$

$$d_3=\frac{p}{r_3}-1=0.1923497$$

$$\tan\frac{v_3+v_1}{2}=\frac{d_1-d_3}{d_1+d_3}\cot\frac{v_3-v_1}{2}=\frac{d_1-d_3}{d_1+d_3}\frac{\chi_3^2}{2S_3} \quad (\chi_3^2=6.828922)$$
$$=-0.426269$$

$$\frac{v_3-v_1}{2}=5^\circ\!.29012$$

$$\frac{v_3+v_1}{2}=336^\circ\!.91296$$

$$v_1=331^\circ\!.62284$$

$$v_3=342^\circ\!.20308$$

$\tan\frac{v_3+v_1}{2}$ 的符号可以使对应的角在第2或第4象限内. 这不确定之点可以几种方式解除. 例如, 由于 d_1 与 d_3 都是正数, 因而 v_1 与 v_3 及其半和属于第1或第4象限. 还有向径在减少之中. 故须选择第4象限.

18. 偏心率,半长轴,平均运动

因 $$e=d_1\sec v_1=d_3\sec v_3$$
$$\sec v_1=1.136573$$
$$\sec v_2=1.050259$$

由此得两个相合的数值:

$$e=\begin{cases}0.2020171\\0.2020170\end{cases}$$

取
$$e=0.202017$$
$$e^2=0.0408109$$

于是求得 $a=\dfrac{p}{1-e^2}=2.292649 \qquad \sqrt{a}=1.514150$

$$a^{-\frac{3}{2}}=0.2880671 \qquad \sqrt{k}=0^\circ\!.9856077$$
$$n=0^\circ\!.2839212$$

19. **近日点经度**

因
$$\sin(v+\omega)=\frac{z'}{r\sin i}=\frac{-x\sin\Omega+y\cos\Omega}{r\cos i}$$
$$\cos(v+\omega)=\frac{x'}{r}\cos\Omega+\frac{y'}{r}\sin\Omega$$

由此易见对于1, 3两位置 $\sin(v+\omega)$ 与 $\cos(v+\omega)$ 均为负. 这里只算其正弦便足够了. 由下列的任一组公式, 可求得

$\sin(v_1+\omega)=-0.335431$		$\sin(v_3+\omega)=-0.502703$	
$v_1+\omega=199^\circ\!.59875$		$v_3+\omega=210^\circ\!.17900$	
v_1	$331^\circ\!.62284$	v_3	$342^\circ\!.20308$
ω	$227^\circ\!.97591$	ω	$227^\circ\!.97592$

20. **平近点角**

$$\tan\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{v}{2} \qquad M=u-e\sin u$$
$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=0.814782 \qquad e=11^\circ\!.57472$$

	1	3	
$\frac{v}{2}$	$165^\circ\!.81142$	$171^\circ\!.10154$	
$\tan\frac{v}{2}$	-0.252827	-0.156568	
$\tan\frac{u}{2}$	-0.205999	-0.127569	
$\frac{u}{2}$	$168^\circ\!.35995$	$172^\circ\!.73011$	
u	$336^\circ\!.71990$	$345^\circ\!.46022$	
$\sin u$	-0.395227	-0.251052	
$e\sin u$	$-4^\circ\!.57464$	$-2^\circ\!.90586$	
M	$341^\circ\!.29454$	$348^\circ\!.36608$	
$t_1-\tau-t_0$	$-15^d\!.94967$	$+8^d\!.95687$	t_0=1935年3月1日
$-n(t-\tau-t_0)$	$+4^\circ\!.52845$	$-2^\circ\!.54305$	
M_0	$345^\circ\!.82299$	$345^\circ\!.82303$	

由于对 M_0 的两个数值的相合, 而得着检算; 在以后的计算里取 $M_0=345^\circ\!.82301$. 据

$r=a(1-e\cos u)$计算向径的数值:

$\cos u$	918583	967974
$1-e\cos u$	814431	804453
r	1.867204	1.844328

与 12 条里的结果比较,只在第六位上差一个单位.

21. 根数表

	M_0	345°.823	(1935 年 3 月 1 日
	n	0°.283921	
1342 小行星	a	2.29265	
	e	0.20202	
(Brabantia)	Ω	312°.974	1935.0
	ω	227°.976	1935.0
	i	21°.048	1935.0

22. 星历表计算

将日心赤道坐标表为如下的形式:

$$x=A_x(\cos u-e)+B_x\sin u$$

等…

表示 $A_xB_x\cdots$ 的公式见 § 87 内. 由这些公式求得

$$\left.\begin{aligned}x&=-2.209195(\cos u-e)+0.110581\sin u\\ y&=+0.279600(\cos u-e)-1.782151\sin u\\ z&=-0.545454(\cos u-e)-1.361410\sin u\end{aligned}\right\}$$

从这里可以校验:

$$\Sigma A^2=a^2 \qquad \Sigma AB=0 \qquad \Sigma B^2=a^2(1-e^2)$$

23. 最后核对

利用这些公式我们要去核对由此计算而得的三个时期的位置是否与观测符合. 并且我们还要将这种核对,实施于另外三个没有用过的观测位置上去:

3 月	27.77216	$9^h32^m19^s.75$	$-11°21'53''.2$
4 月	8.76165	9 28 56.28	−11 53 21.9
4 月	11.75943	9 29 6.99	−12 0 2.4

这三个观测是在同一天文台做的. 对于这三个时期,太阳的地面坐标为

$X+\Delta X$	$Y+\Delta Y$	$Z+\Delta Z$
+0.992337	+0.098218	+0.042629
952629	283650	123058
936279	328421	142474

由粗略的计算得出其光行时差,分别为

$0^d.00562 \qquad 606 \qquad 618$

于是 $t-t_0-\tau$ 之值为

$$+26^{\rm d}.76654;\qquad 38^{\rm d}.75559;\qquad +41^{\rm d}.75325$$

对于这 6 个观测,分别求得的数字如下:

	M	u	$\cos u-e$	$\sin u$
1	341°.29456	336°.71993	0.716567	−0.395226
2	345.79555	342.27084	750489	304518
3	348.36606	345.46020	765957	251053
4	353.42260	351.76464	787671	143240
5	356.82654	356.02397	795576	069339
6	357.67764	357.09004	796694	050766

	x	y	z	ξ	η	ζ
1	−1.626741	+904705	+147210	−833856	+364852	−086923
2	−1.691650	+752534	+005217	−764211	+432455	−133586
3	−1.719910	+661576	−076008	−746816	+479223	−155079
4	−1.755958	+475508	−234630	−763622	+573726	−192001
5	−1.765250	+346016	−339551	−812621	+629666	−216493
6	−1.765666	+313228	−365447	−829387	+641649	−222973

由于

$$\tan\alpha=\frac{\eta}{\xi}\qquad \sin\delta=\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

	$\tan\alpha$	α_c	$o-c$	$\sin\delta$	δ_c	$o-c$
1	−437548	$10^{h}25^{m}28^{s}.40$	$-0^{s}.01$	−095068	− 5°27′18″.8	+ 0″.1
2	−565884	10 1 58.84	+0.01	−150403	− 8 39 1.0	− 0″.1
3	−641688	9 49 14.93	−0.01	−172157	− 9 54 47.8	− 0″.2
4	−751322	9 32 19.60	+0.15	−197078	−11 21 58.1	+ 4.9
5	−774858	9 28 55.06	+1.22	−206072	−11 53 32.2	+10.3
6	−773642	9 29 5.51	+1.48	−207986	−12 0 15.6	+13.2

对于前 3 个位置的坐标;方才求得的数值,有些和 13 条里所得的在第六位小数上相差 1 或 2 个单位,由于演算的过程相当多,我们可以认为,这种差异是不足计较的.因我们没有用第 2 位置去计算根数,这一位置上的核对不但只有关于演算上的正确,还可以检查 12 条内由高斯方程所提供之解的近似度.如果没有将面积比的计算推进到相当远,则 1 与 3 两位置的 $o-c$ 之差也很小,可是中间的一个位置却不是忠实地被表达了.

由上表可见 1, 2, 3 三个位置的 $o-c$ 很小;这是由于长的计算过程里不能避免的,最后一位小数上误差的积累.但 4, 5, 6 三个位置便表达得很差.因此,我们须利用 6 个 $o-c$ 残差,借较差改正法,去改进轨道根数.我们不在此讨论这个问题.

可是用前 3 个观测求得的根数,已经足够计算出一个相当精确的星历表,以便行星再度冲时,得以证认.

§ 98 抛物线轨道计算的奥耳伯斯方法

彗星常在其最大亮度之时被人发现. 它们很快就变暗弱, 如果没有用早期的观测、计算出至少近似的星历表, 我们很容易失掉了它们的踪迹. 实践证明, 最初的星历表常可根据由观测所定出的一段抛物线弧而算得. 若以后的观测表现这个假设不够精确, 我们再不肯定偏心率的值, 而计算出另外一个更精密的轨道.

奥耳伯斯的方法既简单又迅速; 只须几小时的计算, 便可根据几天内的 3 次观测的位置, 而得着一颗新彗星的抛物线轨道. 令 t_1, t_2, t_3 为三个观测的时期, 最后选择其间的间隔是相等的(以后将说明其原由). 设以 x, y, z 并加以下标, 表示对应于 3 个观测位置的日心黄道坐标, 更以 l 与 b 表示地心黄道坐标, Δ 表示彗星的地心距; 最后以 R 与 $\odot$ 分别表示太阳的向径与地心黄经, 则

$$\left.\begin{aligned} x&=\Delta\cos b\cos l-R\cos\odot=\lambda\Delta-X\\ y&=\Delta\cos b\sin l-R\sin\odot=\mu\Delta-Y\\ z&=\Delta\sin b\qquad\qquad\qquad\quad=\nu\Delta \end{aligned}\right\}$$

λ, μ, ν 表示彗星的地心方向变量, X 与 Y 表示太阳的地心坐标[1]. 至于向径则为下式所给出:

$$r^2=x^2+y^2+z^2=\Delta^2-2\Delta(\lambda X+\mu Y)+R^2 \tag{1}$$

由于这里要应用到欧勒公式与恩克的近似方法 (§ 94), 下面写出联接 1 与 3 两位置的弦的方程:

$$c^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2 \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} c&=2\sqrt{k}\,\frac{\theta_3}{\sqrt{r_1+r_3}}\,f(\varphi)\\ \theta_3&=t_3-t_1\\ \varphi&=2\sqrt{k}\,\frac{\theta_3}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

这问题的未知数是 r_1, r_3, Δ_1, Δ_3, c 与 φ. 我们立即可以写出包含这六个量与时间及已知量的五个方程: (1)里的两式, (2)式(其右端是 Δ_1 与 Δ_3 的二次式), 及(3)内两个方程. 还须建立第六个方程: 这是 § 93 内关系式(1)的组合, 即以 S_3 乘各项, 而且将有关太阳之项代入, 便得

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\Delta_1S_2-\lambda_2\Delta_2S_3+\lambda_3\Delta_3S_1&=X_1S_2-X_2S_3+X_3S_1\\ \mu_1\Delta_1S_2-\mu_2\Delta_2S_3+\mu_3\Delta_3S_1&=Y_1S_2-Y_2S_3+Y_3S_1\\ \nu_1\Delta_1S_2-\nu_2\Delta_2S_3+\nu_3\Delta_3S_1&=0 \end{aligned}\right\}$$

将以上三式两端分别乘以 $\sin\odot_2$, $-\cos\odot_2$ 和 $\cot b_2\sin(l_2-\odot_2)$ 之后相加, 再消去 Δ_2 与 S_3, 便得要寻找的方程式:

$$A\Delta_1S_2+B\Delta_3S_1=S_2R_1\sin(\odot_2-\odot_1)-S_1R_3\sin(\odot_3-\odot_2) \tag{4}$$

式内

$$A=\sin b_1[\cot b_2\sin(l_2-\odot_2)-\cot b_1\sin(l_1-\odot_2)]$$

$$B=\sin b_3[\cot b_2\sin(l_2-\odot_2)-\cot b_3\sin(l_3-\odot_2)]$$

---

1) 本节内 x, y, z 与 X, Y 是黄道坐标, 读者不应将本章内高斯方法与拉普拉斯方法里所指的赤道坐标相混淆了.

A 与 B 是可借已知数据算出的量．将方程(4)的两端除以 $B\Delta_1S_1$，便得表达地心距 Δ_3 与 Δ_1 之比 Q 如下：

$$Q=\frac{\Delta_3}{\Delta_1}=-\frac{A}{B}\frac{S_2}{S_1}+\frac{R_1}{B\Delta_1}\frac{S_2}{S_1}\sin(\odot_2-\odot_1)\left[1-\frac{S_1}{S_2}\frac{R_3\sin(\odot_3-\odot_2)}{R_1\sin(\odot_2-\odot_1)}\right] \qquad (5)$$

因为所用的观测是在很接近的三个时期作成的，我们可以合理地将时间之比去代替三角形面积之比，这样做的误差，已在 § 93 内证明，是时间的二阶项．若三个观测相距的时间是相等的，则这误差降至三阶，解答更为接近．现在更要证明若在方程(5)右端第一项，作一些替换，我们便可略去其第二项，因为这一项比前一项属更高阶；这便是下面要证明的．

由于我们将 $\sin(\odot_2-\odot_1)$ 看做是一阶项，容易证明(5)式里括弧内的因数至少是二阶的．我们已经表明下式的误差是三阶的：

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1+\frac{k}{6r_2^3}(\theta_2^2-\theta_1^2)\right]$$

而比值：

$$\frac{R_3\sin(\odot_3-\odot_2)}{R_1\sin(\odot_2-\odot_1)}=\frac{R_2R_3\sin(\odot_3-\odot_2)}{R_1R_2\sin(\odot_2-\odot_1)}$$

是以太阳为一顶点，地球在 t_3 与 t_2 及 t_1 与 t_2 的位置分别为另外两顶点的两个三角形的面积之比．这比值的近似表达式为

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}\left[1-\frac{k}{6R_2^3}(\theta_2^2-\theta_1^2)\right]$$

于是方程(5)右端括弧里之量变为

$$-\frac{k}{6}\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)(\theta_2^2-\theta_1^2)$$

一般的情形下这是二阶的，若观测时间是等距的，则是三阶的．总之，设令(方程 5)

$$Q=\frac{\Delta_3}{\Delta_1}=-\frac{A}{B}\frac{\theta_2}{\theta_1}$$

一般只是二阶误差，若观测时间是等距的，则降为三阶．

由此便得计算抛物线轨道的步骤如下：

(1) 利用 3 个位置的黄道坐标计算比值 Q:

$$Q=\frac{\theta_2}{\theta_1}\frac{\sin b_1}{\sin b_3}\frac{\cot b_2\sin(l_2-\odot_2)-\cot b_1\sin(l_1-\odot_2)}{\cot b_3\sin(l_3-\odot_2)-\cot b_2\sin(l_2-\odot_2)} \qquad (I)$$

以后便不再使用中间那个位置，而只用 l_1, b_1, l_3, b_3 与 Q 五个数来进行计算．

(2) 在方程(1)，(2)与(3)里，以 $Q\Delta_1$ 代替 Δ_3．方程(2)里的系数 L, M, N 是已知量，不需在此解说：

$$\left.\begin{aligned}r_1^2&=\Delta_1^2-2\Delta_1(\lambda_1X_1+\mu_1Y_1)+R_1^2\\ r_3^2&=Q^2\Delta_1^2-2Q\Delta_1(\lambda_3X_3+\mu_3Y_3)+R_3^2\\ c^2&=L\Delta_1^2+M\Delta_1+N\end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

$$\left.\begin{aligned}c&=2\sqrt{k}\frac{\theta_3}{\sqrt{r_1+r_3}}f(\varphi)\\ \varphi&=2\sqrt{k}\frac{\theta_3}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\right\} \qquad (III)$$

这含 5 个未知数的 5 个方程，可用逐渐逼近法去求解答．现在解说以下数字例子里

所要进行的演算过程，在(II)的第3式里代入Δ_1的一个选定的数值，(II)式便提供r_1，r_3与c一组数值．设以$c_{\rm I}$表示这样求得的c之值．于是将求得的r_1与r_3之值代入方程(III)，再计算对应的c，设表示其值为$c_{\rm II}$．一般，$c_{\rm I}-c_{\rm II}$不为零．以几个成等差级数的Δ_1之值，作这样的计算，并计算出与之对应的残差

$$\varepsilon=c_{\rm I}-c_{\rm II}$$

再用内插法去寻找使ε为零的Δ_1的数值，这即是所要求的数值．于是在更狭窄的组距内选择另一组Δ_1的数值，作同样的试探，以改进以上的初步解答．至于本问题的实际意义和需要试探的次数，读者可参看轨道计算的专书．

既得Δ_1之值以后，便可立即推出Δ_3，然后算出两端位置的坐标x_1，y_1，z_1与x_3，y_3，z_3．于是问题转化为§95内已经讨论过的问题了．

还需据求得的轨道根数与抛物线运动的定律，计算彗星在t_1，t_2，t_3三个时期的位置，而与由观测得来的数字比较，以核对计算得的数字是否正确．应使用的公式在§87内．极端两位置用以求解以至最后部分应作数字的核对．其观测值与计算值之差$(o-c)$应不超过所保留的有效数字上的误差．但中间一个位置是多余的数据，未用以求解，就不能作同样的要求．它的误差$o-c(\cos\delta\Delta\alpha,\ \Delta\delta)$经常是几个角秒．这是奥耳伯斯方法的近似性不可避免的结果．若这一误差超过这个数量，而不能认为是计算上的积累误差，便需使用更普遍的方法，求一个非抛物线的轨道．

若轨道的倾角为零，奥耳伯斯法亦如其他方法一样失效．因为我们可以写

$$Q=\frac{\theta_2}{\theta_1}\,\frac{\cos b_1}{\cos b_3}\,\frac{\tan b_1\sin(l_2-\odot_2)-\tan b_2\sin(l_1-\odot_2)}{\tan b_2\sin(l_3-\odot_2)-\tan b_3\sin(l_2-\odot_2)}$$

当黄纬b_1，b_2，b_3为零时，Q为不定数．即使这些黄纬不为零而是很小(当倾角很小时便是这样)，仍然有这样不确定的情况，于是应当改用利用四个观测的计算法．

§99　奥耳伯斯方法的数字应用

彗星1939n发现于1939年11月4日．我们使用下面的三个观测位置[1]，计算其暂时的抛物线轨道．

	世界时	α 1939.0	δ 1939.0	观测地点
1939年11月	7.80615	$17^{\rm h}19^{\rm m}\ 1^{\rm s}.09$	$+32^\circ\ 7'37''.4$	雨克
	10.73701	17 47 16.38	29 32 27.7	雨克
	13.73453	18 16 29.40	26 17 7.6	雅典

这三个观测的时刻，差不多是等距的，因此提供了使用奥耳伯斯方法的优越条件．我们可用4或6位小数计算；可是为了小数量的计算宁肯保留多些小数位，以避免误差的积累，而可得着比较好的核对．

1. 视差与行星光行差的改正

$$\alpha=\alpha_{\text{观测}}+\frac{P_\alpha}{\Delta}\qquad\delta=\delta_{\text{观测}}+\frac{P_\delta}{\Delta}\qquad(\S\,69)$$

1) 取自国际天文协会天文电报局(设在哥本哈根)的通报．

$P_\alpha=\varpi_0\rho\cos\varphi'\sec\delta\sin H$;　　$P_\delta=\varpi_0\rho\sin\varphi'\cos\delta-\varpi_0\rho\cos\varphi'\sin\delta\cos H$

	$\rho\cos\varphi'$	$\rho\sin\varphi'$	$\varpi_0\rho\cos\varphi'$	$\varpi_0\rho\sin\varphi'$	Long. est Gr.
雨克	0.6333	0.7713	$5''.58=0^s.372$	$6''.79$	$0^h17^m26^s$
雅典	0.7893	0.6119	$6''.95=0^s.463$	$5''.39$	1 34 52

	11月7日	11月10日	11月13日
t	$19^h20^m51^s$	$17^h41^m18^s$	$17^h37^m43^s$
改正值	+ 0 3.11	0 2 54	0 2 54
恒星时0^h	+ 3 1 11	3 13 1	3 24 51
L	+ 0 17 26	0 17 26	1 34 52
地方恒星时	22 42 39	21 14 39	22 40 20
α	−17 19 1	17 47 16	18 16 29
H	$5^h23^m38^s$	$3^h27^m23^s$	$4^h23^m51^s$
$\sec\delta$	1.1808	1.1494	1.1153
$\sin H$	0.9875	0.7863	0.9133
$\cos\delta$	0.8469	0.8700	0.8966
$\sin\delta$	0.5318	0.4930	0.4428
$\cos H$	0.1580	0.6178	0.4073
P_α	$+0^s.434$	$+0^s.336$	$+0^s.472$
	$+5''.75$	$+5''.91$	$+4''.83$
	$-0''.47$	$-1''.70$	$-1''.25$
P_δ	$+5''.28$	$+4''.21$	$+3''.58$

由早先观测算得的暂时轨道给出下列三个近似的地心距:

Δ	0.88	0.85	0.82

若缺少这三个数据，我们可如下由2条计算到7条(略去视差与光行时差)或更好地设三个地心距均等于1; 新彗星发现时,这假设一般是与事实相符合的. 从此容易计算得Δ_1与Δ_3的近似值,再由内插法以估计Δ_2. 于是再回到我们的问题

这里取

视差	α	$+0^s.49$	$+0^s.40$	$+0^s.58$
	δ	$+6''.0$	$+5''.0$	$+4''.4$
τ(§ 60)		$0^d.00508$	$0^d.00490$	$0^d.00473$

由此得改正后的数据:

	$t-\tau$	$\alpha_{地心}$	$\delta_{地心}$
11月	7.80107	$17^h19^m\ 1^s.58=259^\circ.75658$	$+32^\circ\ 7'43''.4=32^\circ.12872$
	10.73211	17 47 16.78 = $266^\circ.81992$	29 32 32.7 = $29^\circ.54242$
	13.72980	18 16 29.98 = $274^\circ.12492$	26 17 12.0 = $26^\circ.28867$

2. 关于太阳的数据

天文年历提供t时的太阳位置. 几何的黄经(即未加光行差改正的黄经)是对于

1939.0 的平春分点计算的.

	☉	R	cos ☉	sin ☉
1	224°28′26″.1 = 224°.47392	0.990836	−0.713569	−0.700585
2	227°25 8.8 = 227°.41911			
3	230°26 8.2 = 230°.43561	0.989454	−0.636945	−0.770909

$$\varepsilon = 23°26'50''.0 = 23°.44722 \quad \begin{cases} \sin\varepsilon = 0.397905 \\ \cos\varepsilon = 0.917427 \end{cases} \quad (1939.0)$$

3. 黄道坐标

$$\lambda = \cos b\cos l = \cos\delta\cos\alpha$$

$$\mu = \cos b\sin l = \sin\varepsilon\sin\delta + \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha$$

$$\nu = \sin b \qquad = \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha$$

	1	2	3
$\cos\delta$	+846856	+869991	+896590
$\sin\delta$	+531823	+493068	+442863
$\cos\alpha$	−177831	−055474	+071932
$\sin\alpha$	−984061	−998460	−997410
$\cos\delta\sin\alpha$	−833358	−868651	−894268
λ	−150597	−048262	−064494
μ	−552930	−600730	−644208
ν	+819506	+797994	+762128
$\lambda^2+\mu^2+\nu^2$	1.000001	1.000000	1.000002 (校验)
$\cot l = \frac{\lambda}{\mu}$	+272362	+080339	−100114
l	254°.76436	265°.40676	275°.71705
$\cot b$	+699288	+755226	+849499 (由 ν 得来)
$l - ☉_2$	27°.34525	37°.98765	48°.29794
$\sin(l - ☉_2)$	+459351	+615492	+746614
$\cot b\sin(l - ☉_2)$	+321219	+464836	+634248

4. Q 的计算

$$Q = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1}\,\frac{\sin b_1}{\sin b_3}\,\frac{\cot b_2\sin(l_2 - ☉_2) - \cot b_1\sin(l_1 - ☉_2)}{\cot b_3\sin(l_3 - ☉_2) - \cot b_2\sin(l_2 - ☉_2)}$$

$$\theta_1 = 2^d.93104 \qquad \theta_2 = 2^d.99769 \qquad \theta_3 = 5^d.92873$$

$$Q = \frac{299769}{293104}\,\frac{819506}{762128}\,\frac{143617}{169412} = 0.932290$$

5. 日心坐标的表达式

$$x_1 = \lambda_1\Delta_1 - R_1\cos ☉_1 \qquad\qquad x_3 = Q\lambda_3\Delta_1 - R_3\cos ☉_3$$

$$y_1 = \mu_1 \Delta_1 - R_1 \sin \odot_1 \qquad y_3 = Q\mu_3 \Delta_1 - R_3 \sin \odot_3$$

$$z_1 = \nu_1 \Delta_1 \qquad z_3 = Q\nu_3 \Delta_1$$

$$x_1 = -0.150597\Delta_1 + 0.707030$$

$$y_1 = -0.552930\Delta_1 + 0.694165$$

$$z_1 = +0.819506\Delta_1$$

$$x_3 = +0.060127\Delta_1 + 0.630228$$

$$y_3 = -0.600589\Delta_1 + 0.762779$$

$$z_3 = +0.710524\Delta_1$$

$$x_3 - x_1 = +0.210724\Delta_1 - 0.076802$$

$$y_3 - y_1 = -0.047659\Delta_1 + 0.068614$$

$$z_3 - z_1 = -0.108982\Delta_1$$

6. 含 Δ_1, r_1, r_3 与 c 的方程式

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \qquad c = 0.03440420 \frac{\theta_3}{\sqrt{r_1 + r_3}} f(\varphi)$$

$$r_3^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$$

$$c_3^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 \qquad \varphi = 0.03440420 \frac{\theta_3}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left.\begin{aligned}
r_1^2 &= \Delta_1^2 - 0.980603\Delta_1 + 0.981756 \\
r_3^2 &= 0.869165\Delta_1^2 - 0.840446\Delta_1 + 0.979019 \\
c^2 &= 0.0585531\Delta_1^2 - 0.0389082\Delta_1 + 0.0106064 \\
c &= \frac{0.203973}{\sqrt{r_1 + r_3}} f(\varphi) \\
\varphi &= \frac{0.203973}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}\right\}$$

7. 方程式的解

现在用 Δ_1 在 0.88 附近的三个数值(这是由 0.8 和 0.9 的初步计算得来的)，实施前节所说的内插法. 从表 XXXVII 取出 $f(\varphi)$之值.

初步试算

Δ_1	0.87	0.88	0.89
r_1^2	0.885531	0.893225	0.901119
r_3^2	0.905702	0.912508	0.919488
c_1^2	0.0210751	0.0217107	0.0223580
r_1	0.941027	0.945106	0.949273
r_3	0.951684	0.955253	0.956899
c_1	0.145173	0.147346	0.149526

r_1+r_3	1.892711	1.900359	1.908172
$\sqrt{r_1+r_3}$	1.375758	1.378535	1.381366
$(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}$	2.603912	2.619711	2.635884
φ	0.078333	0.077861	0.077383
f	1.000256	1.000253	1.000250
c_{II}	0.148300	0.148001	0.147697
c_I-c_{II}	−0.003127	−0.000655	+0.001829
	+2472	+2484	

$$\varDelta_1=0.8826$$

再度试算

$\varDelta_1$	0.8825	0.3826	0.8827
r_1^2	0.895180	0.895259	0.895337
r_3^2	0.914236	0.914305	0.914375
c_I^2	0.0218714	0.0218779	0.0218841
r_1	0.946140	0.946181	0.946222
r_3	0.958157	0.956193	0.956230
c_I	0.147890	0.147912	0.147933
r_1+r_3	1.902297	1.902374	1.902452
$\sqrt{r_1+r_3}$	1.379238	1.379266	1.379294
$(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}$	2.623720	2.623880	2.624041
φ	0.077742	0.077737	0.077732
f	1.000252	1.000252	1.000252
c_{II}	0.147925	0.147922	0.147919
c_I-c_{II}	−0.000035	−0.000010	+0.000014
	+25	+24	

$$\varDelta_1=0.882642$$

8. 日心坐标

将以上求得的 $\varDelta_1$ 的数值代入 5. 内的公式去.

$\varDelta_1$	882642	$\varDelta_3$	822878
x_1	+574107	x_3	+683299
y_1	+206126	y_3	+232674
z_1	+723330	z_3	+627138

由于奥耳伯斯方法的近似性，第 6 位小数不确定，有时甚至第 5 位小数也不能保证. 我们可用 5 位小数计算，但多用一位小数，以便避免数字误差的积累. 因而假设坐标的数值是精确的，但亦保存一位多余的小数，以便保证数字的核对.

9. 升交点黄经，倾角

$$2\sigma_1=x_1y_3-x_3y_1 \qquad =2S_3\cos i$$

$$2\sigma_2 = y_1 z_3 - y_3 z_1 \qquad = 2S_3 \sin i \sin \Omega$$

$$2\sigma_3 = x_1 z_3 - x_3 z_1 \qquad = 2S_3 \sin i \cos \Omega$$

求得

$$2\sigma_1 = -0.0072\,6592$$

$$2\sigma_2 = -0.0390\,3064$$

$$2\sigma_3 = -0.1342\,0635$$

$$\tan \Omega = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 0.290826 \qquad \Omega = 196^\circ\!.2158$$

$$\cot i = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}} = -0.051986 \qquad i = 92^\circ\!.9759$$

又因

$$2S_3 = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = 0.13995545$$

于是

$$\cos i = -0.0519\,159 \qquad = \frac{\sigma_1}{S_3}$$

$$\sin i \sin \Omega = -0.2788\,790 \qquad = \frac{\sigma_2}{S_3}$$

$$\sin i \cos \Omega = -0.9589\,219 \qquad = \frac{\sigma_3}{S_3}$$

为以下计算之用，由以上三行得出

$\sin i$	0.9986 514
$\cos i$	−0.0519 159
$\sin \Omega$	−0.2792 556
$\cos \Omega$	−0.9602 168

10. $v+\omega$ 的计算

$$r \sin(v+\omega) = \frac{z}{\sin i}; \qquad r \cos(v+\omega) = x \cos \Omega + y \sin \Omega$$

$r_1 \sin(v_1+\omega)$	7243 068	$r_3 \sin(v_3+\omega)$	6279 849
$r_1 \cos(v_1+\omega)$	−6088 290	$r_3 \cos(v_3+\omega)$	−7210 907
$\tan(v_1+\omega)$	−1.189672	$\tan(v_3+\omega)$	−0.870882
$v_1+\omega$	130°.04933	$v_3+\omega$	138°.94798

$$v_3 - v_1 = 8^\circ\!.89865$$

校验

$$\sin(v_3 - v_1) = \frac{2S_3}{r_1 r_3}$$

r_1^2	0.8952 931	r_3^2	0.9143 368
r_1	0.9461 993	r_3	0.9562 096

$$\sin(v_3 - v_1) = 0.1546871$$

$$v_3 - v_1 = 8^\circ\!.89866$$

11. q 的计算

$$q = \frac{r_1 r_3 \sin^2 \frac{v_3 - v_1}{2}}{r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{v_3 - v_1}{2}} \qquad (\S\ 94)$$

分子是二阶项，而分母也很小；因而下列的变换式更适合使用：

$$q=\frac{4r_1r_3\sin^2\frac{v_3-v_1}{4}\cos^2\frac{v_3-v_1}{4}}{(\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1})^2+4\sqrt{r_1r_3}\sin^2\frac{v_3-v_1}{4}}=\frac{\sqrt{r_1r_3}\cos^2\frac{v_3-v_1}{4}}{1+\dfrac{(\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1})^2}{4\sqrt{r_1r_3}\sin^2\frac{v_3-v_1}{4}}}$$

这里有

$$\sqrt{r_1}=0.972728\qquad \sqrt{r_3}=0.977860$$

$$\cos\frac{v_3-v_1}{4}=0.999246\qquad \sin\frac{v_3-v_1}{4}=0.038818$$

$$\frac{(\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1})^2}{4\sqrt{r_1r_3}\sin^2\frac{v_3-v_1}{4}}=\frac{0.00002634}{0.00573317}=0.004594$$

$$q=\frac{0.949758}{1.004594}=0.945415$$

12. v 与 ω 的计算

由于下列的简单变换，我们应用 § 94 里的公式 3：

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{v_3+v_1}{2}&=\frac{q(r_3-r_1)\cos\frac{v_3-v_1}{2}}{S_3}\\ \cos\frac{v_3+v_1}{2}&=\frac{[q(r_3+r_1)-r_1r_3]\sin\frac{v_3-v_1}{2}}{S_3}\end{aligned}\right\}$$

第一式适合于所研究的情形，因

$$\left.\begin{aligned}r_3-r_1&=0.0100103\\ \cos\frac{v_3-v_2}{2}&=0.996986\\ S_3&=0.06997773\end{aligned}\right\}$$

$$\sin\frac{v_1+v_3}{2}=0.134834$$

$$\frac{v_3+v_1}{2}=7^{\circ}.74902$$

$$\frac{v_3-v_1}{2}=4^{\circ}.44933$$

$$v_3=12^{\circ}.19835$$

$$v_1=3^{\circ}.29969$$

将 v 的这两值和 10. 内求得的 $v+\omega$ 的两值并合，便得 ω 的两值如下，可见其有满意的符合：

$$126^{\circ}.74963\qquad 126^{\circ}.74964$$

13. 过近日点时刻 T

$$t-\tau-T=1^{\mathrm{d}}.0961558q^{\frac{3}{2}}\mathfrak{M}\qquad(\S\ 85)$$

$$s=\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{r}{q}-1}$$

$$\mathfrak{M}=75s+25s^3$$

$$\sqrt{q}=0.972324$$

$$q^{\frac{3}{2}}=0.919250$$

$$t-\tau-T=1^{\text{d}}.007641\,\mathfrak{M}$$

	1	3
s	0.028803	0.106854
s^3	0.000024	0.001220
$\mathfrak{M}$	2.1608	8.0446
$t-\tau$	11 月 7.8011	11 月 13.7298
$t-\tau-T$	2.1773	8.1061
T	11 月 5.6238	11 月 5.6237

14. 根数表

T	1939 年 11 月 $5^{\text{d}}.624$		1939 年彗星
ω	$126^\circ.750$	1939.0	
Ω	196.216		
i	92.976		
q	0.94542		

15. 日心黄道坐标的表达式

符号与 § 87 里的相同.

$$P'_x=\cos\Omega\cos\omega-\cos i\sin\Omega\sin\omega$$

$$P'_y=\sin\Omega\cos\omega+\cos i\cos\Omega\sin\omega$$

$$P'_z=\sin i\sin\omega$$

$$Q'_x=-\cos\Omega\sin\omega-\cos i\sin\Omega\cos\omega$$

$$Q'_y=-\sin\Omega\sin\omega+\cos i\cos\Omega\cos\omega$$

$$Q'_z=\sin i\cos\omega$$

$\cos\Omega$	-9602168	$\cos\omega$	-598320	$\cos i\cos\Omega$	0498505
$\sin\Omega$	-2792556	$\sin\omega$	$+801258$	$\cos i\sin\Omega$	0144978
				$\sin i$	9986514

P'_x	0.562900	Q'_x	0.778056
P'_y	0.207027	Q'_y	0.193929
P'_z	0.800177	Q'_z	-0.597513

校验

$$\Sigma P'^2=1.000000$$

$$\Sigma Q'^2=1.000001$$

$$\Sigma P'Q'=0.000000$$

$$\left.\begin{aligned} x&=0.532174(1-s^2)+1.471170s \\ y&=0.195726(1-s^2)+0.366686s \\ z&=0.756499(1-s^2)-1.129794s \end{aligned}\right\}\text{日心黄道坐标}$$

校验

	1	3
s	0.028803	0.106854
$1-s^2$	0.999171	0.988582
x	0.574107	0.683298
y	0.206125	0.232673
z	0.723330	0.627138

可见我们重新求得 8. 的数值，只是在第 6 位小数上差一个单位. 如上所说，由于奥耳伯斯方法的近似性，即使决定到这样的近似度，还同实际的情形相差不少.

可以证明给定数若有微小的改变，可能对根数发生相当大的影响.

16. 中间位置的计算

以上对 Δ_1 与 Δ_3 求得的数值和 1. 内所用的相当接近，便不需再对前所采用的视差与光行差的数值加以改正；因此，将这一解作为确定解. 刚才已经证明，计算得的根数能正确表达 1 与 3 两个位置；现在更对位置作相同的核验.

以地心赤道坐标表示有

$$\begin{aligned} \xi&=\Delta\cos\delta\cos\alpha=x+X \\ \eta&=\Delta\cos\delta\sin\alpha=y\cos\varepsilon-z\sin\varepsilon+Y \\ \zeta&=\Delta\sin\delta\qquad\quad\ =y\sin\varepsilon+z\cos\varepsilon+Z. \end{aligned}$$

X, Y, Z 表示太阳的地心赤道坐标，其数值可在天文年历中得到. 实际求得

$$\begin{aligned} \xi&=0.532174(1-s^2)+1.471170s+X \\ \eta&=-0.121450(1-s^2)+0.785958s+Y \\ \zeta&=0.771913(1-s^2)-0.890597s+Z \end{aligned}$$

对于 $t_2=11$ 月 10.73701 日，去计算 τ_2，可用以上计算视差时所用的 Δ_2 的近似值.

$$X=-0.669963 \qquad\qquad t_2-\tau_2 \quad 10.7321$$
$$Y=-0.668867 \qquad\qquad T \quad 5.6240$$
$$Z=-0.290097 \qquad\qquad t_2-\tau_2-T \quad 5.1081$$
$$\mathfrak{M}_2 \quad 5.0694$$

表 XXXII 给出

$$s_2=0.067490$$
$$1-s_2^2=0.995445$$

故最后求得

$$\begin{aligned} \xi_2 &\quad -0.040924 \\ \eta_2 &\quad -0.736719 \\ \zeta_2 &\quad +0.418193 \end{aligned}$$

$$\cot\alpha_2=\frac{\xi_2}{\eta_2}=0.055549,\qquad \left.\begin{aligned} \alpha_2&=266^\circ\!.82057 \\ o-c&=-0^\circ\!.00065=-2''\!.3 \end{aligned}\right\}$$

$$\tan\delta_2=\frac{\zeta_2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=0.566768 \qquad \left.\begin{aligned}\delta_2&=+29^\circ\!.54317\\ o-c&=-0^\circ\!.00075=-2''\!.7\end{aligned}\right\}$$

按照习惯将残差 $o-c$ 写为较差坐标的形式:

$$\cos\delta\Delta\alpha=-2''\!.0$$
$$\Delta\delta=-2''\!.7$$

这样大小的残差应当看做是正常的，并不需要去寻求一个非抛物线的轨道．只是在对彗星 1939n 全部观测以及作整个的讨论之时，才可求得确定的根数．现在的工作只是在建立一张寻找这颗彗星的星历表,以上算得的根数业已足够应用.

17．彗星的星历表

一颗新彗星的暂时轨道根数算得之后,我们便为观测者寻找而编制近似的星历表.这张表里载有赤经 α，赤纬 δ，向径 r，以及地心距 Δ，和从末后两量算出的彗星的视星等.

应用的公式已见 16 条．这里只需使四位小数计算,不必考虑光行差的效应。下面是根据以上的根数推出的彗星 1939n 的星历表:

1939n 彗星

1939	α 1939	δ 1939	r	Δ
11 月 17	$18^h47^m49^s$	$+22^\circ\ 7'$	0.966	0.808
21	19 24 10	+16 27	0.983	0.810
25	19 57 22	+10 36	1.005	0.834
29	20 26 56	+ 5 1	1.031	0.877
12 月 3	20 52 54	0 0	1.060	0.936
7	21 15 35	− 4 21	1.093	1.008
11	21 35 35	− 8 2	1.128	1.090
15	21 53 13	−11 7	1.166	1.178
19	22 8 56	−13 40	1.207	1.271
23	22 23 3	−15 47	1.249	1.366
27	22 35 55	−17 33	1.292	1.463
31	22 47 44	−19 2	1.337	1.560

这星历表与国际天文协会电报局(设在哥本哈根)当时几个公布的相差很少。

§ 100　决定任何轨道的拉普拉斯方法

假设已知行星或彗星在 t_0 时的赤道坐标 α, δ 以及这些坐标对于时间的一阶和二阶导数；我们要证明从这些数据可以推导天体的地心距 Δ，以及这距离的一阶导数；于是容易推出天体的地心位置与速度，因而得知其轨道根数（§ 95)．已经解决了这一初步问题之后,我们还要说明,怎样推导对于已知某些时刻所观测到的位置的直角坐标与其导数.

以 x, y, z 表示天体的日心赤道坐标，r 表示其向径；再以 X, Y, Z 表示太阳的地心赤道坐标，R 表示其向径；以 λ, μ, ν 表示 t_0 时天体的地心方向的方向变量．由于下列的

关系我们可以计算这些方向变量的一阶与二阶导数：

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\cos\delta\cos\alpha\\ \mu&=\cos\delta\sin\alpha\\ \nu&=\sin\delta\end{aligned}\right\}$$

$$(\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda'&=-\alpha'\cos\delta\sin\alpha-\delta'\sin\delta\cos\alpha\\ \mu'&=\alpha'\cos\delta\cos\alpha-\delta'\sin\delta\sin\alpha\\ \nu'&=\delta'\cos\delta\end{aligned}\right\}$$

$$(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=0)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda''&=-\alpha''\cos\delta\sin\alpha-\delta''\sin\delta\cos\alpha+2\alpha'\delta'\sin\delta\sin\alpha-(\alpha'^2+\delta'^2)\cos\delta\cos\alpha\\ \mu''&=\alpha''\cos\delta\cos\alpha-\delta''\sin\delta\sin\alpha-2\alpha'\delta'\sin\delta\cos\alpha-(\alpha'^2+\delta'^2)\cos\delta\sin\alpha\\ \nu''&=\delta''\cos\delta-\delta'^2\sin\delta\end{aligned}\right\}$$

$$(\lambda\lambda''+\mu\mu''+\nu\nu''+\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2=0)$$

因

$$\left.\begin{aligned}x&=\lambda\Delta-X\\ y&=\mu\Delta-Y\\ z&=\nu\Delta-Z\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

又因有

$$\left.\begin{aligned}\lambda''\Delta+2\lambda'\Delta'+\lambda\Delta''&=\frac{d^2(x+X)}{dt^2}\\ \mu''\Delta+2\mu'\Delta'+\mu\Delta''&=\frac{d^2(y+Y)}{dt^2}\\ \nu''\Delta+2\nu'\Delta'+\nu\Delta''&=\frac{d^2(z+Z)}{dt^2}\end{aligned}\right\}$$

但克普勒运动的加速度容易表为坐标与向径的函数。若不计入地球和星的质量，则

$$\frac{d^2(x+X)}{dt^2}=-k\left(\frac{x}{r^3}+\frac{X}{R^3}\right)=-\frac{k\lambda\Delta}{r^3}+kX\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right),\ 等\cdots$$

于是

$$\left.\begin{aligned}\lambda''\Delta+2\lambda'\Delta'+\lambda\left(\Delta''+\frac{k\Delta}{r^3}\right)&=kX\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\\ \mu''\Delta+2\mu'\Delta'+\mu\left(\Delta''+\frac{k\Delta}{r^3}\right)&=kY\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\\ \nu''\Delta+2\nu'\Delta'+\nu\left(\Delta''+\frac{k\Delta}{r^3}\right)&=kZ\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

我们要从这个线性方程组计算未知数 Δ 与 Δ'. 首先，

$$\Delta=k\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\frac{D_2}{D_1}$$

式内

$$D_1=\lambda''(\nu\mu'-\mu\nu')+\mu''(\lambda\nu'-\nu\lambda')+\nu''(\mu\lambda'-\lambda\mu')$$
$$D_2=X(\nu\mu'-\mu\nu')+Y(\lambda\nu'-\nu\lambda')+Z(\mu\lambda'-\lambda\mu')$$

若写为这样的形状：

$$r^3=\frac{P}{Q-\Delta}\tag{3}$$

则这方程类似于高斯方法求第一近似值时所用过的一个方程；但这里 r 与 Δ 的关系是精确的，而高斯方程只是超越方程的近似的代数表达式。在方程(3)上再加以下列关系：

$$r^2=\Delta^2-2\Delta(\lambda X+\mu Y+\nu Z)+R^2 \tag{4}$$

由方程(3)与(4)的解，得 r 与 Δ 的数值. 解这两方程的方法是用 § 97 内 4 条所说的内插法，这种逐渐逼近法，可以推到所需要的程度. 还有

$$\Delta'=\frac{\Delta}{2}\frac{D_3}{D_2} \tag{5}$$

设 $$D_3=X(\mu\nu''-\nu\mu'')+Y(\nu\lambda''-\lambda\nu'')+Z(\lambda\mu''-\mu\lambda'').$$

这问题于是得到解决，因为(见 § 95)

$$x=\lambda\Delta-X\cdots$$

$$x'=\lambda'\Delta+\lambda\Delta'-X'\cdots$$

太阳坐标的一阶导数 X', Y', Z' 可从年历里太阳的地心坐标表算出.

这里需有两个注解. 方程组 (2) 里包含有地球和天体的同时的位置. 因此在原则上需将观测者所刊布的平坐标转换为几何坐标，即在平坐标上加入归算到当天所减去了的光行差. 太阳和行星或彗星的位置皆属于改正了光行差的时刻. 如果还需将计算弄得更精密一些，便当将周年光行差的常数项一并考虑(§ 57 与 § 60).

另一方面，我们已经在开普勒运动的假设下计算了加速度，我们可以不计入行星的摄动(只在确定根数的计算时才考虑它们)，但应将地面观测的数据归算到地-月系的引力中心而不归算到地心. 此外，太阳系的坐标 X, Y, Z 也应当归算到这个原点.

设以 ϖ_0 表示太阳的视差，ϖ' 表示月亮的视差，A 和 D 表示月亮的赤道坐标，若地球与月亮的质量之比为 81.45(纽康)，则用第八章里的方法容易证明视差因子(§ 69)应为下列的因数所代替：

$$\left.\begin{aligned}&P_\alpha+\frac{\varpi_0}{82.45\sin\varpi'}\cos D\sec\delta\sin(\alpha-A)\\&P_\delta+\frac{\varpi_0}{82.45\sin\varpi'}[\cos D\sin\delta\cos(\alpha-A)-\sin D\cos\delta]\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

这是由于归算到引力中心而得来的.

最后，若令

$$d=\frac{\sin\varpi_0}{82.45\sin\varpi'}$$

则加在太阳的坐标上的改正值如下：

$$\begin{aligned}\Delta X&=-d\cos D\cos A\\\Delta Y&=-d\cos D\sin A\\\Delta Z&=-d\sin D\end{aligned} \tag{7}$$

直到现在，我们只写出了精确的方程，而没有使用任何近似的展开式. 只在光行差与归算到引力中心的计算里涉及到地心距之时，我们才使用了叠代法. 我们还未进入问题的困难部分，即对历元 t_0 作下表中的数量的计算：

$$\begin{Vmatrix}\alpha & \delta\\ \alpha' & \delta'\\ \alpha'' & \delta''\end{Vmatrix} \tag{8}$$

和以前几节研究过的情形一样，计算者须处理 t_1, t_2, t_3 等时期天体的赤道坐标 α, δ 的若干个数值. 这工作是导出表(8)内的文字的数值. 为此，我们假设赤道坐标可按泰劳

级数展开;从历元 t_0 开始计算的时间以 θ 表示,则得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i&=\alpha_0+a_1\theta_i+b_1\theta_i^2+c_1\theta_i^3+d_1\theta_i^4+\cdots\\\delta_i&=\delta_0+a_2\theta_i+b_2\theta_i^2+c_2\theta_i^3+d_2\theta_i^4+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

要决定的数量为

$$\begin{Vmatrix}\alpha_0 & \delta_0\\ a_1 & a_2\\ 2b_1 & 2b_2\end{Vmatrix}\tag{10}$$

若有 q 个位置则可写出 q 个象以上那样类型的 q 个方程,其解将提供展开式(9)的每一式里第一个常数,这里须假设展开式里第 q 项以后的数为零或略而不计.

我们只讨论有实际意义的一个情形,即 3 个位置的情形. 于是方程式迄至在二阶项. 这些方程将给出待求之量的近似值,而以下面的符号去表示它们:

$$\begin{Vmatrix}A_0 & D_0\\ A_1 & A_2\\ 2B_1 & 2B_2\end{Vmatrix}\tag{11}$$

这些量便是下列方程组中的未知量:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i&=A_0+A_1\theta_i+B_1\theta_i^2\\\delta_i&=D_0+A_2\theta_i+B_2\theta_i^2\end{aligned}\quad(i=1,\ 2,\ 3)\right\}\tag{12}$$

容易决定这一计算所达到的近似程度,因为据定义:

$$\left.\begin{aligned}(A_0-\alpha_0)+(A_1-a_1)\theta_i+(B_1-b_1)\theta_i^2&=c_1\theta_i^3+d_1\theta_i^4+\cdots\\(D_0-\delta_0)+(A_2-a_2)\theta_i+(B_2-b_2)\theta_i^2&=c_2\theta_i^3+d_2\theta_i^4+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

$$(i=1,\ 2,\ 3)$$

解这一线性方程组,容易求得

$$\begin{aligned}A_0&=\alpha_0+c_1\theta_1\theta_2\theta_3+d_1\theta_1\theta_2\theta_3(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\cdots\\A_1&=a_1-c_1(\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_1)-d_1(\theta_1+\theta_2)(\theta_2+\theta_3)(\theta_3+\theta_1)+\cdots\\B_1&=b_1+c_1(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+d_1(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_1)+\cdots\end{aligned}$$

以及对于赤纬的系数的类似方程式. 由此可见, A_0 是 α_0 的近似值, 差数为时间的第三阶; A_1 是 a_1 的近似值,差数为时间的第二阶, B_1 是 b_1 的近似值,差数为时间的第一阶. 可是若将 t_0 选为 3 个观测期的算术平均数,即若使

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=0$$

则 B_1 的近似度可以为二阶的. 所以若使 $t_0=t_2$, 便不恰当,因为这样便给出两个未知数: $A_0=\alpha_2$, $D_0=\delta_2$. 这一微小的优点大大地被二阶导数上的误差所抵消了. 平均时期的规则,曾为潘嘉雷(H. Poincaré)指出其重要性,应当严格地遵守.

就方程组(12)而论,容易证明未知数 B 的数值,与时间起点 t_0 的选择无关;但方程组(9)内的系数 b 的数值显然与 t_0 的选择有关. 潘嘉雷规则使 t_0 的选择为令 $B-b$ 之差为可能的小量; 当 t_0 接近平均期时, 这一偏差达到极小值. 我们可于下节的数字例子内看出二阶导数的微小变化比一阶导数的等量变化更能影响轨道根数. 因此二阶导数之值应选用其最近似的.

最后还需说到, 高斯方程的第一近似值, 差数为时间的第二阶; 欲使拉普拉斯方法得到同一近似程度,便应遵守潘嘉雷规则,否则其中两个数据只差时间的第一阶.

现在回头来讨论轨道的计算. 表(11)内的数据由方程(3)与(4)里的方向变量为中介体而来,提供地心距与向径以及地心距的一阶导数;由此按 § 95 的方法去计算轨道根数. 不需说,这样得出的解亦具有表(11)里的数据的近似性.

由于这种困难,计算者多不喜用拉普拉斯方法去计算轨道. 因此勒施内尔(Leuschner)提出一种改进拉普拉斯第一近似结果的方法,即将略去的高阶量一并加以考虑. 潘嘉雷本人亦两度讨论过这一问题[1].

最近更有人提出逐渐逼近法不用于计算的结果上(即不用于地心距与其导数或向径上),而用于计算的数据上,即表(11)内的数量上. 这便是虚位置方法的应用[2]. 展开计算的坐标,即由表(11)的数据所规定的轨道的坐标,而将其表示为如下的形式:

$$\begin{aligned}(\alpha_c)_i &= A_0+A_1\theta_i+B_1\theta_i^2+\gamma_1\theta_i^3+\delta_1\theta_i^4+\cdots\\ (\delta_c)_i &= D_0+A_2\theta_i+B_2\theta_i^2+\gamma_2\theta_i^3+\delta_2\theta_i^4+\cdots\\ &(i=1,\ 2,\ 3)\end{aligned} \tag{14}$$

系数 γ_1, γ_2, δ_1, $\delta_2\cdots$ 是表(11)里 6 个量的函数. 为固定概念计,γ_1 与 A_0, D_0, A_1, A_2, B_1, B_2 有关,犹如 c_1 依赖于 α_0, δ_0, a_1, a_2, b_1, b_2 一样. 由于表(11)里的量是表(10)里的量的近似值,故合理地可假定 γ_1 是 c_1 的近似值,γ_2 是 c_2 的近似值等.

于是计算由展开式(9)所表示的观测位置与展开式(14)所表示的计算位置两者之差 $o-c$. 考虑了方程(13)之后,其表达式便可写为如下的形式:

$$\left.\begin{aligned}(o-c)_\alpha &= -(\gamma_1\theta_i^3+\delta_1\theta_i^4+\cdots)\\ (o-c)_\delta &= -(\gamma_2\theta_i^3+\delta_2\theta_i^4+\cdots)\end{aligned}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{15}$$

由此可以写这样一个定理:偏差 $o-c$ 提供(可能有符号之差)展开式里略去之项的一种近似估计,这些展开式是对于介入到这些方程里去的每个坐标和每个观测,用以计算表(11)中之量的.

由此得出导至二阶近似值的规则如下:若在方程组(12)里将由第一近似计算而来的偏差 $o-c$ 加在(代数和)观测的坐标里去,便大约抵偿了所略去的项,因而这些方程提供表(11)里的量的改进值. 于是,

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i-(\gamma_1\theta_i^3+\delta_1\theta_i^4+\cdots) &= \alpha_0+a_1\theta_i+b_1\theta_i^2+(c_1-\gamma_1)\theta_i^3+(d_1-\delta_1)\theta_i^4+\cdots\\ \delta_i-(\gamma_2\theta_i^3+\delta_2\theta_i^4+\cdots) &= \delta_0+a_2\theta_i+b_2\theta_i^2+(c_2-\gamma_2)\theta_i^3+(d_2-\delta_2)\theta_i^4+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

由于略去二阶以后之项,误差大大地减少了.

再用这些新数据计算轨道,然后再求偏差 $o-c$,这次比由第一近似计算而来的偏差显然减少. 将这些偏差加在方程组(12)的右端,便得表(11)里的数的新值,又用它们去作第三近似计算. 照此下去,这种叠代法可以进行到最后 $o-c$ 可以忽略的情形而后停止.

现在总结以上所说的演算的机制. 设 A, B, C 表示星的 3 个观测位置;A_c, B_c, C_c 表示根据第一近似结果算出的位置. 若不用 A, B, C 三位置,而在方程组(12)内引入虚构位置 A_f, B_f, C_f,这是对于观测位置分别与计算位置为对称的三点,由于连续性,它们的偏差大致与前者有相同的数值,但这样计算出的位置比 A_c, B_c, C_c 更接近于观测的位置. 可是,利用上述的规则,将偏差 $o-c$ 加在对应的观测坐标之上,便得虚构位置的坐

1) 见 Tisserand: Leçon sur la Determination des Orbites 的序言与 Bulletin Astronomique, 23, 1906.

2) Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 231 p. 673, 1950.

标. 我们可以同样的方式过渡到以下的逐步近似计算去.

这种虚构位置的方法相当迅速地、精确地表示出三个特殊位置，但和高斯方法一样，不能作为问题的确定解. 因此计算者不进行到第三或第四近似值，而宁肯对由此求得的初始轨道加以改进: 即对不但用过的 3 个观测而且对一切掌握了的观测作尽量好的表达. 这种改进的拉普拉斯方法有一显著的优点：即由初始轨道到确定轨道不需使用任何新的设计了.

令

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \delta_0 \\ \alpha' & \delta' \\ \alpha'' & \delta'' \end{Vmatrix} \tag{17}$$

为用以求初始轨道的数据，且令

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0+f\Delta\alpha_0 & \delta_0+g\Delta\delta_0 \\ \alpha'+h\Delta\alpha' & \delta'+j\Delta\delta' \\ \alpha''+l\Delta\alpha'' & \delta''+m\Delta\delta'' \end{Vmatrix} \tag{18}$$

为这些数据相当于真轨道的数值，在这些式子里，$\Delta\alpha_0$, $\Delta\delta_0$, $\Delta\alpha'$, $\Delta\delta'$, $\Delta\alpha''$, $\Delta\delta''$ 是预先选定的增量，为明确起见，在 § 101 的数字例子里，这些增量之值为

$$\Delta\alpha_0=\Delta\delta_0=+0^\circ\!.001$$
$$\Delta\alpha'=\Delta\delta'=+0.000001$$
$$\Delta\alpha''=\Delta\delta''=+0.0000001$$

至于 f, g, h, j, l, m 是用以决定数字值的因子.

在前一近似计算之末，我们计算了不只是用过了 3 个观测，而是一切观测的偏差 $o-c$. 以符号 $\Delta^q(\alpha)$ 与 $\Delta^q(\delta)$ 表示对于 q 列观测的偏差.

现在给与 α_0 以增量 $\Delta\alpha_0$，而不改变表(17)里的其他 5 个数字，去计算对应的辅助轨道. 这样求得的偏差 $o-c$ 对于以前的计算的变化，以符号 $\Delta_1^q(\alpha)$ 与 $\Delta_1^q(\delta)$ 表示. 以相同的方法给与 δ_0 以增量 $\Delta\delta_0$，而不改变其值 5 个量，去计算出第二辅助轨道；这样再求得偏差 $o-c$ 的变化 $\Delta_2^q(\alpha)$ 与 $\Delta_2^q(\delta)$；如此类推. 这样建立起参数变值表之后，将多变数的函数的全微分的定理应用在偏差 $\Delta^q(\alpha)$ 与 $\Delta^q(\delta)$ 上去，于是对于每一观测有如下两个方程:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^q(\alpha)&=f\Delta_1^q(\alpha)+g\Delta_1^q(\alpha)+h\Delta_3^q(\alpha)+j\Delta_4^q(\alpha)+l\Delta_5^q(\alpha)+m\Delta_6^q(\alpha) \\ \Delta^q(\delta)&=f\Delta_1^q(\delta)+g\Delta_2^q(\delta)+h\Delta_3^q(\delta)+j\Delta_4^q(\delta)+l\Delta_5^q(\delta)+m\Delta_6^q(\delta) \end{aligned}\right\}$$

用最小二乘法或其他适当的方法去解含这 6 个未知数的方程组，便得这些未知数之值，从而算出表(18)内的数量之值. 再用这些数去计算一个新的轨道.

若由这一新解而得的偏差 $o-c$ 表现观测上有偶然误差，则这一解便不能加以改进；否则我们可以再值用一次这种变化的方法；若有必要，可将这种叠代法进行到欲达到的境界. 但若要得到确定的轨道，便需将观测期间内，这颗星所受的摄动一并计算进去.

§ 101 拉普拉斯方法的数字应用

下面给出小行星 1342 号(Brabantia)的 6 个观测，这是 § 97 已经用过，而将再用拉普拉斯方法去表为偏差尽量小的一个轨道. 这里平坐标表为度与其小数.

$N°$		T.U.		α1935	δ1935
1	1935	2 月	13.05561	156°.36830	− 5°.45519
2			28.90839	150.49521	− 8.65031
3		3 月	9.96207	147.31216	− 9.91333
4			27.77216	143.08230	−11.36478
5		4 月	8.76165	142.23450	−11.88941
6			11.75943	142.27913	−12.00067

在实际计算里，视差、行星光行差和归算到引力中心的计算，都该使用逐渐逼近的方法. 但是我们这里要表明的是虚构位置的方法与前节所说的参数变值法的收敛性，先假定由初步的演算已经得出相当正确的地心距. 事实上，求出这些地心距的解近似度不够，因而对于参数变值法所提供的最后解上的误差是没有什么影响的[1].

由于最后要使用到 6 个位置，我们所选择的历元 t_0 应与两个极端观测的中间时刻相差尽量少. 这样，便使我们选择 2, 3, 4 三个位置来决定初始轨道.

为了将平位置转化为对于引力中心的几何位置，如前节所述，应作如下的改正：1. 减去 t 时的光行时差；2. 将地面位置改至引力中心位置；3. 在坐标上加入已经改正了的恒星光行差. 这些计算的细节不列于此，现列出其结果于下：

$N°$		$t-\tau$	θ	$\alpha_{引力中心}$	$\delta_{引力中心}$
2	2 月	28.90327	−11ᵈ.97229	150°.49929	− 8°.65233
3		37.95686	− 2.91869	147.32036	− 9.91739
4		55.76655	+14.89099	143.08454	−11.36740
	$t_0=$	40.87556			

平均历元是 3 月 12.87556 日. 我们便按这个时刻，从天文年历里取出太阳的坐标与其导数(关于由表求内插值与求导数的方法见本书附录里的一章)：

X	+0.9826398	X'	+0.00286555
Y	−0.1369486	Y'	+0.01565867
Z	−0.0593993	Z'	+0.00679157

这些坐标按 § 100 所说过的，归算到引力中心. 同样算出对于 3 个观测在 $t-\tau$ 时的太阳的坐标：

	2	3	4
X	+0.927366	+973018	+992318
Y	− 320111	−182456	+098187
Z	− 138842	−079137	+042585

计算时使用 6 位三角真数表(间距百分之一度). 在某些计算里保留多一位小数，以便核验符合的程度.

1) 作者在 Bulletin Astronomique, 16, 1951, 85 页上有一篇文章，表达同一数字例子的两种解法，演算过程虽稍有差别，但最后得出的根数差异很少.

第一近似计算

1. 历元 t_0 时星的赤道经纬与其导数

若设
$$q_1=\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\theta_3-\theta_2}\qquad q_2=\frac{\alpha_4-\alpha_3}{\theta_4-\theta_3}$$

则
$$B_1=\frac{q_2-q_1}{\theta_4-\theta_2}\qquad A_1=q_1-B_1(\theta_2+\theta_3)=q_2-B_1(\theta_3+\theta_4)$$
$$\alpha_0=\alpha_3-A_1\theta_3-B_1\theta_3^2$$
$$\alpha_0'=A_1$$
$$\alpha_0''=2B_1$$

(同样可算赤纬). 将度转化为弳(为求导数)利用因子 0.0174532925. 于是求得

$$\alpha_0=146^\circ\!.44290\qquad \alpha_0'=-0.00503225\qquad \alpha_0''=+0.0001472046$$
$$\delta_0=-10^\circ\!.24936\qquad \delta_0'=-0.00187458\qquad \delta_0''=+0.0000757729$$

因为我们要将残差的数值算到尽量高的精确度,所以保留了所有的有效数字。

2. 方向余弦与其导数

应用 § 100 的公式,按照如下的安排计算:

	$\lambda=\cos\delta\cos\alpha$	$\mu=\cos\delta\sin\alpha$	$\nu=\sin\delta$
	λ'	μ'	ν'
α'	$-\mu$	$+\lambda$	0
δ'	$-\sin\delta\cos\alpha$	$-\sin\delta\sin\alpha$	$+\cos\delta$
	λ''	μ''	ν''
α''	$-\mu$	$+\lambda$	0
δ''	$-\sin\delta\cos\alpha$	$-\sin\delta\sin\alpha$	$+\cos\delta$
$2\alpha'\delta'$	$+\sin\delta\sin\alpha$	$-\sin\delta\cos\alpha$	0
$\alpha'^2+\delta'^2$	$-\lambda$	$-\mu$	0
δ'^2	0	0	$-\sin\delta$

于是求得

λ	-0.820037	λ'	$+0.003015235$	λ''	-0.00006951476
μ	$+0.543947$	μ'	$+$ 3942252	μ''	$-$ 13174415
ν	-0.177933	ν'	$-$ 1844668	ν''	$+$ 07518904

下列的恒等式可以作为验算之用:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1\\&\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=0\\&\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2+\lambda\lambda''+\mu\mu''+\nu\nu''=0\end{aligned}\right\}$$

3. 拉普拉斯方程与其解

若设
$$\left.\begin{aligned}D_1&=\lambda''(\nu\mu'-\mu\nu')+\mu''(\lambda\nu'-\nu\lambda')+\nu''(\mu\lambda'-\lambda\mu')\\D_2&=X(\nu\mu'-\mu\nu')+Y(\lambda\nu'-\nu\lambda')+Z(\mu\lambda'-\lambda\mu')\\D_3&=X(\mu\nu''-\nu\mu'')+Y(\nu\lambda''-\lambda\nu'')+Z(\lambda\mu''-\mu\lambda'')\end{aligned}\right\}$$

则

$$\left.\begin{aligned}r^2&=\Delta^2-2\Delta(\lambda X+\mu Y+\nu Z)+R^2\\\Delta&=\frac{kD_2}{D_1}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\quad(k=0.00029591221)\\\Delta'&=\frac{\Delta D_3}{2D_2}\end{aligned}\right\}$$

于是求得

$$\left.\begin{aligned}\frac{k}{D_1}&=3923.02\\D_2&=-0.0002733808\\D_3&=-0.000001646937\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}r^2&=\Delta^2+1.739449\Delta+0.987864\\r^3&=\frac{1.072478}{1.092302-\Delta}\\\Delta'&=+0.003012174\end{aligned}\right\}$$

前两个方程的解法已经在讲高斯方法时仔细地叙述过，便不在此重做了．求得的结果如下：

$$\left.\begin{aligned}r&=1.858241\\\Delta&=0.925161\\\Delta'&=+0.00278674\end{aligned}\right\}$$

4．日心坐标与其导数

$$x=\lambda\Delta-X,\ \cdots;\qquad x'=\lambda'\Delta+\lambda\Delta'-X',\ \cdots$$

求得

x	-1.741306	x'	-0.00236120
y	$+0.640188$	y'	-0.01049561
z	-0.105218	z'	-0.00899403

用这些数值计算 r 与 V，保留其附加的小数：

r	1.8582406	V^2	0.00019662567
		k	0.00029591221
		V	0.01402233

5．星历表的计算

这里所说的星历表不是在得到最后的近似值以后，根据轨道根数算出来的．现在需要知道的只是对于每个观测的偏近点角，以及给出行星的日心坐标的下列关系中的系数 A 与 B(§ 87)：

$$x=A_x(\cos u-e)+B_x\sin u,\ \cdots$$

但因

$$x'=\frac{n}{1-e\cos u}(-A_x\sin u+B_x\cos u),\ \cdots$$

n 表示平均运动．由此推出表达系数 A_x 与 B_x 的算式如下：

$$A_x=x\frac{a}{r}\cos u-\frac{x'\sin u}{n}$$

$$B_x=x\frac{a}{r}\sin u+\frac{x'(\cos u-e)}{n},\ \cdots$$

由此易见需待计算之量只有 a, n, e 与对应于 t_0 时的偏近点角 u_0 与平近点角 M_0

首先

$2:r$	1.0762869
$V^2:k$	0.6644730
$1:a$	0.4118139

$$a=2.428281 \qquad n=a^{-\frac{3}{2}}\times 0^\circ\!.98560767$$

$$a^{-\frac{3}{2}}=0.2642721$$

$$n=0^\circ\!.2604686 \qquad \frac{1}{n}=219.9719\ (n\ 表为弳)$$

跟着计算面积常数，向径与偏心率：

$$C^2=(xy'-yx')^2+(yz'-zy')^2+(xz'-zx')^2=0.0006762001$$

$$p=\frac{C^2}{k}=2.285138$$

$$1-e^2=p\times\frac{1}{a}=0.94105139$$

$$e=0.2427934=13^\circ\!.91103$$

用 § 95 里的公式计算 u_0:

$$\sin\beta=\frac{xx'+yy'+zz'}{rV}$$

求得

$$\sin u=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\tan\beta$$

$\sin\beta$	$-\ 0.0637551$
$\cos\beta$	0.9979656
$\tan\beta$	$-\ 0.0638851$
$\sin u_0$	$-\ 0.255252$
$\cos u_0$	0.966875
u_0	$-14^\circ\!.78852$
$-e\sin u_0$	$+\ 3.55082$
M_0	$-11^\circ\!.23770$

最后得

$$A_x=1.263476x+56.1483x'$$

$$B_x=0.333554x+159.2775x'$$

同样的公式可以计算 y 与 z 的系数。

于是便得所要寻求的公式：

$$\left.\begin{aligned}x&=-2.332676(\cos u-e)+0.204734\sin u\\ y&=+0.219552(\cos u-e)-1.885252\sin u\\ z&=-0.637940(\cos u-e)-1.397451\sin u\end{aligned}\right\}$$

(验算：$\Sigma A^2=a^2$; $\Sigma B^2=a^2(1-e^2)$; $\Sigma AB=0$; 还需确定这些公式是否确切给出对于 $u=u_0$ 时 x, y, z 的数值)

6. 残差 $o-c$ 的计算

$$M=M_0+n\theta=u-e\sin u$$

	M	u
2	$-14^\circ.35611$	$-18^\circ.85084$
3	-11.99793	-15.78124
4	$-\ 7.35906$	$-\ 9.70384$

	x	y	z
2	-1.707352	$+0.763606$	$+0.002689$
3	-1.734074	$+0.670693$	-0.078949
4	-1.767452	$+0.480874$	-0.238378

在 x, y, z 上分别加上对于每个观测时刻太阳对引力中心的坐标 X, Y, Z (见本节开始处),使得行星对引力中心的坐标:

	ξ	η	ζ	$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$
2	-0.779986	$+0.443495$	-0.136153	0.907526
3	-0.761056	$+0.488237$	-0.158086	0.917918
4	-0.775134	$+0.579061$	-0.195793	0.987157

于是

$$\tan\alpha=\frac{\eta}{\xi}\qquad\qquad \sin\delta=\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

计算给出

η	α_c	$o-c$	δ_c	$o-c$
2	$150^\circ.37771$	$+0^\circ.12158$	$-\ 8^\circ.62850$	$-0^\circ.02383$
3	147.31874	$+\ \ 162$	$-\ 9.91703$	$-\ \ 36$
4	143.23857	$-\ \ 15403$	-11.43983	$+\ \ 7248$

这里的残差是观测减计算。

第二近似计算

7. 虚构位置

将观测的坐标加上与第一近似值里相当的残差,便得虚构位置的坐标如下:

α_f	δ_f
$150^\circ.62087$	$-\ 8^\circ.67616$
147.32198	$-\ 9.91775$
142.93054	-11.29492

利用 1 条内的方法得出如下的第二近似值:

α_0	$146^\circ.41171$	α_0'	-0.00521987	α_0''	$+0.0001530655$
δ_0	$-\ 10^\circ.24021$	δ_0'	-0.00181485	δ_0''	$+0.0000777190$
λ	$-\ \ 0.819765$	λ'	$+0.003110508$	λ''	-0.0000716671
μ	$+\ \ 0.544409$	μ'	$+\ \ 4100575$	μ''	$-\ \ 1372666$
ν	$-\ \ 0.177776$	ν'	$-\ \ 1785958$	ν''	$+\ \ 770665$

8. 第二解,残差

$$\frac{k}{D_1}=3106.56 \qquad D_2=-0.000337404 \qquad D_3=-0.00000214998$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \Delta^2+1.739060\Delta+0.987864 \\ r^3 &= \frac{1.048166}{1.067540-\Delta} \\ \Delta' &= +0.00318607\Delta \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= 1.830663 \\ \Delta &= 0.896694 \\ \Delta' &= +0.00285693 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} a &= 2.285038 \\ e &= 0.206763 = 11^\circ\!.84666 \\ n &= 0^\circ\!.2853408 \\ u_0 &= -15^\circ\!.90494 \\ M_0 &= -12^\circ\!.65846 \end{aligned}$$

计算的过程与第一近似计算完全相似,现列出其最后结果如下:

n	α_c	$\Delta(\alpha)$	δ_c	$\Delta(\delta)$
2	150°.49522	+0°.00407	− 8°.65029	−0°.00204
3	147.32036	0	− 9.91744	+ 12
4	143.08714	− 260	−11.37187	+ 447

$(1''=0^\circ\!.00028)$

将这些残差和 6 条内的残差比较,可见小了不少. 为预备利用其他 3 个观测,尚须作第三近似计算。

第 三 近 似 计 算

9. 新的虚构位置

将新的残差加在 7 条内的虚构坐标里去:

n	α_f	δ_f
2	150°.62494	− 8°.67820
3	147.32198	− 9.91763
4	142.92791	−11.29045

使用 1 条里的公式,求得第三近似值如下:

α_0	146°.41080	α_0'	−0.00522477	α_0''	+0.0001534599
δ_0	− 10°.23939	δ_0'	−0.00181063	δ_0''	+0.0000777263

10. 第三解,残差

λ	−0.819759	λ'	+0.003112605	λ''	−0.0000718520
μ	+0.544423	μ'	+ 4104991	μ''	− 1376046
ν	−0.177762	ν'	− 1781793	ν''	+ 0770712

$$\frac{k}{D_1}=3096.66 \qquad D_2=-0.000340182 \qquad D_3=-0.00000223085$$

$$\left.\begin{aligned} r^2&=\Delta^2+1.739054\Delta+0.987864 \\ r^3&=\frac{1.053428}{1.072899-\Delta} \\ \Delta'&=+0.003278914\Delta \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} r&=1.836610 \\ \Delta&=0.902858 \\ \Delta'&=+0.00296039 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a&=2.285697 \\ e&=0.202932=11^\circ\!.62712 \\ n&=0^\circ\!.2852173 \\ u_0&=-14^\circ\!.48941 \\ M_0&=-11^\circ\!.58029 \end{aligned}$$

由于预知这一新解是很近似的，我们有兴趣去计算 6 个观测的残差. 另外，由于地心距已经知道，更好去计算行星的地面坐标，面不计算它对引力中心的坐标，这样便可消除由于归算到引力中心和光行差的计算而来的误差. 因此，将行星的日心位置(对于改正了行星光行差的时间面计算的)和与观测同时的太阳的地面坐标(记为 X, Y, Z) 一并列入下表：

	x	y	z
1	-1.622753	$+0.903039$	$+0.147628$
2	1.687217	750009	+ 006000
3	1.715170	658537	− 075022
4	1.750497	471433	− 233245
5	1.759190	341232	− 337889
6	-1.759441	$+0.308269$	-0.363713

	X	Y	Z
1	$+0.792885$	-0.539853	-0.234133
2	927439	− 320079	− 138803
3	973094	− 182353	− 079071
4	992337	+ 098218	+ 042629
5	952629	+ 283650	+ 123058
6	$+0.936279$	$+0.328421$	$+0.142473$

	ξ	η	ζ	$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$
1	-0.829868	$+0.363186$	-0.086505	0.909982
2	759778	429930	132803	0.883028
3	742076	476184	154093	0.895083
4	753160	569651	190616	0.967287
5	806561	624882	214831	1.042675
6	-0.823165	$+0.636690$	-0.221240	1.033918

	α_c	$\Delta(\alpha)$	δ_c	$\Delta(\delta)$
1	$156^\circ.36375$	$+0^\circ.00455$	$-5^\circ.45488$	$-0^\circ.00031$
2	150.49609	− 88	− 8.64982	− 49
3	147.31203	+ 13	− 9.91314	− 19
4	143.08026	+ 204	−11.36520	+ 42
5	142.23329	+ 121	−11.89029	+ 88
6	142.27928	− 15	−12.00212	+ 145

表中偏差是对于观测的粗略数据而计算的.

2, 3, 4 三个位置的残差有显著的减少(特别是赤纬), 但这不能看做是确定解. 因此还需使用参数变值法,去迅速地达到正确表达 6 个观测的确定解.

第四近似计算

11. 参数变值计算

给与 α_p 以一增量 $\Delta\alpha_p = +0^\circ.001$, 而不改变第三近似值里的其他数据. 这样计算得的坐标, 对于 10 条里的坐标, 其增量为 $\Delta_1^q(\alpha)$ 与 $\Delta_1^q(\delta)$, 为计算对应的轨道, 将按以上的演算过程,来加以决定.

对于赤纬亦作这样计算; 它将给出对应的增量为 $\Delta_2^q(\alpha)$ 与 $\Delta_2^q(\delta)$. 照此类推. 下表所提供的坐标的变量,是按如下的给定增量而算出的:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_0 &= \Delta\delta_0 = +0^\circ.001 \\ \Delta\alpha_0' &= \Delta\delta_0' = +0.000001 \quad (\text{弪}) \\ \Delta\alpha_0'' &= \Delta\delta_0'' = +0.0000001 \quad (\text{弪}) \end{aligned}\right\}.$$

变化的单位是 $0^\circ.00001$.

q		α_0	δ_0	α_0'	δ_0'	α_0''	δ_0''	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ^q
1	α	+118	− 54	−132	− 82	+654	−1202	+455
2		102	− 6	− 68	− 13	+ 87	− 88	− 88
3		100	0	− 17	− 5	+ 12	0	+ 13
4		97	+ 10	+ 83	+ 9	− 26	+ 176	+204
5		85	+ 45	+130	+ 63	−232	+ 940	+121
6		+ 77	+ 57	+151	+ 93	−344	+1220	− 15
1	δ	+ 13	+ 87	0	−162	+149	0	− 31
2		+ 2	98	0	− 78	+ 10	0	− 49
3		0	100	0	− 18	0	0	− 19
4		+ 1	100	0	+ 88	− 8	+ 52	+ 42
5		+ 6	100	0	+147	− 10	+ 164	+ 88
6		+ 9	+100	0	+154	− 10	+ 202	+145
		f	g	h	j	l	m	

现在的问题是将上表最后一列的数字代入下列线性方程, 去表达由第三近似计算而

来的残差：

$$\Delta^q = f\Delta^q_1 + g\Delta^q_2 + h\Delta^q_3 + j\Delta^q_4 + l\Delta^q_5 + m\Delta^q_6$$

这里有含6个未知数的12个方程式，可用最小二乘法去解．但为简化计，亦可用下列比较迅速的解法，而且亦可达到所需要的近似数值．

先以图解法表示残差，求得 f, g, h 的暂用数值．将这3个数值代入前6个方程以求比较重要的 h, l, m 的3个数字．于是剩下的是含3个未知数的6个方程，可将其两两组合为3个方程，以求 h, l, m．这样求得的数值再代入最后6个方程；去算 g 和 j 的确定值．最后更将 g, j, l 与 m 之值代入前6个方程以求 f，而将 h 之值加以改正．这一种解法自然可用叠代法加以改进，直到残差中没有出现系统差而停止．

这里求得

$$f=+0.26 \qquad g=-0.08 \qquad h=+3.06$$
$$j=+1.09 \qquad l=+1.100 \qquad m=-0.154$$

和如下的残差(单位：0°00001)：

α	δ
+13	−14
− 2	+33
+31	+15
−29	−29
+32	−30
−32	+25

($1''=0°00028$)

(由最小二乘法所求得的结果，和简捷法所得的相近：

$f=+0.36$, $g=-0.06$ $h=+2.87$ $j=+1.02$, $l=+1.037$ $m=-0.154$)

12. 最后解

将以上得出的改正数用到第三近似值所给出的数据里去，便得第四近似值如下：

$\alpha_0=$	146°41106	$\alpha'_0=$	+0.00522171	$\alpha''_0=$	+0.0001535699
$\delta_0=$	− 10°23947	$\delta'_0=$	−0.00180954	$\delta''_0=$	+0.0000777109
λ	− 0.819761	λ'	+0.003110764	λ''	−0.00007193653
μ	+ 0.544420	μ'	+ 4102597	μ''	− 13767360
ν	− 0.177763	ν'	− 1780721	ν''	+ 07705535

$$\frac{k}{D_1}=3106.105 \qquad D_2=-0.000340007 \qquad D_3=-0.00000225815$$

$$\left.\begin{array}{l} r=1.839626 \\ \Delta=0.905983 \\ \Delta'=+0.00300854 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=2.288511 \\ e=0.201924 \\ n=0°2846916 \\ u_0=-13°73858 \\ M_0=-10.99094 \end{array}$$

对于第四近似值的残差(单位 0°00001)：

$\Delta(\alpha)$	$\Delta(\delta)$
+32	−31
− 9	+15
+37	+ 4
−37	−16
+ 6	−12
−22	+21

还可写为

$+0^{s}.08$	$-1''.1$
− 02	+0.5
+ 09	+0.1
− 09	−0.6
+ 01	−0.4
− 05	+0.7

由此可见，表内的误差相当没有规律，可能是偶然性的，可是仔细研究之后，赤经上可能还有一点系统性的误差，这是可由 f, g, h 等另一组新的改正值而消去的(即将新的残差代替由第三近似计算而来的残差，用 11 条里的方程来计算)。但是欲得确定的轨道根数，还需考虑摄动，因此就停止在这一近似值了。

13. 根数的计算

现在使用 § 95 里的公式，据已知一点的坐标与其速度来求椭圆轨道。在 12 条的计算过程里，得出面积常数在赤道系的三坐标面上的投影，即

$$\gamma_1=+0.019361569 \quad (xy'-yx')$$
$$\gamma_2=-0.006681043 \quad (yz'-zy')$$
$$\gamma_3=+0.015168386 \quad (xz'-zx')$$

将这三个常数转换到黄道系坐标而去:

$$\left.\begin{aligned} c_1&=\gamma_1\cos\varepsilon+\gamma_3\sin\varepsilon=C\cos i\\ c_2&=\gamma_2=C\sin i\sin\Omega\\ c_3&=-\gamma_1\sin\varepsilon+\gamma_3\cos\varepsilon=C\sin i\cos\Omega\end{aligned}\right\}$$

这里的黄赤交角需采用 1935.0 的，即 $23°26'51''.86$，于是求得

$$\left.\begin{aligned} c_1&=+0.02379845\\ c_2&=-0.00668104\\ c_3&=+0.00621162\end{aligned}\right\}$$

故

$$\tan\Omega=\frac{c_2}{c_3}=-1.075571 \qquad \Omega=312^{\circ}.91480$$

$$\tan i=\frac{\sqrt{c_2^2+c_3^2}}{c_1}=0.383324 \qquad i=20^{\circ}.97303$$

令 x_1, y_1, z_1 为行星的日心黄道坐标:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x \\ y_1&=y\cos\varepsilon+z\sin\varepsilon \\ z_1&=-y\sin\varepsilon+z\cos\varepsilon \end{aligned}\right\}$$

于是

$$r\sin(v+\omega)=\frac{z_1}{\sin i}$$

$$r\cos(v+\omega)=x_1\cos\Omega+y_1\sin\Omega$$

因此求得

$$\left.\begin{aligned} r\sin(v+\omega)&=-0.961128 \\ r\cos(v+\omega)&=-1.568585 \end{aligned}\right\}$$

故

$$(\text{校验 } r=1.839627)$$

$$\tan(v+\omega)=0.612736$$

$$v+\omega=211^\circ\!.49729$$

但 $\sin v=\dfrac{p}{er}\tan\beta$　或　$\tan v=\dfrac{p}{p-r}\tan\beta$

由 12 条的计算给出

$$p=2.195200 \qquad \tan\beta=-0.0489641$$

故

$$\sin v=-0.289357 \qquad v=-16^\circ\!.81946$$

因此

$$\omega=228^\circ\!.31675$$

若欲得 3 月 1 日 0 时的平近点角，还需减去 t_0 时的平近点角，即 $3^\circ\!.38087$，于是

$$M=345^\circ\!.62819 \quad (3\text{ 月 }1\text{ 日}).$$

确定的结果汇集如下：

M	$345^\circ\!.62819$	(1935 年 3 月 1 日)	1342 小行星 (Brabantia)
n	$0^\circ\!.2846916$		
a	2.288511		
e	0.201924		
Ω	$312^\circ\!.91480$	1935.0	
ω	$228^\circ\!.31675$	1935.0	
i	$20^\circ\!.97303$	1935.0	

这些根数比较 § 97 里所得出的更为可取，因为这里是据 6 个而非 3 个位置求得的.

实际计算里，数据的归算是用逐渐逼近的方法，先设地心距为 1，以后计算里所用的地心距是前一近似计算所得的数值.

第十二章 摄动概论

这一章对摄动理论作扼要的说明．首先简略地叙述利用特殊摄动的方法，对三体问题作数字的积分．然后阐明变化根数的方法的原理，并对于摄动力在轨道面内的情形，建立方程式来计算吻切根数的导数．这些方程式将在下章内用以研究月球的运动．本章末后一节还要略谈有关行星摄动的几个情形．

§ 102 三体问题

设 S 表示太阳其质量为 1；A 与 B 表示两个行星，其质量为 m 与 m'（图 120）．若质量 m' 对于太阳而言是可以略而不计的，则按第十章内所说的定律，行星 A 将走一个开普勒式的轨道．若质量 m' 是不可以忽略的，则 A 的运动将是非开普勒式的，于是把它称为是受了摄动的．相互地，B 的运动亦由于质量 m 的存在，而称为受了摄动．现在试对于与太阳联系而平行于绝对轴的坐标系，来写出这两个行星的运动方程式．A 点的坐标为 x, y, z，其向径为 r；B 点的坐标为 x', y', z'，其向径为 r'；并以 r'' 表示 AB 的距离．

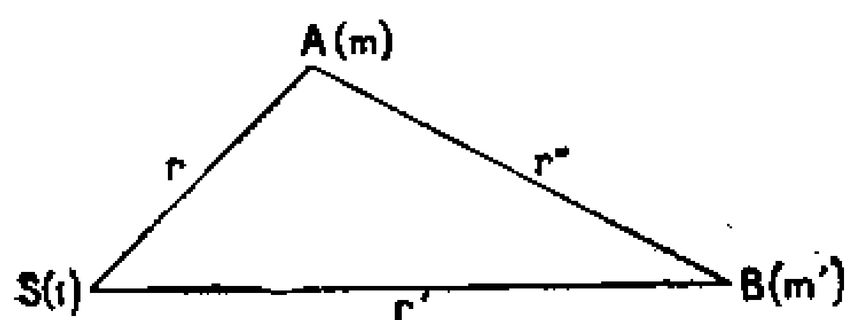


图 120

A 点的加速度为两部分所组成 1．对于太阳，牛顿加速度为

$$-k\frac{1+m}{r^2}\quad\left(\text{方向余弦为 }\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)$$

2．由于质量分别施于受扰行星与太阳的引力而来的加速度之差，这两个加速度分别是

$$+k\frac{m'}{r'^2}\quad\left(\text{方向余弦为 }\frac{x'}{r'},\ \frac{y'}{r'},\ \frac{z'}{r'}\right)$$

与

$$+k\frac{m'}{r''^2}\quad\left(\text{方向余弦为 }\frac{x'-x}{r''},\ \frac{y'-y}{r''},\ \frac{z'-z}{r''}\right).$$

于是运动方程式有如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-k\frac{1+m}{r^3}x+km'\left(\frac{x'-x}{r''^3}-\frac{x'}{r'^3}\right)\\\frac{d^2y}{dt^2}&=-k\frac{1+m}{r^3}y+km'\left(\frac{y'-y}{r''^3}-\frac{y'}{r'^3}\right)\\\frac{d^2z}{dt^2}&=-k\frac{1+m}{r^3}z+km'\left(\frac{z'-z}{r''^3}-\frac{z'}{r'^3}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

与 m' 有关的加速度便是摄动加速度或摄动力（即对于单位质量之力）．容易核验这个摄动力是从力函数

$$R=km'\left(\frac{1}{r''}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)$$

导来．因为

$$\frac{\partial R}{\partial x}=km'\left(-\frac{1}{r''^2}\frac{\partial r''}{\partial x}-\frac{x'}{r'^3}\right)$$

$$r''^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$$
$$\frac{\partial r''}{\partial x}=-\frac{x'-x}{r''}.$$

R 称为摄动函数.

行星 A 对于行星 B 所施的摄动力也是从一个力函数 R' 导来:

$$R'=km\left(\frac{1}{r''}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right)$$

若再设

$$U=k\frac{1+m}{r}\qquad U'=k\frac{1+m'}{r'}$$

则下列联立方程式规定了这两个行星的运动:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{\partial(U+R)}{\partial x}&\quad\frac{d^2x'}{dt^2}&=\frac{\partial(U'+R')}{\partial x'}\\\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{\partial(U+R)}{\partial y}&\quad\frac{d^2y'}{dt^2}&=\frac{\partial(U'+R')}{\partial y'}\\\frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{\partial(U+R)}{\partial z}&\quad\frac{d^2z'}{dt^2}&=\frac{\partial(U'+R')}{\partial z'}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这是三体运动的方程式(我们容易将它们推广到 n 体的情形). 经过几代数学家的工作,终于为宋德曼(Sundman)开辟了对这些方程式作严格的积分的道路. 这两个行星的坐标可以表示为与时间有关的一个变数的收敛幂级数,遗憾的是,这些级数不适宜于作数字的计算. 所需取的项数,随时间的增长而过分的增多. 如要计算离积分开始期间以后几月的位置,则需取的项数当达几百万之多. 另一方面,这些级数并不表现近似于开普勒运动的性质. 换句话说,即没有行星运动的周期性. 但是多年以来,由于十八世纪后半期,几何学家所阐明的近似积分方法,人们才由 n 体问题的很近似的数字解,发现这运动具有很近似的周期性. 宋德曼的工作在理论上虽很重要,但却不能减少克勒罗、欧勒、拉格朗日、拉普拉斯等人的工作的价值.

但是,在叙述摄动的分析理论以前,我们要说明:如果我们从纯粹的数字积分法在短间距内积分,可从方程式(1)取得什么结果.

§103 受摄运动的方程式的数字积分:特殊摄动

所谓特殊摄动的方法,便是前节方程式(1)的近似数字积分法. 为简化起见,将受扰行星的质量 m 略去(对于太阳的质量这是可以的),

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{r^3}+km'\left(\frac{x'-x}{r''^3}-\frac{x'}{r'^3}\right),\ \cdots\tag{1}$$

假使质量 m' 在初时 t_0 忽然消逝,则运动变为开普勒式的运动,它将遵循如下的方程式:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\frac{k\xi}{\rho^3},\ \cdots\tag{2}$$

式内 $\xi,\ \eta,\ \zeta$ 表示未受扰的行星的坐标,而 ρ 表示其向径. 但初时刻之后,受扰与未受扰两行星走两个不同的轨道,但它们有相同的初位置与初速度:

$$x_0=\xi_0,\ \cdots$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0,\ \cdots$$

第十章内的方法使我们可以将 ξ, η, ζ 的数值表为时间 t 的函数. 完成了这个初步计算之后,令

$$x=\xi+\delta\xi$$
$$y=\eta+\delta\eta$$
$$z=\zeta+\delta\zeta$$

这样,我们表达了坐标上的摄动,或者说,受扰位置对于开普勒位置的较差坐标: $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$. 同样更令

$$r=\rho+\delta\rho$$
$$r''=\rho''+\delta\rho''$$

如前,我们仍以 x', y', z', r' 分别表示施摄动的行星的坐标与向径.

合理地假设这些数值表为时间的函数, 正如一般决定一个大行星对小行星或彗星所施的摄动那样;当它本身所受到这个天体的摄动并不显著之时,这个行星的分析理论是完全建立的了.

于是由 (1), (2) 两方程式两端相减,便得摄动应遵循的方程式:

$$\frac{d^2\delta\xi}{dt^2}=-k\left(\frac{\xi+\delta\xi}{(\rho+\delta\rho)^3}-\frac{\xi}{\rho^3}\right)+km'\left(\frac{x'-\xi-\delta\xi}{(\rho''+\delta\rho'')^3}-\frac{x'}{r'^3}\right), \cdots \tag{3}$$

若将摄动展开为泰劳级数,展开式的第一项是二阶的,其表达式为

$$\delta\xi=\frac{km'}{2}\left(\frac{x'-\xi}{\rho''^3}-\frac{x'}{r'^3}\right)_0(t-t_0)^2+\cdots, \cdots$$

因轨道上的弧长取为一阶,受扰轨道与开普勒轨道在开始时的接触是二阶的; 换言之,即在此点作简单的相切. 一般将开普勒轨道叫做吻切轨道,是不恰当的,更好将它叫做瞬时轨道.

因摄动是时间的二阶项, 对于方程式(3)作数字积分来计算摄动是合理的, 但不应将积分的间距过度延长,即不应超过几个月,例如 6 至 12 个月,我们可按如下的步骤进行.

将对于 m'(这等于说对于摄动)为二阶的数略去, 我们可将方程(3)写为如下的形式:

$$\frac{d^2\delta\xi}{dt^2}=km'\left(\frac{x'-\xi}{\rho''^3}-\frac{x'}{r'^3}\right)-\frac{k}{\rho^3}\left(\delta\xi-3\frac{\xi}{\rho}\delta\rho\right), \cdots \tag{4}$$

式内

$$\delta\rho=\frac{1}{\rho}(\xi\delta\xi+\eta\delta\eta+\zeta\delta\zeta)$$

于是,我们计算上式的第二端,先将含摄动之项略去不计,而编算下列函数的数字表:

$$km'\left(\frac{x'-\xi}{\rho''^3}-\frac{x'}{r'^3}\right), \cdots$$

表内时间 t 是从初始时间起,按增加次序,例如每 20 日或每 40 日计算一次. 于是我们再用一个适当的积分公式(见附录, 梯形法一般是不够用的)作重积分. 积分常数按摄动与其第一导数在初时为零的条件而决定.

如果认为需要, 可将方程式(3)的第二端计算到第二近似值, 这一次需考虑对摄动所求得的数值;然后再进行一次重积分,…….

若我们停止在时期 t_1 的积分上, 它便提供对应于受扰坐标 x_1, y_1, z_1 与其第一导数;根据这些数据可以决定新的吻切轨道根数,为以后的计算,时期 t_1 又可取为初时, 并可照样进行下去. 因此受扰轨道便分为一系列弧线,其中每一段需经过一个特殊的运算.

以上所说的方法名叫"特殊摄动"，常用以计算没有建立分析理论的小行星的星历表；况且分析法对于偏心率和倾角较大的情形也不适用，只有使用特殊摄动的方法．这方法对于彗星表现了很大的功用．一般，我们只计算木星与土星所引起的摄动．

数字积分从前认为是很繁重的工作，今天因使用了效率很高的电子计算机，取得很大的进步*．于是我们反转利用特殊摄动去校核大行星（特别是火星与土星）的分析理论中的某些部分．由此获得的结果比分析法还好．不过，分析法在过去与将来有其理论上的优点，但在未来大行星星历表的编制上，很可能要使用数字积分的方法**．

§ 104 常数变化法，普遍摄动

假设行星 A 的运动由于质量 m', $m''\cdots$ 的存在，而受到它们的摄动．在 t 时运动为六个量所决定，这六个量便是行星的坐标与其速度在三轴上的射影．我们知道，若运动是开普勒式的，还可以求得另外六个常数，即轨道的根数：

$$L_0,\ n,\ \Omega,\ \omega,\ e,\ i$$

若在 t 时骤然取消了摄动体，则这些根数将规定那时以后那个行星的轨道根数．上面说过，与受扰轨道上每一点相对应的开普勒轨道，叫做那一点的吻切轨道，它的根数叫做吻切根数．这一组根数完全为受扰行星在 t 时的位置与速度所决定(图 121)．

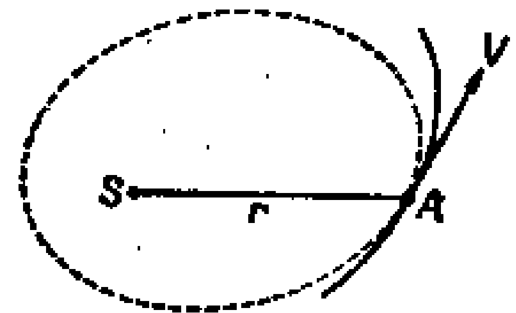


图 121

当行星在其轨道上运行时，吻切轨道不断地变形，否则运动便成了开普勒式的了．因此吻切根数是时间 t 的函数．

由此可见，受扰运动可以当做是在根数不断变化的轨道上运动的开普勒运动．这种表达的方式不是一种纯粹的空想，在太阳系里，行星的吻切轨道实际是在缓慢的变化．而且在一段有限时间内，吻切轨道上的一段弧是可以和真实轨道上的一段弧相吻合的；这样，我们便可将第十章内的公式用到这运动上去．前节内已经证明，摄动对于时间是二阶的，而且还与施摄动的天体的质量成正比例，但这些质量比较太阳的质量是很小的．

因此行星的坐标 x, y, z, 可以表达为如下的函数：

$$x=f(t,\ L_0,\ n,\ \omega,\ \Omega,\ e,\ i)$$

式内 L_0, $n\cdots$六个常数都是 t 的函数．但是如果我们要计算 t 时的速度，可以将吻切根数作为常数，因为这些常数是为 t 时行星的位置与速度所规定了的．于是我们可以写

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta f}{\delta t}$$

式内偏导数是对 t 的显函数而取的，但以 L_0, n, $\omega\cdots$为不变数．

太阳系里，除了太阳的质量之外，行星中质量最大的是木星(1/1047.35)与土星(1/3501.6)．行星的总质量还不及太阳的质量的 1/700．因此，开普勒定律虽然不是严格的准确，但却是很近似的真实，因而在行星与彗星的研究上有很重要的意义．利用几个星期

---

* 计算一颗小行星的特殊摄动，只需要四分钟．——译者注

** 一个显著的例子，便是使用高速电子计算机，以数字积分的方法，重新计算五大行星(木星至冥王星)在 407 年间(1653—2060)的运动．——译者注

或几个月的观测来决定轨道的时候，将观测到的轨道上的一段弧当做是开普勒式的椭圆或抛物线是合理的.

卫星(特别是月球)的情形便不是这样的，由于太阳所给与地-月系的引力而来的摄动显著地偏离了开普勒式的不变椭圆. 月球的坐标所受到的短周期性的差数变幅之大，以致几天里所走的弧离开椭圆，便显得异常之大. 换句话说，行星的吻切根数变化很慢，而月球的根数所受到的变化，既迅速而又不小.

由常数变化法计算出的摄动叫做普遍摄动，以区别于由数字积分法算出的特殊摄动. 特殊摄动提供由各段弧线合成的轨道，以推算行星在某一远期的位置，但需将轨道推算到所要到达的时期. 普遍摄动的方法以时间 t 表达吻切轨道，其优点是可以利用来计算星历表，以达到所要的时期，而不需顾虑行星在这期间所占的位置. 在月球的情形，我们所要表为时间的函数的，不是吻切根数而是月球自身的坐标；因此，在编制长期的星历表上，我们可以利用这一优点. 由此可见，发展大行星的理论的方式和月球的理论迥然不同.

下节将阐明吻切根数的变化的计算原理. 至于月球的特殊情形将详细叙述在以后一章里.

§ 105 吻切根数的变化

设 A 表示 t 时质量为 m 的行星的位置(图 122). 令 $\boldsymbol{V}_0$ 表示其速度. 若行星只受太阳给与它的牛顿引力，则它对于太阳的加速度是

$$\Gamma = -k\frac{1+m}{r^2}$$

在 $t+dt$ 时，速度 $\boldsymbol{V}_0'$ 将由向量 $\boldsymbol{V}_0$ 与向量 $\boldsymbol{\Gamma dt}$ 的加合而求得. 现在设有一个摄动加速度 γ 在无限小时间 dt 施于这个行星上，这称为瞬间摄动或撞击. 行星在 $t+dt$ 时的速度，可由向量 $\boldsymbol{\gamma dt}$ 与以上合成的速度 $\boldsymbol{V}_1'$ 的加合而求得. 但三个向量的加合有几种不同的方式，我们可先组合 $\boldsymbol{V}_0$ 和摄动向量 $\boldsymbol{\gamma dt}$，以形成 $\boldsymbol{V}_1$，然后将 $\boldsymbol{V}_1$ 看做是 t 时受摄速度，再与牛顿引力相当的向量 $\boldsymbol{\Gamma dt}$ 加合.

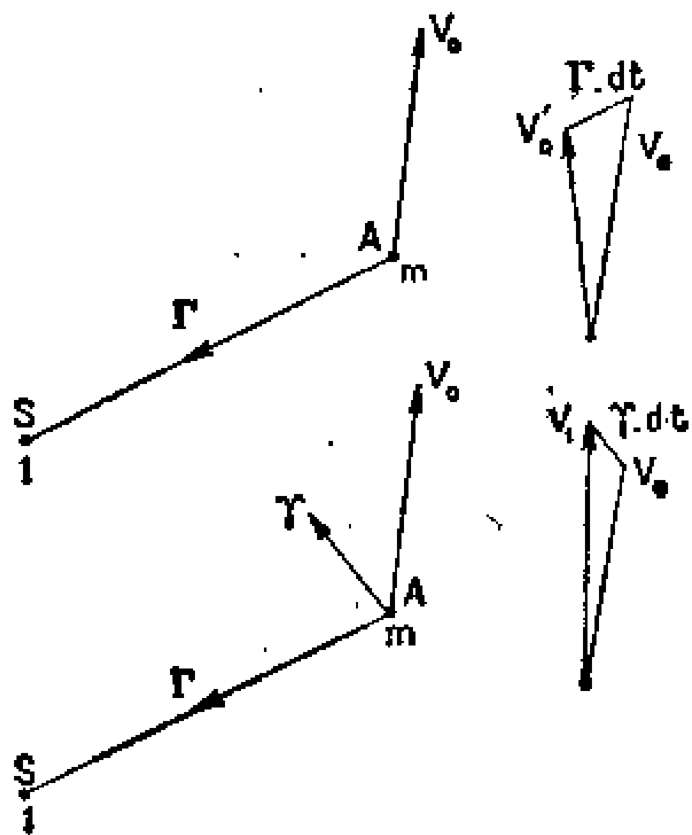


图 122

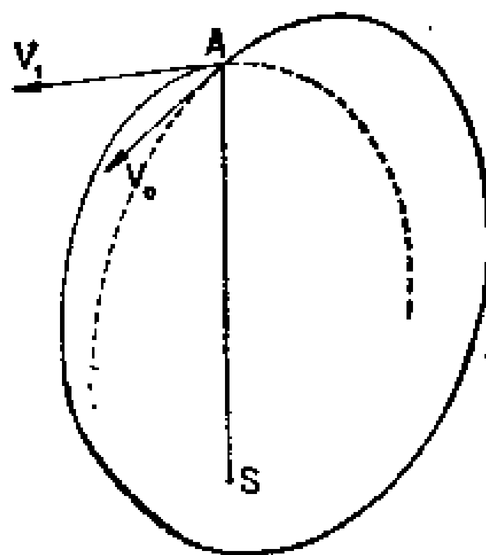


图 123

换句话说，我们可以将摄动的效应表示为行星过 A 点时速度的瞬时变化．直到 t 时，行星的运动为下列六个常数所规定：

$$L_0 \quad n \quad \omega \quad \Omega \quad i \quad e$$

这是已知 A 点的坐标和过 A 点的速度 V_0 时我们所能计算的（图 123）．受了摄动之后，运动为下列六个常数所规定：

$$L_0+dL_0 \quad n+dn \quad \omega+d\omega \quad \Omega+d\Omega \quad i+di \quad e+de$$

这是在 A 点的 V_0 上更加上了 V_1 而决定的．于是六个根数的变量

$$dL_0 \quad dn \quad d\omega \quad d\Omega \quad di \quad de$$

可根据速度的变量 $\boldsymbol{\gamma dt}$ 的函数而算出来．

假设摄动力（行星的坐标和时间的函数）不断地施在受扰的行星上，行星的吻切根数因而也在不断地变化；由以上的计算可以提供这些根数对于时间的第一导数：

$$\frac{dL_0}{dt} \quad \frac{dn}{dt} \quad \frac{d\omega}{dt} \quad \frac{d\Omega}{dt} \quad \frac{de}{dt} \quad \frac{di}{dt}$$

因不在轨道面内的摄动力使它围绕向径旋转；故这类摄动力使倾角与交点的黄经发生变化．

我们将在下面举例叙述根数变化的几个特殊情形．

§106　与距离成立方反比的中心摄动

我们要去证明这样一个命题：设有一个引力或斥力，其表达式为 $-k'\dfrac{m+m'}{r^3}$（式内常系数 k' 比 k 小），加在牛顿引力上，则吻切轨道的近日点将发生一种长期运动．

设 r 与 θ 为行星的极坐标，m' 为其质量，并以 m 表示太阳的质量．于是向径上的加速度为

$$-k\frac{m+m'}{r^2}-k'\frac{m+m'}{r^3} \tag{1}$$

我们知道这个加速度可以写为如下的形式：

$$-\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right], \tag{2}$$

C 表示面积常数．

使这两个表达式相等，便得轨道的方程式为

$$\frac{1}{r}\left[1-\frac{k'(m+m')}{C^2}\right]+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)=k\frac{m+m'}{C^2} \tag{3}$$

若 k' 小，则方括弧内的数为正，我们便可使其等于 $(1-q)^2$（q 表示一小量，与 k' 同号）．方程式(3)的积分提供轨道的方程式：

$$\frac{1}{r}=k\frac{m+m'}{C^2(1-q)^2}+A\cos(1-q)(\theta-\theta_0) \tag{4}$$

若 q 小至可以略而不计，则方程式(4)代表开普勒式的轨道，换句话说，即是一个不变形的椭圆，太阳在其一个焦点处，并按面积定律作成．

若 q 虽小而却不可略去，我们可以合理地假设轨道(4)仍然是一个大小不变的椭圆，只是拱点有一种运动．按 k' 或 q 的符号决定拱点运动的方向；若 $k'>0$，则运动是顺行的，

若 $k'<0$，则运动是逆行的．因此，若要真近点角(即式中 cos 下的角)增加 360°，则归算到固定原点的极角 $\theta-\theta_0$ 应该增加 $360°/(1-q)$ 或近似地增加 $360°(1+q)$．因此可以断定，在行星连续两次过近日点的期间，近日点前进了 $360°\times q$ 这样一个角(图 124)．

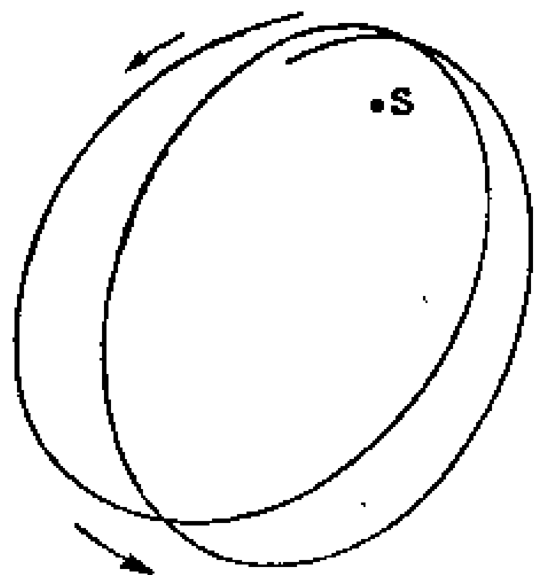


图 124

若偏心率小，或因而设真近点角大约与时间成正比例，近日点的进动可以看做是匀速的．若设行星对于恒星的平均运动为 n，则其平均的近点运动，归算到移动的近日点为 $n(1-q)=cn$，c 表示由下式规定的和单位接近的一个因数．于是

$$\varpi=\varpi_0+(1-c)nt$$

$$M=cn(t-t_0)$$

$$v=cn(t-t_0)+2e\sin cn(t-t_0)+\cdots$$

$$r=a[1-e\cos cn(t-t_0)+\cdots]$$

由于恒星周是 $360°/n$，则近点周为 $360°/cn$．

一般情形下，凡是将距离的函数作为改正数，加在牛顿引力上的，都表现为近日点(在月球的情形便是近地点)的长期运动．我们将说明，长久以来，天体力学不能说明月球的拱线运动：1747 年克勒罗在牛顿引力上加入一个与距离的立方成反比之项，才使理论与观测符合，不久他将分析工作推进一步，便发现这个人为的假设是无用的．这以后一个世纪，勒威耶对水星近日点的运动感觉理论有缺陷时，也作出相同的改正．最后爱因斯坦才根据他的引力理论，成功地解释了这个现象．

§ 107 切线向或法线向的摄动

我们先利用初等几何学的定理，去研究行星在 A 点受到轨道切线向的摄动力的影响时，吻切根数的变化．若摄动力的方向与速度的方向相同，我们将它作为正的，否则便是负的．令 γ_t 为摄动的加速度，dt 为施摄动的时间，则

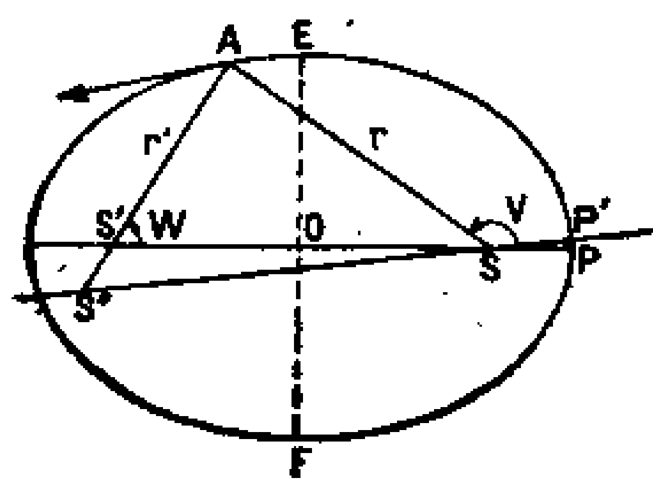


图 125

$$dV=\gamma_t dt$$

因此，半长轴的长短受到摄动，但速度的方向没有改变；摄动前后的两个轨道有同一焦点 S，在 A 点有相同的切线．由此容易推出摄动所生的效应：第二向径的方向不变，但第二焦点由 S' 移至 S''，拱线改变了方向，半长轴(因而偏心率)都受了摄动(图 125)．

关系式

$$V^2=k(1+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

的微分式使半长轴的变化表示为 dV 的函数：

$$2V\,dV=k(1+m)\frac{da}{a^2}=n^2a\,da$$

$$da=\frac{2V}{n^2a}\gamma_t dt=2a\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\frac{\gamma_t}{V}dt$$

因
$$n^2a^3=k(1+m)$$
故
$$\frac{dn}{n}=-\frac{3}{2}\frac{da}{a}=-3\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\frac{\gamma_t}{V}dt$$
第二焦点的位移 $S'S''$ 等于 $2da$. 以 w 表示第二向径与拱线之间的角，则
$$d(ae)=da\cos w$$
$$ade=(\cos w-e)da=2a\frac{\cos u(1-e^2)}{1-e\cos u}\frac{\gamma_t}{V}dt$$
$$de=2\frac{p}{r}\cos u\frac{\gamma_t}{V}dt$$
拱线旋转的角 $d\varpi$ 可以表达为
$$d\varpi=S'S''\frac{\sin w}{2ae}=\frac{2}{e}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}\frac{\gamma_t}{V}dt=2\frac{\sin V}{e}\frac{\gamma_t}{V}dt$$
剩下要计算的最后一个根数，即平黄经 L 的变化(只有 Ω 与 i 两个根数不受摄动的影响). 在 t 时行星的平黄经为
$$L=M+\varpi=nt+L_0$$
dt 时以后它改变之量为
$$dL=ndt+tdn+dL_0$$
若无摄动，则只有 ndt 存在，因而这一项叫做椭圆项或开普勒项. 因而其余两个附加的变项是由摄动而来的：
$$d\varepsilon=tdn+dL_0$$
这式还可写为
$$d\varepsilon=\delta M+d\varpi=\delta u(1-e\cos u)-de\sin u+d\varpi$$
δM, δu 两个符号表明，这两个变量里不含开普勒项. 为了计算 δu, 我们利用 $\sqrt{1-e^2}/e\sin u$ 这个量，即速度与向径之间的角的正切的不变性(§ 95)：
$$\frac{-ede}{1-e^2}-\frac{de}{e}-\cot u\delta u=0$$
另外，由于
$$de=e\sqrt{1-e^2}\cot ud\varpi$$
故最后得
$$\delta u=-\frac{d\varpi}{\sqrt{1-e^2}}$$
与
$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{d\varpi}{dt}\frac{1-\sqrt{1-e^2}-e^3\cos u}{\sqrt{1-e^2}}=-2\frac{a}{r}\sin u\left(\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}-e^2\cos u\right)\frac{\gamma_t}{V}$$
这问题的全部解法包括在下表之内：
$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=2a\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\frac{\gamma_t}{V}\\ \frac{de}{dt}&=2\frac{p}{r}\cos u\frac{\gamma_t}{V}\\ \frac{d\varpi}{dt}&=2\frac{\sin v}{e}\frac{\gamma_t}{V}\\ \frac{d\varepsilon}{dt}&=-\frac{d\varpi}{dt}\frac{1-\sqrt{1-e^2}-e^3\cos u}{\sqrt{1-e^2}}\end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

我们可以利用这些方程来研究行星在有阻力的介质中的运动. 在这情形下, $\gamma_t:V$ 之比是负的, 因此半长轴不断地缩短, 而平均运动相应地增大. 故摩擦的效应, 在运动上表现为长期的加速度. 从表面看, 这好象是不合理, 但是当行星损耗其动能而接近太阳时, 按照开普勒第三定律, 它的平均运动应该是增加的.

当行星在其轨道的半支 FPE 上运动时(图 125), 偏心率变小; 在另外半支上运动时偏心率变大. 若具有阻力的介质的密度, 离开太阳之后迅速地变小(人们经常用这种摩擦的假设去说明某些周期彗星运动发生加速的现象), 由于介质的效应只在近日点附近起作用, 因而偏心率长期地变小. 当彗星自近日点至远日点时, 拱线逆行; 但在轨道上的另外半支上运行时, 则为顺行; 这两个相反的效应大约互相抵消.

瞬时法线摄动不改变速度的大小(至少是一阶项), 但改变速度的方向. 因此, 半长轴 a 没有受到摄动; 但是由于第二向径所转过的角两倍于速度向量所转过的, 因而第二焦点也发生了移位, 于是近日点的黄经与偏心率都发生变化. 读者可以自己推导下列有关吻切根数的导数的公式(B), 法线上摄动加速度 γ_n 向轨道的外边取为正向. 为了推导最后一式, 注意 $e\cos u$ 乘积是不变量; 由于摄动不改变行星的位置(即发生摄动的瞬间的位置), 因而也不影响它的向径 $a(1-e\cos u)$, 即半轴也不受摄动, 于是 $e\cos u$ 乘积不受摄动的影响:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=0\\
\frac{de}{dt}&=\sqrt{1-e^2}\sin u\,\frac{\gamma_n}{V}\\
\frac{d\varpi}{dt}&=-\frac{\cos u+e}{e}\,\frac{\gamma_n}{V}\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=\frac{d\varpi}{dt}\left(1-\sqrt{1-e^2}+\frac{2e\sqrt{1-e^2}}{\cos u+e}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad (B)$$

与轨道面正交向上的摄动的效应, 将在下列一个特殊例子, 即在下章 §121 月球的运动里, 加以讨论.

§108′ 轨道面内的力在椭圆轨道上所形成的普遍摄动

假设摄动力在被摄动体运行的轨道面内, 则 i 与 Ω 两个根数不变. 我们在这一节亦如在前一节, 作这样的假定. 我们甚至可以使用以上将摄动力分为切线向与法线向两个支量所得的结果.

但是这一节里, 我们将使摄动力作另外一种分解, 以备将来对太阳所施给月球的摄动作初步研究之用. 这便是将其分为与向径正交的分量 P 和在向径上的分量 S (另外一个与轨道面正交的分量 T 暂时略去, 因为这里假设摄动力在轨道面内). 设以 $90°-\beta$ 表示速度与向径之间的角(见 §82), 则由

$$\gamma_t=P\cos\beta+S\sin\beta$$

$$\gamma_n=-P\sin\beta+S\cos\beta$$

两个关系式, 使用上节所得的结果, 可以立刻将 a, e, ϖ, ε 等几个根数的导数表为 P 和

S 两个分量的函数[1].

由于其重要性，我们可以从椭圆运动的公式出发，再推导出这些导数．在计算开始时，即介入 P 和 S(而不是切线向和法线向)的两个分量．我们要在下面推导这些表达式，但读者容易自己证明下列方程组(1)，也许从切线向和法线向的摄动出发还要容易一些．

为避免重复起见，在这一节里将要用的转换式集中如下，这些公式是可由椭圆运动(§ 83)立刻推出来的：

$$\left.\begin{aligned}1+e\cos v&=\frac{P}{r}\\ 1-e\cos u&=\frac{r}{a}\\ e(\cos v+\cos u)&=\frac{P}{r}-\frac{r}{a}\\ \cos u&=\frac{\cos v+e}{1+e\cos v}\\ \sin u&=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{1+e\cos v}\end{aligned}\right\}$$

设 S 表示摄动力在向径上的分量(图 126)，轨道外的方向取为正向，更设 P 表示向径正交的分量，以运动的方向为正向．令 U 与 W 表示轨道上速度在这两个方向的分量，则其表达式为(§ 75)

$$\left.\begin{aligned}U&=\frac{dr}{dt}=\frac{nae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{k(1+m)e\sin v}{C}\\ W&=r\frac{dv}{dt}=\frac{C}{r}=\frac{k(1+m)(1+e\cos v)}{C}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

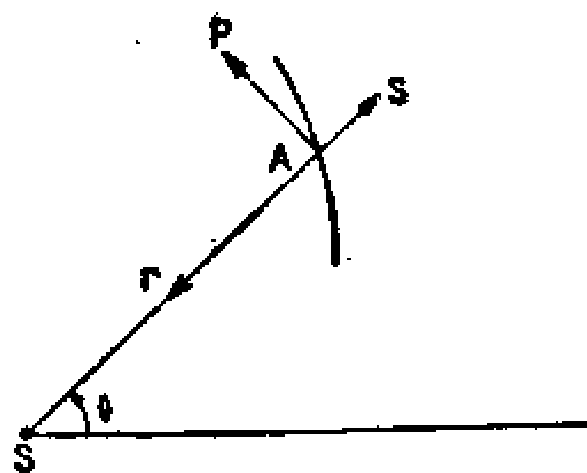


图 126

如我们在 § 105 内所说过的，在 dt 时间内，摄动力的效应可以表为速度的这两个分量的瞬时摄动，于是有这两个基本关系：

$$dU=Sdt\qquad dW=Pdt$$

我们将展开这两个关系式以表现根数的变化．由第二式可以立刻推得

$$dC=Prdt$$

$$\frac{dC}{C}=\frac{Prdt}{na^2\sqrt{1-e^2}}=\frac{P\sqrt{1-e^2}}{na}\;\frac{r}{P}dt=\frac{P}{na}\;\frac{\sqrt{1-e^2}dt}{(1+e\cos v)}$$

为了更进一步，取(1)式的对数微分，并考虑在摄动的瞬间行星的黄经没有改变，而且由于近日点的位移，真近点角发生变化．因此在这以后应使 $dv=-d\varpi$．

我们首先得出如下的关系式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{de\sin v-ed\varpi\cos v}{e\sin v}&=\frac{dC}{C}+\frac{S\sqrt{1-e^2}dt}{nae\sin v}\\ \frac{de\cos v+ed\varpi\sin v}{1+e\cos v}&=\frac{dC}{C}+\frac{Prdt}{C}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

或简化后：

1) 将前节 A 和 B 两组方程两两相加，便可将 γ_t 和 γ_n 表为 P 和 S 的函数，并可证明有以下两个等式：

$$\frac{\cos\beta}{V}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na(1+e\cos u)}\qquad\frac{\sin\beta}{V}=\frac{e\sin u}{na(1+e\cos u)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{de}{dt}\sin v - e\frac{d\varpi}{dt}\cos v &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[P\frac{r}{p}e\sin v + S\right]\\ \frac{de}{dt}\cos v + e\frac{d\varpi}{dt}\sin v &= \frac{2P\sqrt{1-e^2}}{na}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

或:

$$\left.\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[P(\cos v+\cos u)+S\sin v]\\ &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[P\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)+Se\sin v\right]\\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[P\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v - S\cos v\right]\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

为了计算半长轴的导数,我们利用如下的关系式:

$$a(1-e^2)=P=\frac{C^2}{k(1+m)}$$

$$\frac{da}{a}-\frac{2ede}{1-e^2}=2\frac{dC}{C}$$

$$\frac{da}{dt}=2a\left[\frac{1}{C}\frac{dC}{dt}+\frac{e}{1-e^2}\frac{de}{dt}\right]$$

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[P\frac{p}{r}+Se\sin v\right] \tag{5}$$

剩下要计算的只有$d\varepsilon$(见前节),如上所说,由于这微分为下式所规定:

关系式:

$$d\varepsilon=\frac{r}{a}\delta u-de\sin u+d\varpi \tag{6}$$

$$\tan\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{V}{2}$$

提供δu.
$$\frac{\delta u}{\sin u}=-\frac{d\varpi}{\sin v}-\frac{de}{1-e^2}=-\frac{d\varpi}{\sin v}-\frac{ade}{p}$$

经过几个转换之后,便得欲求的导数如下列的简单形式:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{r}{a}\frac{\sin u}{\sin v}\left[\frac{d\varpi}{dt}+\frac{a}{p}\frac{de}{dt}\sin v\right]+\frac{d\varpi}{dt}-\frac{de}{dt}\sin u\\ &= \frac{d\varpi}{dt}\left(1-\frac{r}{a}\frac{\sin u}{\sin v}\right)-\frac{de}{dt}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin u\\ &= \frac{d\varpi}{dt}\left(1-\sqrt{1-e^2}\frac{r^2}{ap}\right)-\frac{de}{dt}\frac{r\sin v}{p}\sqrt{1-e^2}\left(1+\frac{r}{p}\right)\\ &= \frac{d\varpi}{dt}(1-\sqrt{1-e^2})+\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\left[\frac{d\varpi}{dt}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)-\frac{de}{dt}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right]\end{aligned}$$

方括弧内之项可由关系式4算出,经过简化后便得

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\tilde{\omega}}{dt}(1-\sqrt{1-e^2})-\frac{2r}{na^2}S \tag{7}$$

将以上求得的结果汇集为下表;前三个方程式是欧勒首先推出的:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[P\frac{p}{r}+Se\sin v\right]\\
\frac{de}{dt}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[P\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)+Se\sin v\right]\\
\frac{d\varpi}{dt}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[P\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)-S\cos v\right]\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=\frac{d\varpi}{dt}(1-\sqrt{1-e^2})-\frac{2r}{na^2}S
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(I)}$$

现在我们要将这些方程式转换，以消去式内所显含的 P 与 S 两个分量，而代以与 § 102 里所规定的摄动函数有关的数量，即代以这函数对于根数的偏导数．虚功的表达式将对这计算提供必需的作用．

设想行星在其轨道面内有虚位移 δr 和 $r\delta\theta$，则摄动力所作之功为

$$\delta\zeta=Pr\delta\theta+S\delta r \tag{8}$$

但这式还等于摄动力的总变化，由于摄动力是行星位置的函数，因而也是其吻切根数与时间的函数．这里不需假设有时间的显变化；只在决定 r 与 θ 的实际数值和施行摄动的天体的位置时才引入时间；与在 § 107 的情形一样，我们应当假设：

$$\delta\varepsilon=t\delta n+\delta L_0=\delta M+\delta\varpi$$

式内与 $\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}$ 对应的偏导数作为等于 $\frac{\partial R}{\partial L}$．因此虚功的新表达式为

$$\delta\zeta=\frac{\partial R}{\partial a}\delta a+\frac{\partial R}{\partial e}\delta e+\frac{\partial R}{\partial\varpi}\delta\varpi+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon \tag{9}$$

现在将(8)式内的 $\delta\theta$ 与 δr 代以其表达为吻切根数的函数的数值；将(8)与(9)的展开式相等，便得摄动的偏导数与 P 和 S 两分量之间的关系式．为了彻底解决提出的问题，剩下的是利用新的关系式与(I)式去消掉 P 与 S．

为了计算 $\delta\theta$ 与 δr，须先计算 δu．因

$$u-e\sin u=M=L-\varpi$$

$$\delta u(1-e\cos u)=\delta M+\delta e\sin u=\delta\varepsilon-\delta\varpi+\delta e\sin u$$

$$\delta u=\frac{a}{r}(\delta e\sin u-\delta\varpi+\delta\varepsilon)$$

计算 δr：

$$r=a(1-e\cos u)$$

$$\delta r=\frac{r}{a}\delta a+ae\sin u\delta u-a\cos u\delta e$$

$$\delta r=\frac{r}{a}\delta a-a\delta e\cos v-\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}(\delta\varpi-\delta\varepsilon)\sin v$$

为了得 $\delta\theta$，利用下列两式：

$$\delta\theta=\delta v+\delta\varpi\qquad\tan\frac{V}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

由第二式求 δv：

$$\frac{\delta v}{\sin v}=\frac{\delta u}{\sin u}+\frac{a\delta e}{p}$$

$$\delta v=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\delta u+\frac{a}{p}\sin v\delta e$$

$$\delta\theta=\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}(\delta e\sin u-\delta\varpi+\delta\varepsilon)+\frac{a\delta e}{p}\sin v+\delta\varpi$$

$$\delta\theta=\left(\frac{a}{r}+\frac{a}{p}\right)\delta e\sin v+\left(1-\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\right)(\delta\varpi-\delta\varepsilon)+\delta\varepsilon$$

为了校算起见，我们作如下的验证：设将根数的变化 δa, $\delta e\cdots$ 代以从公式(I)内取出的对应的微分式，便得 δr 与 $\delta\theta$ 恒等于零的表达式，由于 P 与 S 的系数在每个式子里为零．因此，如我们在 § 105 里所表明的，摄动使轨道在每瞬时变形，而不需使行星改位．公式 (I) 内的导数只在恒为零的位移才能相容． 不需说对于摄动力的有效功也不能由这得出任何结论．

将对 δr 与 $\delta\theta$ 所得的表达式代入(10)式，我们便将虚功表达为摄动力的 P 与 S 两分量的函数：

$$\delta\zeta=\frac{r}{a}S\delta a+a\left[P\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v-S\cos v\right]\delta e$$
$$-\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left[P\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\sqrt{1-e^2}\right)+Se\sin v\right](\delta\varpi-\delta\varepsilon)+Pr\delta\varepsilon \tag{10}$$

将(9)与(10)两个展开式叠合(因轨道根数是自变数的缘故，这是合理的)，于是得出所要求的摄动力的导数与 P 和 S 两分量之间的关系式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial a}&=\frac{r}{a}S\\
\frac{\partial R}{\partial e}&=a\left[P\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v-S\cos v\right]\\
\frac{\partial R}{\partial\varpi}&=-\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left[P\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\sqrt{1-e^2}\right)+Se\sin v\right]\\
\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}&=-\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}+Pr=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left[P\frac{p}{r}+Se\sin v\right]
\end{aligned}\right\}\tag{II}$$

现在只需联合(I)与(II)两组式子，便可由这八个方程式消去 P 与 S 和 r 与 v．不需计算便得

$$S=\frac{a}{r}\frac{\partial R}{\partial a}$$

$$P\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v-S\cos v=\frac{1}{a}\frac{\partial R}{\partial e}$$

$$P\frac{p}{r}+Se\sin v=\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}$$

$$P\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)+Se\sin v=-\frac{1}{a}\left(\frac{\partial R}{\partial\varpi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}(1-\sqrt{1-e^2})\right)$$

$$Pr=\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial R}{\partial\varpi}$$

正如以上所提议的，我们已将根数的导数表达为摄动函数的偏导数和根数之值的函数，时间 t 与受摄动的行星的位置则不是明显地出现在式内：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\\
\frac{d\varpi}{dt}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}\\
\frac{de}{dt}&=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\left[\frac{\partial R}{\partial \varpi}+(1-\sqrt{1-e^2})\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right]\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{III})$$

这便是摄动力在轨道面内的假设下的拉格朗日方程式简化形式．但拉格朗日与雅科比建立这些方程式时，并未引用 P 与 S 两个分量．

§109 行星摄动

利用前节的方程组(III)，我们可以建立行星系摄动的一般的分析理论，不过还须补充以含 $\frac{\partial R}{\partial i}$ 之项(加在第二、第四方程的右端)与含 $\frac{di}{dt}$ 和 $\frac{d\Omega}{dt}$ 的两个附加方程式．虽未明显地写出，我们在下面假设方程组(III)(拉格朗日方程)是这样补充的．

假设只有三体；取太阳的质量为 1，两行星的质量为 m 与 m'(下面的推理可以扩充到任何多个行星)．解决这问题的方程式是这两个行星每一个的方程组所组合成的．在这些方程里再加入表达摄动函数的方程式：

$$R=km'\left(\frac{1}{r''}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)$$

$$R'=km\left(\frac{1}{r''}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right)$$

由于假设 m 与 m' 是小量，a, $e\cdots a'$, $e'\cdots$ 等根数缓慢地变化，它们的导数直接与这些质量有关．积分提供的各根数有如下的形式：

$$a=a_0+\delta a\qquad a'=a'_0+\delta a'_0$$

$$\cdots\qquad\qquad\cdots$$

$a_0\cdots a'_0\cdots$ 是由观测提供的常数，$\delta a\cdots\delta a'\cdots$ 表示作为时间函数的摄动，我们要将最后这些量表示为对于质量 m 与 m' 的展开式．所以我们更可写出

$$\delta a=\delta_1 a+\delta_2 a+\cdots$$

$\delta_1 a$ 表示含 m' 的一阶项之量，$\delta_2 a$, $\delta_3 a\cdots$ 表示含 m 与 m' 的二阶、三阶等项之量．

摄动函数的偏导数既然是 m' 的一阶项，因而就第一近似值言，我们可以求得一阶摄动，在右端内将 a, $e\cdots a'$, $e'\cdots$ 代以其初假 $a_0e_0\cdots a'_0e'_0\cdots$，然后按时间积分，便得

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1 a&=\frac{2}{n_0a_0}\int_0^t\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0dt\\
\delta_1 e&=-\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0a_0^2e_0}\int_0^t\left(\frac{\partial R}{\partial \varpi}\right)_0dt-\sqrt{1-e_0^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e_0^2}}{n_0a_0^2e_0}\int_0^t\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0dt\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

为了求积分，我们假定摄动函数可以展开成下列的形式(见第十三章 § 112)．

$$R=\sum F\cdot\cos D$$

系数 F 表示 m' 与含长轴、偏心率与倾角的函数的乘积，引数 D 是施摄动与受摄动的行星的平黄经、交点的黄经和近日点黄经的线性函数. 就第一近似值言，有

$$R_0=\sum F_0\cos D_0$$

$$D_0=j(n_0t+\varepsilon_0)+j'(n_0't+\varepsilon_0')+k\varpi_0+k'\varpi_0'+l\Omega_0+l'\Omega_0'$$

式内 j, k, l, j', k', l' 表示正、负整数或零，F_0 为以上所说的几个根数所决定的一个常数.

既肯定了这些，积分便没有什么困难. 例如

$$\frac{\partial R_0}{\partial\varepsilon_0}=-\sum jF_0\sin D_0$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial i_0}=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)_0\cos D_0$$

最后方程组(1)可写为如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\delta_1a=\frac{-2}{n_0a_0}\sum jF_0\int_0^t\sin D_0dt\\&\delta_1e=\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0a_0^2e_0}\left[\sum kF_0\int_0^t\sin D_0\,dt+(1-\sqrt{1-e_0^2})\sum jF_0\int_0^t\sin D_0\,dt\right]\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这六个方程式介入两类的积分：

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\int\sin D_0\,dt=-\frac{\cos D_0}{jn_0+j'n_0'}\\J_1&=\int\cos D_0\,dt=\frac{\sin D_0}{jn_0+j'n_0'}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

在引数 D_0 内，时间是以线性关系出现，因为这些积分提供根数的周期差项. 但在某些项里，$j=j'=0$；在 D_0 的表达式里便无时间项，于是对应的积分为

$$\left.\begin{aligned}I_2&=t\sin D_0\\J_2&=t\cos D_0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

这些积分形式提供了根素的摄动长期项.

这种计算方法在 $\int\frac{\partial R_0}{\partial\varepsilon_0}dt$ 的表达式里不出现长期项，因为积分 I_2 乘以等于零的因数 j，因此在第一阶里，就第一近似值来说，长轴的摄动与平均运动的摄动也不含长期项. 这结果是 1783 年拉普拉斯刊布在他有名的论文里的；后经拉格朗日加以阐发，更由泊松推广到质量的二阶项，而达到了第二近似值. 我们由此现解到太阳系的稳定性；这个异常困难的问题的讨论，虽已引出许多研究报告，但还未达到有确定性的结论.

我们在这里附带略谈其他五个根数(特别是 i 与 e)的表达式里长期项的性质. 长期项的存在，怎样与行星系稳定的概念取得协调，是我们要加以说明的. 应该记住，我们所采用的积分方式，没有将摄动表达为有限项的分析式，而是一个无穷项的级数，我们只计算了前面的几项. 但是就一般情况而言，周期函数的有界展开随时间作无限的增大，但这个级数之和却是有限数. 例如

$$\sin(at)=\sum_0^n(-1)^n\frac{(at)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

是时间 t 的周期函数，在 -1 与 $+1$ 之间变化，但是其前面 p 项之和却随 t 而增加，其绝对值超过一切界限.

拉普拉斯所推出的两个定理，使我们得以假定大行星的偏心率与倾角现在是很小，而且终究是很小的. 因此在事实上，偏心率与倾角的摄动和长轴的摄动一样，基本上是没有差异的. 在偏心率和倾角的摄动里，由积分的特殊方式所引入的长期项，是不是能够表达很长周期的周期差项的有界展开呢？

当然，在近日点的或交点的表达式里，长期项真的作无限的增长，不能说成是太阳的不稳定性的原因. 下章内我们要证明月球的近地点有长期性的进动，而其交点有长期性的逆行. 类似的摄动亦影响行星的轨道.

除了 $j=j'=0$ 的情形之外，在 D_0 的表达式里有含 t 之项，其系数虽非零却是很小. 当受摄动与施摄动两行星的平均运动有一个近似的通约关系时，便出现这一情形. 于是对应的差数有很长的周期，而且其系数里含有

$$\frac{F_0}{jn_0+j'n_0'}$$

为其一个因子，即是 F_0 很小，这系数也可变为很大. 于是我们将 $jn_0+j'n_0'$ 叫做小除数. 最显著的长周期差的一例为木星和土星所给出. 根据勒威耶的结果：

$$\text{木星}\cdots\cdots n=299''.1283$$

$$\text{土星}\cdots\cdots n'=120''.4547$$

$$5n'-2n=4''.0169(\text{或每年 }1467''.1)$$

$$1/(5n'-2n)=51349$$

这个差项的周期长达 883 年，平黄经可能受到摄动的程度，对于木星约为 20′，对于土星约为 50′. 这是太阳系里由摄动而来的最大的差数. 一般言之，摄动的最大值不超过几十秒. 木星和土星的最大差数，没有逃掉开普勒的注意，他于 1652 年将其解释为木星的长期加速度和土星的长期减速度. 拉朗德在其 1771 年版的«天文学»里(1163 至 1172 节)，还是这样地解说. 1784 年拉普拉斯才认识了这个差数的真正性质，而建立其理论.

另一方面，在很短周期的情形，有时出现除数 $jn_0+j'n_0'$ 比被除数 F_0 很大. 于是对应的周期差数的变幅很小. 因此，在下章建立月球理论的方程式时，我们系统地略去短周期的项，而只保留长周期的项.

海王星的发现(1846 年)是摄动理论的一个最有名的成就. 在这以前，天王星运行表的建立遭到很大的困难. 天王星为威廉·赫歇耳发现于 1781 年，但自 1690 年以来，十八世纪里经人当作恒星观测过许多次，因而 1821 年布瓦尔所用的观测经历了 131 年的时间. 但天王星的观测位置和表载位置比较，出现不能容许的离差，到了 1845 年，这离差在黄经度上达到 2′ 之多；由方照时的观测，发现在计算的向径上也有显著的误差. 为了说明这一不正常的现象，有人以为牛顿定律在比较远的空间里不能严格的有效. 还有人认为，天王星外而有一个未发现的行星，因其距离遥远，对于土星没有显著的影响，但对于较近的天王星，有时可以扰乱其运动. 为了引导观测者去寻找这个新的天体，须得决定在哪一个天区里去做这一寻找，因此，欲达到这个目的，便须解决摄动的逆问题：即不是计算已知质量和位置的施摄动的行星对于太阳系里其他天体的效应，而是根据观测到的摄动去推算这个施摄动星的质量和位置. 亚当斯与勒威耶各自独立地去解决这个问题. 亚当斯的结果未曾发表；但勒威耶的结果发表于 1846 年 8 月，跟着便于 9 月 23 日经柏林天文台的加耳发现了这个施摄动的行星，离勒威耶所算出的位置只差 52′.

不久人们便了解海王星的轨道根数和预测的数字相差很大：

	假设的行星		海王星
	亚当斯	勒威耶	
a	37.2	36.1	30.1
e	0.1206	0.1076	0.0090
ϖ	299°	284°	46°
m	0.00015	0.00011	0.00005

但是容易证明，这些差异并不影响结果，海王星实在是要寻找的行星．海王星与天王星的日心合每171年一次，最近一次在1822年．那时摄动力是一个特别突出的极大值，天王星的吻切根数在以后的几年内迅速地变化，但当这两个行星的距离相当远时，天王星的运动又差不多是开普勒式的（这里未论其他行星的摄动）．由此可见，观测可能对最大摄动值出现的时期提供一个相当好的近似值，换句话说，即略知天王星与假设存在的行星的日心合的时期．既知摄动体在1822年的黄经，只需给与其平均运动以一个容许的数值，便可推出其在1846年的黄经；亚当斯与勒威耶在第一近似值的计算里，对于这个行星的距离，取提丢斯所提供的数字（§88）；但在第二近似值的计算时，便发现这距离应该大大地减少．可是他们所采取的计算方法不许可将半长轴当作连续变化的自变数，他们终于将计算停止在比海王星的半长轴超过6或7个天文单位之上．幸而那时只在日心合后24年．亚当斯与勒威耶都认为所要找的轨道面的黄道交角很小，这假设后来也得着证实．就是由于这些顺适的条件，海王星的发现与勒威耶的预测，才得着相当好的符合．

这两位天文学家都将近日点放在日心合（其黄经取为277°）的附近，而且将假设的轨道的偏心率认为很大，因此由计算求得的向径比海王星的向径大了3个天文单位．可是在这两个理论上，这一差异为所假设的过大质量（为天王星的质量的3和2倍）所抵消．就其一般情况而论，这问题在数字计算上显然是不确定的，但是象我们刚才所说过的，只需对黄经作一个适当的估计，再加以对于倾角作一个幸运的假设，便可保证这个行星的发现．

对于水星，摄动的经典理论一向遭到失败．勒威耶算出水星的近日点的长期进动，除岁差之外为530″，但观测的数字为570″的数量级．这个结果是根据两个世纪水星凌日的观测而求得的；这些观测相当精确，可以提供很确定的轨道根数．因此勒威耶想到水星轨道内可能有一个行星，于是他努力计算这个假设的行星的轨道根数．1859年一位天文爱好者偶然看见一个黑点经过日面，他认为这便是那个未知的行星．如果真是这样，这个水内行星所应具有的质量便大到令人不可相信的程度．为了解释水星近日点的进动，有人假设牛顿引力之外还须加上与距离成反比例之项，因此它对于距离远的行星便没有什么影响，又有人假设太阳的形状有相当大的扁度等．

爱因斯坦排除了这一切牵强的人为假设，按照他的广义相对论，行星轨道的近日点应有一种进动，而且这是一团物质附近的空间里，应有的一种性质．水星近日点的进动据相对论算得为43″.03；1947年克勒门斯由行星摄动中未能说明的长期运动部分，算出这数字为42″.56±0″.94．他又算出金星近日点的进动为8″.63，但是由于金星轨道的偏心率相当小（$e=0.0088$），其近日点难于定准，虽然这数字和理论也是相当符合的．地球的近日点的进动为3″.84，而观测值为4″.6±2″.7．总之，这问题上理论与观测的符合，是令人满意的．

由地球自转所决定的时间尺度的不均匀性发现以后（§ 65），天文学家将根据地球所定的观测时期，归算到均匀时的尺度，更消除了行星运动理论与观测的许多差异．由于这个原因而来的偏差是与平均运动成正比例的，所以只有接近太阳的行星（水星、金星与地球）才适合于作这种校核之用．

本书后面的表 XXIX 记载大行星的轨道根数与其长期变化．在其表达式里，是以历书时 1900 年 1 月 0 日 12 时起算，单位为儒略世纪，即历书时的 36525 日为单位而计算的．平黄经 L，近日点黄经 ϖ，升交点黄经 Ω，都归算到历元 t 的平黄道与平春分点．倾角 i 亦归算到相同的黄道．因而这些根数都受到岁差的影响．

这个表也给出由观测所提供的平均运动 n 的数值以及由 n 推出的半长轴 a（长轴不受长期摄动的影响）．我们须在此作几个解说．容易证明，平均运动 n 之求得是从春分点的平均运动减去黄经上的周日岁差（0″.1376），而春分点的平均运动是以 36525 除平黄经 L 含 t 之项的系数．但是不要忘记，历元时的黄经也受长期摄动的影响，设以 λ 表示黄经上的摄动，则

$$L=L_0+n_0t+\int_0^t\frac{d\varepsilon}{dt}dt+\lambda$$

这个关系式规定了理论的平均运动 n_0（n_0 不应与 n 混淆）．半长轴 a 与行星对于恒星的平均运动的关系，在理论上为

$$n_0^2a^3=k(1+m)$$

所规定．表 XXIX 中所载的 a 的数值是根据这两个关系式并采取纽康所用的质量 m 的数值而算出的．

第十三章　月球的运动

§ 110　概论，数据

月球对于地球的运动，受到行星的摄动的影响很小，但是受到太阳的摄动却是很大．在行星运动一章里，我们说过，由于中央物质特别大，使根数变化法合于使用，因为由开普勒定律而来的近似值已经相当令人满意了，而且轨道根数的长期或周期变化也很小．可是月球的运动却是另外一种情况：具有大质量的是摄动体，而不是中央的天体．月球受地球与太阳的作用，围绕地球运动的轨道远远不是开普勒式的，读者从这一节可以了解到这一点．因此数学家不去发展月球轨道的吻切根数的理论[1]；他们所要寻求的是将月球本身的坐标(黄经、黄纬与视差)表为时间的函数．月球理论是天体力学中最困难的一个问题，它与行星理论是迥然不同的．

在这一节里，我们概论月球的地心运动与其几个主要差项．首先列出一些重要数据如下：

月球的*会合周*是月球与太阳连续两次地心合(即新月朔)的平均周期．已知相隔很长的时间的月食的日期之后，便可以推算这个周期．现在公认的数值是

$$\text{会合周}=29.5305881\ \text{日}$$

又称为*朔望月*，它规定了月相与日、月食，也规定阴历的一个月的长短．朔望月的平均运动是月球对于恒星的平均运动 n' 减去太阳对于恒里的平均运动 n 之差，其值为

$$n'-n=1296000'':29.5305881=43886''.6979$$

由此立刻推出*月球对于恒星的平均运动*

$$n'=43886''.6979+3548''.1928=47434''.8907$$

月球的恒星周，即月球对于固定春分点平黄经增加 360° 所需的时间，其值为

$$\text{恒星周}=1296000'':n'=27.3216609\ \text{日}$$

月球对于恒星的位移，每日 13°10′35″．每小时它平均移动半度多一点，即大约等于其视直径．当月球投射在恒星密布的天区之时，只需在望远镜里稍微注意一会，观测者便会看见它发生显著的移动．事实上，它在一秒钟内约走 0″.5．

月球的*平均分至运动*是对移动的春分点计算，可将周日岁差(0″.1376)加在月球对于恒星的平均运动上而求得：

$$n'+\lambda=47435''.0283$$

由此可得月球的*分至周*，即其平均赤经增加 24 时所需的时间：

$$\text{分至周}=1296000'':(n'+\lambda)=27.3215816\ \text{日}$$

月球的轨道，在一给定的瞬时，可以比拟为一个椭圆(其形状与位置的变化，将在下面讨论)，其平均偏心率为

1) 由于摄动体的质量很大，吻切轨道只是与受摄轨道简单地相切，很快就离开它了．因而我们不能用以计算月球的星历表(即使对于很近的时期)，这样的星历表便没有实际的意义．

$$e_0'=0.054900$$

其对应的中心差的第一项的系数:

$$2e'+\cdots=6°17'$$

这是月球运动的差数中的主要一项.

月球轨道的长轴循顺向转动,近地点对于恒星的平均运动达

$$\mu=6'40''.9167=400''.9167$$

因而它的转动周期为

$$1296000'':\mu=8\text{ 年 }310\text{ 日}$$

月球对于移动的近地点的平均运动的数值为

$$n'-\mu=47033''.9740$$

月球的平近点角的表达式为

$$M'=(n'-\mu)(t-t_0)$$

因而它增加 360° 的时间叫做*近点周*,比恒星周稍长一点:

$$\text{近点周}=1296000'':(n'-\mu)=27.5545502\text{ 日}$$

在近地点的长期位移上加入与偏心率同时变化的重要的周期差项(§ 120). 其中主要项的周期是太阳复回到拱线的周期, 即 206 日(这周期比 6 个月稍长一些, 近地点亦如太阳循顺向改位). 偏心率的极值为 0.045 与 0.065.

我们可以在中心差(根据近地点均匀移动、椭圆的大小不变而计算的)上加入一个名叫*出差*的项(周期为 31.81 日), 而表达月球在黄经上的运动所生的变形的一般效应. 它的半变幅达 1°16′(§ 120).

由观测与理论证明, 月球的黄经上还存在有许多别的差项. 其最重要的一项名叫*二均差*,其周期等于月球的会合周,即朔望月,将叙述在 § 115 内.

月球的轨道面(白道)是变化的,我们已经在 § 48 内提到. 黄白交角的平均值为

$$i_0'=5°8'43''$$

受到周期性的变化, 其中重要的一项的半变幅为 9′, 周期为 173 日. 此外, 白道的交点线作长期的逆行,对于恒星的平均运动之值为

$$\nu=-190''.77=-3'10''.77$$

对应的周期为 18.60 年.

所谓*交点周*是月球复回到它的升交点的平均周期, 即

$$\text{交点周}=1296000'':(n'-\nu)=27.2122178\text{ 日}$$

这周期规定了月球黄纬的变化; 因此在日月食的预报上有相当大的作用.

交点线的运动, 亦如拱线的运动, 也有它的差项; 其主要项的周期亦如交角上差项的周期, 同为 173 日. 这周期也是太阳过交点线的周期. 由于交点的逆行,这周期比 6 个月稍短一些. 交点从来不顺行, 只是当太阳与一个交点相合时, 交点才发生留; 那时轨道交角之值最大.

交点与交角的这一双重差,在月球的黄纬上表现为另一个差项,其半变幅为 10′,周期为 32.28 日(不应将这一周期与其相近的出差的周期相混). 这是黄纬的最大差项(§ 121).

月球与地球的距离, 由于轨道的偏心率和月球运动的差项, 受到相当大的周期变化.

因此月球的视差可用许多周期项之和来表达，其中的常数项，叫做月球的平均视差，其数值为

$$P'=3422''.70=57'2''.70$$

对应的距离，表为地球的赤道半径为

$$d=1:\sin P'=60.2666$$

叫做月球的平均距离.

表为公里：$d=60.2666\times 6378.4=384400$ 公里

与平均视差对应的月球的视半径为

$$s'=932''=15'32''$$

月地两球的直径之比 k 是一个重要常数，推算日、月食和掩星时经常使用. 显然，

$$k=\sin s':\sin P'$$

为计算日食用，我们取

$$k=0.272274$$

日食之时，若光球有很小一部分在月面边沿的凹凸处出现，便不能形成全食. 以上的 k 的数值是对应的月球表面最低部分而算出的. 掩星可发生于月面的山巅亦可发生于谷底，因此 k 值的计算须对应于月面的平均的轮廓，因此取

$$k=0.272496$$

可以看到 k 与一个简单比例很接近：

$$3:11=0.27272\cdots$$

设以月球为正球形，其半径便是

$$6378k=1738 \text{ 公里}$$

在 §114 里，我们给出月球的质量与密度的数值.

§111 摄动力的展开式

从这一节到 §120，我们假设黄白交角为零，因此摄动力在白道面内. 这样所引起的误差的数量级等于以 1 代 $\cos i'$ 所引起的误差（$i'^2=0.008$）.

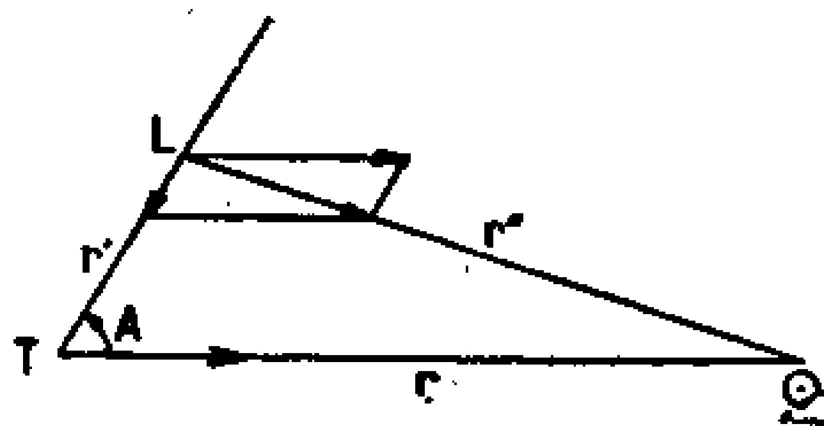


图 127

还有一个应注意之点：推出了包含各种周期项的展开式以后，我们须考察是否可以系统地略去短周期项. 我们曾经在 §109 内证明，短周期项的积分一般提供变幅小的差数项.

将太阳的质量作为单位，m 与 m' 分别表示地球与月球的质量，e 与 e' 表示它们的偏心率，a 与 a' 表示它们的半长轴，n 与 n' 表示它们的平均运动，r 与 r' 表示它们的向径；字母上无一撇的属于地球，有一撇的属于月球. 太阳与月球的地心黄经分别以⊙与☾符号表示，其黄纬均假设为零.

图 127 里分别以 ⊙, T, L 表示太阳、地球与月球. 更设

$$\odot L=r'' \quad \odot TL=☾-\odot=A$$

太阳的引力施于地球与月球上所产生的绝对加速度分别等于

$$\frac{k}{r^2} \text{ 与 } \frac{k}{r''^2}.$$

将后一个加速度按平行于 LT 与 $T\odot$ 两个方向分解成两个支量，其值等于

$$\frac{kr'}{r''^3} \text{ 与 } \frac{kr}{r''^3}$$

摄动力是以下两个向量之和：一个从 L 指向 T，其值为 $\frac{kr'}{r''^3}$；另一个平行于 $T\odot$，其值为

$$kr\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{r^3}\right)$$

设将这些摄动力在向径与横径上的分量，如前章那样分别表为 S 与 P，它们的表达式便是

$$\left.\begin{aligned} S&=-\frac{kr'}{r''^3}+kr\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{r^3}\right)\cos A\\ P&=-kr\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{r^3}\right)\sin A\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

这两式是严格的精确．将其展开便得

$$r''^2=r^2-2rr'\cos A+r'^2$$

$$\frac{1}{r''^3}=\frac{1}{r^3}\left(1-2\frac{r'}{r}\cos A+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

将展开式展到 $r':r$ 之比的二阶项为止，经过简化便得

$$\frac{1}{r''^3}=\frac{1}{r^3}\left[1+3\frac{r'}{r}\cos A+\frac{3}{4}\frac{r'^2}{r^2}(3+5\cos 2A)+\cdots\right]$$

将这个数值代入摄动力的表达式去，并以 n^2a^3 代 k（这是假设地、月两球的质量对于太阳是可以略去的），最后得出

$$\left.\begin{aligned} S&=n^2\frac{a^3}{r^3}r'\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2A+\frac{9}{8}\frac{r'}{r}\cos A+\frac{15}{8}\frac{r'}{r}\cos 3A+\cdots\right]\\ P&=-n^2\frac{a^3}{r^3}r'\left[\frac{3}{2}\sin 2A+\frac{3}{8}\frac{r'}{r}\sin A+\frac{15}{8}\frac{r'}{r}\sin 3A+\cdots\right]\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

后面我们要将开普勒元素引入到这些表达式里去；但须注意，太阳的这些元素不是对于地心 T，而是对于地-月系的引力中心 G．设 ρ 表示 G 点的向径，A_1 表示这向径与 TL 之间的角（图 128），则有如下的近似表达式：

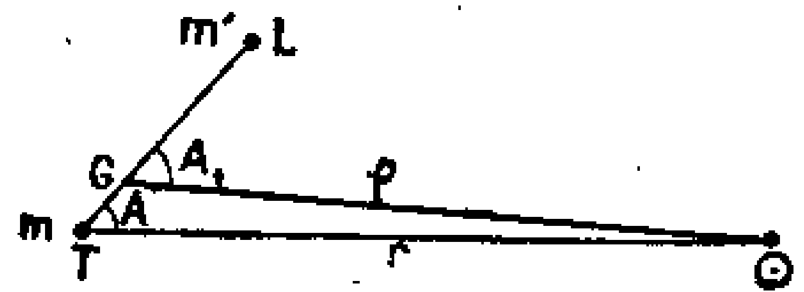


图 128

$$r=\rho+\frac{m'}{m+m'}r'\cos A_1$$

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{\rho^3}\left(1-3\frac{m'}{m+m'}\frac{r'}{\rho}\cos A_1\right)$$

$$A=A_1-\frac{m'}{m+m'}\frac{r'}{\rho}\sin A_1$$

$$\cos 2A=\cos 2A_1+\frac{m'}{m+m'}\frac{r'}{\rho}(\cos A_1-\cos 3A_1)$$

$$\sin 2A=\sin 2A_1+\frac{m'}{m+m'}\frac{r'}{\rho}(\sin A_1-\sin 3A_1)$$

将这些量代入 S 与 P 的表达式里去，便得如下的形式．以后我们只保留式中含 A_1 和 $2A_1$ 之项(由于以上对于短周期项的假设)：

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}n^2\frac{a^3}{\rho^3}r'\left[1+3\cos 2A_1+\frac{r}{\rho}\frac{m-m'}{m+m'}\left(\frac{9}{4}\cos A_1+\frac{15}{4}\cos 3A_1\right)+\cdots\right]\\ P&=-\frac{1}{2}n^2\frac{a^3}{\rho^3}r'\left[3\sin 2A_1+\frac{r}{\rho}\frac{m-m'}{m+m'}\left(\frac{3}{4}\sin A_1+\frac{15}{4}\sin 3A_1\right)+\cdots\right]\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

现在引入开普勒元素，为了表达向径与 A_1 角，我们使用第十章内，特别是 § 48 内的展开式．

(1) 将 $(a:\rho)^3$ 之比表为偏心率 e 和引力中心的平近点角 M 的幂级数：

$$\frac{a^3}{\rho^3}=1+\frac{3}{2}e^2+3e\cos M+\frac{9}{2}e^2\cos 2M+\cdots$$

(2) 将月球的向径按其偏心率 e' 与平近点角 M' 的函数展开：

$$r'=a'\left[1+\frac{e'^2}{2}-e'\cos M'-\frac{e'^2}{2}\cos 2M'+\cdots\right]$$

(3) A_1 角(月球的黄经与太阳的引力中心的黄经之差)，可以表为太阳与月球的恒星平均运动 n 与 n' 和这两个天体的黄经的开普勒周期差项的函数，这些项分别以 $\sum P$ 与 $\sum P'$ 两个符号代表．于是设

$$\xi=(n'-n)t+\xi_0$$

$$A_1=\xi-\sum P+\sum P'$$

式内

$$\sum P=2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\cdots$$

$$\sum P'=2e'\sin M'+\frac{5}{4}e'^2\sin 2M'+\cdots$$

ξ 角(A_1 的主要部分)不是时间的线性函数，因为平均运动 n' 至少受了周期性的摄动，这说法也应用于平近点角 M'，它受到平黄经上的摄动和月球的近地点上的摄动．太阳的平近点角自身便不能当做是时间的严格的线性函数．因此我们不能将摄动函数的分量表为简单周期项之和的形式，这便是月球运动理论主要困难所在．第一近似值在行星运动的许多情形上是可以满意的，但为了建立月球运动的精密理论，第一近似值便很不够了．

因此摄动力的展开介入如下的函数(式内 j 是整数)：

$$\cos jA_1=\left[1-\frac{j^2}{2}\left(\sum P'-\sum P\right)^2+\cdots\right]\cos j\xi$$
$$-\left[j\left(\sum P'-\sum P\right)-\frac{j^3}{6}\left(\sum P'-\sum P\right)^3+\cdots\right]\sin j\xi$$

$$\sin jA_1=\left[1-\frac{j^2}{2}\left(\sum P'-\sum P\right)^2+\cdots\right]\sin j\xi$$
$$+\left[j\left(\sum P'-\sum P\right)-\frac{j^3}{6}\left(\sum P'-\sum P\right)^3+\cdots\right]\cos j\xi$$

这样，括弧里出现 M, M', $2M$, $2M'$ 等角的正弦的乘积与整指数之项．这些乘积可

以转换为正弦与余弦之和[1]．最后一个转换使 $\cos jA_1$ 与 $\sin jA_1$ 变为正弦或余弦之和的形式，其引数是 ξ, M 与 M' 等角的线性组合，这组合的因子是正、负整数或零．

我们不用 S 和 P 的展开式来研究与 e' 有关的摄动；因此不在这里讨论含 e' 之项，我们在下面不用含 e' 与 e 而只用含 e 之项．

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}n^2a'\left[1+\frac{3}{2}e^2+3\cos 2\xi+3e\cos M+\frac{9}{4}\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\cos\xi+\cdots\right] \\ P&=-\frac{1}{2}n^2a'\left[3\sin 2\xi+\frac{3}{4}\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\sin\xi\cdots\right] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

含 $a':a$ 之项叫做视差项．

§ 112　摄动函数的展开式

摄动力使我们得以研究含偏心率 e' 的摄动，即月球近地点与其偏心率两者的摄动．它的一般表达式已在 § 102 给出．令 x, y 与 x', y' 分别表示太阳与月球对于地球的坐标，设不计入黄白交角 i'，则

$$R=k\left(\frac{1}{r''}-\frac{xx'+yy'}{r^3}\right)=\frac{n^2a^3}{r}\left(\frac{r}{r''}-\frac{xx'+yy'}{r^2}\right)$$

利用以下的关系式：

$$xx'+yy'=rr'\cos A$$

$$\frac{r}{r''}=\left[1-2\frac{r'}{r}\cos A+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{r'}{r}\cos A-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\cos^2 A-\frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\cos A+\frac{5}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\cos^3 A+\cdots$$

容易将 R 展为如下的形式：

$$R=\frac{n^2a^3}{r}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{r'}{r}\right)^2(1+3\cos 2A)+\frac{1}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^3(3\cos A+5\cos 3A)+\cdots\right]$$

略去之项开始于 $r':r$ 的 4 次项．设略去的第一项既不含白道的根数也不引入其偏导数，则最后只剩下有

$$R=n^2\frac{a^3}{r^3}r'^2\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2A+\frac{3}{8}\frac{r'}{r}\cos A+\frac{5}{8}\frac{r'}{r}\cos 3A+\cdots\right] \quad (1)$$

现在象以上展开 S 与 P 那样去展开 R，但保留含白道的偏心率 e'，直到二次项．只需在已经推出的部分展开式里加上后面的一项：

$$r'^2=a'^2\left[1+\frac{3}{2}e'^2-2e'\cos M'-\frac{1}{2}e'^2\cos 2M'+\cdots\right]$$

---

1) 下列的关系式可用以作前几项的计算：

$$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$$
$$2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$$
$$2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$$
$$2\cos^2 a=1+\cos 2a$$
$$2\sin^2 a=1-\cos 2a$$
$$4\cos^3 a=3\cos a+\cos 3a$$
$$\cdots,$$

如前节所证明的，视差项上应乘以$(m-m'):(m+m')$．经过一切归算之后，摄动函数便展开如下：

$$R=n'^2a'^2\Big[\frac{1}{4}+\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{4}\cos 2\xi+\frac{3}{4}e\cos M-\frac{1}{2}e'\cos M'$$
$$-\frac{3}{8}e\cos(2\xi+M)+\frac{21}{8}e\cos(2\xi-M)+\frac{3}{4}e'\cos(2\xi+M')$$
$$-\frac{9}{4}e'\cos(2\xi-M')+\frac{3}{4}e'^2\cos(2\xi+2M')+\frac{15}{8}e'^2\cos(2\xi-2M')$$
$$-\frac{1}{8}e'^2\cos 2M'+\frac{m-m'}{m+m'}\Big(\frac{3}{8}\frac{a'}{a}\cos\xi+\frac{5}{8}\frac{a'}{a}\cos 3\xi\Big)+\cdots\Big]$$

由于

$$S=\frac{a'}{r'}\frac{\partial R}{\partial a'}\qquad P=\frac{1}{r'}\Big(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon'}+\frac{\partial R}{\partial \varpi'}\Big)$$

(§108内关系式III)，我们可以校核以前所得的S与P两个展开式，第二式可以简化为

$$P=\frac{1}{r'}\frac{\delta R}{\delta \xi}$$

因为这里我们故意略去了含M'之项.

若计入交角i'，则除以上展开式中的引数之外，还有第四个引数，即月球至其升交点的距离η．若将所引用的四个引数：

$$\xi=☾_m-\odot_m\quad M=\odot_m-\varpi\quad M'=☾_m-\varpi'\quad \eta=☾_m-\Omega'$$

联系起来，便可看见在行星摄动理论中所引用的6个引数中出现了5个：$\odot_m=nt+\varepsilon$，$☾_m=n't+\varepsilon'$，ϖ，ϖ'，Ω'；摄动体是太阳时，第六个便没有了．我们曾经假设摄动函数被分解为许多周期项之和，其中每一项含有一个以这些引数的整系数的线性组合(见§109)的余弦函数为其因数．这一节也出现同样的情形，而且这些系数实在是平均运动偏心率与交角的函数.

上面的展开式曾经德洛勒因计入了交角，而达到320项，可以作月球运动普遍理论的出发点．只在研究与其偏心率有关的月球摄动理论时，我们才使用它们．其他的主要摄动将以初级的近似法去研究，直接使用摄动力的S与P两个分量.

至于摄动力在轨道面法线上的分量以及轨道面的移动，将辟专节讨论(§121).

§113 运动方程式，径向摄动力的常数项

为了研究与月球偏心率e'无关的摄动，我们利用下列形式的运动方程式：

$$\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d☾}{dt}\right)^2=-k\frac{m+m'}{r'^2}+S\tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r'^2\frac{d☾}{dt}\right)=Pr'\tag{2}$$

第一式表达极坐标的径向加速度，第二式表达横向加速度，这式提供面积常数的导数，已在§108里推导出来.

这些方程式的积分要达到编制月离表的足够近似的程度，是一种很繁复的计算．这里我们不能使用初级的方法，因为这只能表明有哪些主要的摄动项，而不能提供完全的表达式．为尽量简化问题起见，我们使用下列的规则：

(1) 将摄动力各项依次引入运动方程式里去时，假设只有其中一项存在而推导其对应的表达式.

(2) 在引数 ξ, M 与 M' 是时间的线性函数的假设下，积分这些方程式，因此在右端里略去这些引数受到影响的摄动.

(3) 右端里同时出现长周期项(有时还有常数项)和短周期项时，我们略去短周期项，理由已叙述在§111内.

这样求得的近似值与牛顿用几何方法所得的结果相同. 由这些简单方法所导出的结果，称为月球理论的第二近似解.

总之，为了研究近地点运动与出差，我们应用拉格朗日方程式，并用以上推出的摄动函数的展开式. 在这一点比对于其他摄动，我们将近似值推得更远一些.

现在先讨论摄动力的常数部分. 分量 P 不含常数项，方程式(2)右端为零，运动遵循面积定律. 至于方程(1)可以写为

$$\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d\text{☾}}{dt}\right)^2=\frac{-k(m+m')+\frac{1}{2}n^2a'^3\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)}{r'^2}+\frac{1}{2}n^2a'\left(1-\frac{a'^2}{r'^2}\right)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right) \tag{3}$$

S 里的常数项是从§111里方程(4)的第一式而来. 因为我们假设原来的轨道是正圆的(即假设 $e'=0$)，方程(3)的右端可以只保留其第一项. 这方程与面积定律联合，便决定了遵循§83内方程(5)的圆运动，这方程在这里可以写为

$$n'^2a'^3=k(m+m')-\frac{1}{2}n^2a'^3\left(1+\frac{3}{2}e^2\right) \tag{4}$$

因此，

$$k(m+m')=n'^2a'^3\left[1+\frac{1}{2}\frac{n^2}{n'^2}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right]=n'^2a'^3F \tag{5}$$

由此求得 $F=1.0028$. 将 e' 和 i' 考虑进去的比较完全的理论给出的较确切的数值是，

$$F=1.002723\left(=\frac{368}{367}\right)$$

由此可见，由于太阳的摄动，将地球对于月球的引力减少了1/368. 因此，§89里有关地球的质量的计算须得修订. 这便是在进一步研究月球所受的摄动以前，我们所应做的修订.

§114 地球与月球的质量，月球的视差

将太阳的质量取为单位，地球与月球的质量之和与地球轨道根数的关系为

$$k(1+m+m')=n^2a^3$$

刚才推出另一个含月球轨道根数的关系式：

$$k(m+m')=n'^2a'^3F$$

由此有下列的近似关系式：

$$\frac{1}{m+m'}=\left(\frac{n}{n'}\right)^2\left(\frac{a}{a'}\right)^3\frac{1}{F}$$

$$n:n'=3548''.19:47434''.9=1:13.3688$$

$$a:a'=\sin 3422''.7:\sin 8''.80=388.93$$

$$F=1.002723$$

于是 $$1:(m+m')=328280$$

与纽康所给出的数值(329390)稍有差异，因为他所取的太阳视差为 8″.79，而不是 8″.80；所以在这一点上，1896 年所采用的常数系统欠均匀性。

剩下要计算的是地、月两球的质量之比。太阳和行星的观测归算到地心，而不到地-月系的质心 G(图 128)，可是只有这个质心才具有对于太阳作开普勒运动的性质。为了将根据椭圆根数算出的太阳的引力中心的黄经(计入行星的摄动)归算到它的地心黄经，应当在前者上加入下列一项(符号见 § 111)：

$$\Delta\odot=A_1-A=\frac{a'}{a}\frac{m'}{m+m'}\sin(☾-\odot)$$

这个差数的平均周期等于一个朔望月，因此名叫太阳的*月周差*。据纽康，这个差的系数从太阳的子午观测所推出来的是 6″.46，于是求得

$$\frac{m+m'}{m'}=\frac{206265}{6.46\times 388.9}=82.1$$

$$\frac{m}{m'}=81.1$$

但有更精确的方法决定这个比值。所有的行星都表现有与太阳的月周差同类的差数项，其系数和它们的视差正比。所以为测定太阳视差而作的小行星的观测，同时提供 ϖ_0 与 $m:m'$ 之比。

设根据纽康取

$$\frac{m}{m'}=81.45$$

便得 $$m=(m+m')\frac{m}{m'}\frac{m'}{m+m'}=\frac{1}{328280}\frac{81.45}{82.45}=\frac{1}{332310}$$

前面已经讲过，腊布于 1950 年刊布了他讨论爱神星在 1926 至 1945 年间所受的摄动而得的结果。他求得地-月系总质量的倒数的数值为

$$1:(m+m')=328452$$

其可几误差只有 43 个单位。与之对应的太阳视差为 8″.79835 ±0″.00039，地月两球的质量之比为

$$m:m'=81.375\pm 0.026$$

于是求得地球的质量的倒数为 332488。这些新结果的权量无疑是很大的。

引力中心到地心的距离 GT，表为地球的赤道半径，其平均值为

$$\frac{a'm'}{m+m'}=\frac{60.27}{82.45}=0.731$$

因此引力中心常在地球里面。

月地两球的体积之比为

$$k^3=0.02019=1:49.53$$

而月地两球的质量之比为

$$1:81.45$$

月球的平均密度等于

$$5.52\,\frac{49.53}{81.45}=3.36$$

比较地球表面的岩石的密度(2.0—3.0)稍大一点.

剩下的是说明怎样据重力测量去推导求月球视差的方程式:

$$k(m+m')=n'^2a'^3F$$

给出

$$\sin^3\varpi'=\left(\frac{R}{a'}\right)^3=n'^2\,\frac{R^3}{k(m+m')}F$$

$$\sin\varpi'=n'\sqrt[3]{\frac{R}{n'}\,\frac{R^2}{km}\,\frac{m}{m+m'}\,F}$$

黑梅特公式(§ 89)提供

$$\frac{km}{R^2}=g_0(1-\varepsilon)+\frac{3}{2}\,\omega^2R$$

采用如下的数据:

$$R=6378.388\ 10^5(\text{黑福德})$$

$$\varepsilon=1:297.0(\text{黑福德})$$

$$\omega=2\pi:86164.1\ \text{弪/秒}$$

$$g_0=978.030\ \text{厘米/秒}^2(\text{黑梅特})$$

便算得

$$\frac{km}{R^2}=979.825\ \text{厘米/秒}^2$$

再取(这里时间的单位例外地取为秒)

$$n'=47434''.89:86400$$

$$m:(m+m')=81.45:82.45$$

最后求得

$$\begin{aligned}\sin\varpi'&=3422''.52\\&\quad+0''.16\\\hline\varpi'&=3422''.68\end{aligned}$$

如月球的质量采用腊布的而不是纽康的数值,便应将 ϖ' 减去 $0''.01$,即将月球的距离增加1公里;若再用国际大地测量与地球物理协会于1930年在斯德哥尔摩大会时所采用的 g_0 的数值

$$g_0=978.049\ \text{厘米/秒}^2$$

则 ϖ' 的数值应该减去 $0''.02$.

这样测定的月球的视差 $3422''.7$ 与观测异常相合,这一事实对重力与引力是同一种力提供实验的证据.

§ 115 与偏心率无关的差数项 1

1. 二均差

二均差是月球运动上的一种差数,于1582年为第谷所发现,牛顿在其«原理»中曾建立了它的理论.它的周期是半个朔望月,在朔、望与两弦时为零,而在八分之一月的倍数时,其绝对值为极大,可超过39′.这些情形足使我们知道描述这现象的引数,它应该是§ 111所定的 ξ 角(月球与太阳的平黄经之差)的两倍:

$$\xi=(n'-n)t+\varepsilon'-\varepsilon$$

同节的方程(4)对 S 与 P 提供对应的项，在这上面更加入 S 的常数项(这里略去含 e 之项)：

$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}n^2a'(1+3\cos 2\xi)\\ P&=-\frac{3}{2}n^2a'\sin 2\xi \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

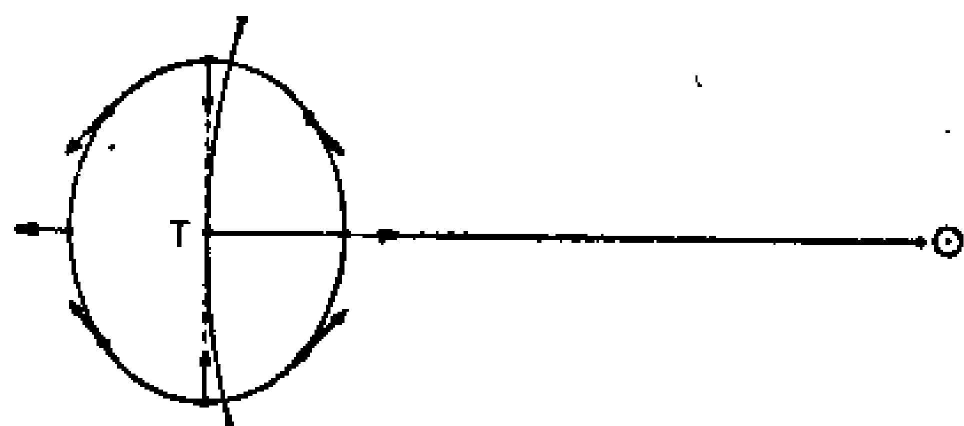


图 129

为了表明一个朔望月里摄动力的二均差，更方便的是采用另外一种分解法，即将其分解为下列两个分量：

1．径向上的支量 $\frac{1}{2}n^2a'$；这个力常与地球的方向相背，已经在§113内讨论过了．

2．与径向成 -2ξ 角的支量 $\frac{3}{2}n^2a'$ (图129)．在朔望时，这分量仍然减少了地球对于月球的引力，但在两弦时却增加．因此按照惠根斯的定理，轨道的曲率半径在两弦比在朔望时小些，而轨道不复是正圆了．它成了一个卵形，其短轴常指向太阳．这便是我们要从计算去表明的．

回头去看§113里的方程(1)，利用同节方程(3)与(4)将其改写为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d☾}{dt}\right)^2&=-n'^2\frac{a'^3}{r'^2}+\frac{1}{2}n^2a'\left(1-\frac{a'^2}{r'^2}+3\cos 2\xi\right)\\ \frac{dC}{dt}&=-\frac{3}{2}n^2a'^2\sin 2\xi \end{aligned}\right\}\tag{2}$$

利用§113的规则2，即设 n' 与 a' 皆是常数，去对这两个方程积分，第二式立刻给出

$$C=C_0+\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'-n}a'^2\cos 2\xi\tag{3}$$

由于 C 的平均值为 $n'a'^2$，上式可以写为

$$r'^2\frac{d☾}{dt}=n'a'^2\left[1+\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\cos 2\xi\right]$$

由方程(2)与(3)消去 $\frac{d☾}{dt}$．略去含 4ξ 等之项，便得

$$\left(\frac{d☾}{dt}\right)^2=n'^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^4\left[1+\frac{3}{2}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\cos 2\xi\right]$$

因此，再回到方程(2)的第一式求得

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=n^2a'\left(1-\frac{a'}{r'}\right)\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{a'}{r'}\right)-\left(\frac{n'}{n}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\right]+\frac{3}{2}n^2a'\left[1+\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\frac{n'}{n'-n}\right]\cos 2\xi$$

在方括弧内，若以1代 $a':r'$(这在我们所要的近似程度下是合理的)，剩下的便是

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=-a'\left(1-\frac{a'}{r'}\right)(n'^2-n^2)+\frac{3}{2}n^2a'\left(1+\frac{n'}{n'-n}\right)\cos 2\xi$$

寻找一个如下形式的解：

$$r' = a'(1 - x\cos 2\xi)$$

由是得
$$1 - \frac{a'}{r'} = -x\cos 2\xi + \cdots$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = 4(n'-n)^2 a' x\cos 2\xi$$

含 x 的方程式可以如下推出：

$$[4(n'-n)^2 - (n'^2 - n^2)]x = \frac{3}{2}n^2\frac{2n'-n}{n'-n}$$

$$x = \frac{3}{2}\left(\frac{n}{n'-n}\right)^2\frac{2n'-n}{3n'-5n} = \left(\frac{\frac{n}{n'}}{1-\frac{n}{n'}}\right)^2\frac{1-\frac{1}{2}\frac{n}{n'}}{1-\frac{5}{3}\frac{n}{n'}} = \frac{1}{139.1}$$

月球在一个卵形轨道上运动，其半短轴指向太阳(图 129)；其两轴之比为

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{138}{140} = \frac{69}{70}$$

这是牛顿所得的结果．月球的视差在两弦比在朔望时平均约小 1/70 (据月离表这是 1/60.6)．

回到方程(3)，有

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 = 1 + 2x\cos 2\xi + \cdots$$

因此，
$$\frac{d\zeta}{dt} = n'\left[1 + \left(2x + \frac{3}{4}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\right)\cos 2\xi\right]$$

积分后，
$$\zeta = n't + \varepsilon' + \frac{n'}{n'-n}\left(x + \frac{3n^2}{8n'(n'-n)}\right)\sin 2\xi + \cdots$$

月球黄经的表达式里这样出现的差数叫做二均差，其系数按以上公式计算等于

$$0.01022 = 35'.1$$

我们可用如下的方式展开 x：

$$x = \frac{n^2}{n'^2}\left(1 + \frac{19}{6}\frac{n}{n'} + \cdots\right)$$

由此得这差数的系数：

$$\frac{11}{8}\frac{n^2}{n'^2} + \frac{59}{12}\frac{n^3}{n'^3} + \cdots$$

这是缓慢收敛的级数的前两项，据德洛勒，以后之项为

$$\underset{1587''}{\frac{11}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2} + \underset{424''}{\frac{59}{12}\left(\frac{n}{n'}\right)^3} + \underset{80''}{\frac{893}{72}\left(\frac{n}{n'}\right)^4} + \underset{13''}{\frac{2855}{108}\left(\frac{n}{n'}\right)^5} + \underset{2''}{\frac{8304449}{165888}\left(\frac{n}{n'}\right)^6} + \cdots$$

其和为 35'6''．

这上面再加入与偏心率和交角有关的各项，则含 $\sin 2\xi$ 之差数项的系数为 39'30''．

§116 与偏心率无关的差数项 2

2．月角差

月角差是随 ξ 而变化的一种，其周期等于一个朔望月．下面列摄动力展开式中对应之项：

$$S=\frac{9}{8}n^2a'\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\cos\xi$$

$$P=-\frac{3}{8}n^2a'\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\sin\xi$$

由于 $$\frac{9}{8}=\frac{3}{8}+\frac{3}{4};\quad -\frac{3}{8}=\frac{3}{8}-\frac{3}{4},$$

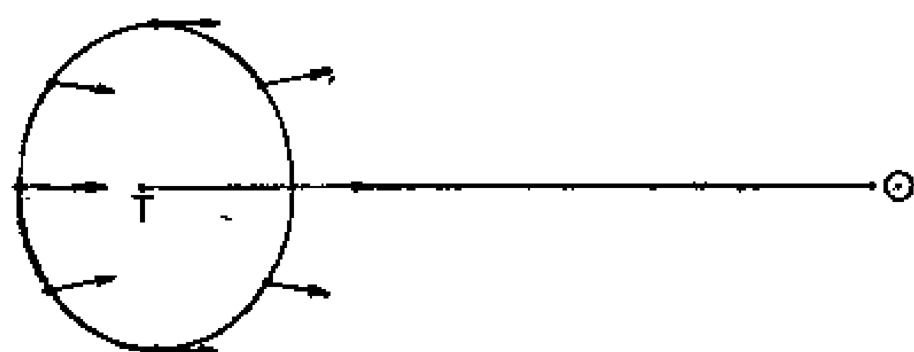


图 130

可见摄动力还是另外两力之和，其一为

$$\frac{3}{4}n^2a'\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}$$

平行于地-日方向，另一力的大小只有前者的一半，而方向是对于月球向径与前一力对称．合摄动力的变化便这样得到表现(图 130)．由此可看出这些力的效应：受扰轨道的曲率半径，在新月比满月时更大，轨道是偏心的，即其中心向太阳改位．

将摄动力里含 ξ 之项介入运动的方程式，并以 $n'^2a'^3$ 代 $k(m+m')$，便得以下的方程式．

为简化起见，略去 $(m-m'):(m+m')$ 那个因数，我们将在下面推出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d☾}{dt}\right)^2=-\frac{n'^2a'^3}{r'^2}+\frac{9}{8}n^2\frac{a'^2}{a}\cos\xi\\&\frac{dC}{dt}=-\frac{3}{8}n^2\frac{a'^3}{a}\sin\xi\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

第二方程式可以立刻积分为

$$C=C_0+\frac{3}{8}\frac{n^2}{n'-n}\frac{a'^3}{a}\cos\xi$$

或

$$r'^2\frac{d☾}{dt}=n'a'^2\left[1+\frac{3}{8}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\frac{a'}{a}\cos\xi\right]\tag{2}$$

由方程(2)与方程组(1)的第一式消去 $\frac{d☾}{dt}$，

$$\left(\frac{d☾}{dt}\right)^2=n'^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^4\left(1+\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\frac{a'}{a}\cos\xi\right)$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=n'^2\frac{a'^3}{r'^2}\left(\frac{a'}{r'}-1\right)+\frac{3}{8}n^2\frac{a'^2}{a}\left(3+\frac{2n}{n'-n}\frac{a'^3}{r'^3}\right)\cos\xi\tag{3}$$

除了在 $\left(\frac{a'}{r'}-1\right)$ 之外，设 $r'=a'$，则

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=n'^2a'\left[\frac{a'}{r'}-1+\frac{3}{8}\frac{a'}{a}\frac{n^2}{n'^2}\frac{5n'-3n}{n'-n}\cos\xi\right]$$

这方程有一近似解，其形状为

$$r'=a'\left(1+x\frac{a'}{a}\cos\xi\right)$$

$$\frac{a'}{r'}-1=-x\frac{a'}{a}\cos\xi+\cdots$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=-x\frac{a'^2}{a}(n'-n)^2\cos\xi$$

写含 x 的方程式:

$$[n'^2-(n'-n)^2]x=\frac{3}{8}\frac{n^2}{n'-n}(5n'-3n) \tag{4}$$

由此得

$$x=0.0752$$

还可以如下的方式展开 x:

$$x=\frac{15}{16}\frac{n}{n'}+\frac{27}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\cdots$$

但比较完善的理论表明只有这个展开式的第一项是正确的。

计算对应于黄经上的差数项:

$$\frac{d☾}{dt}=\frac{C}{r'^2}=n'-n'\frac{a'}{a}\left(2x-\frac{3}{8}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\right)\cos\xi$$

$$☾=n't+\varepsilon'-\frac{a'}{a}\left(2x-\frac{3}{8}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\right)\frac{n'}{n'-n}\sin\xi$$

$$☾=n't+\varepsilon'-\frac{a'}{a}\left(\frac{15}{8}\frac{n}{n'}+\cdots\right)\sin\xi$$

这展开式里出现的便是月角差。但在计算这系数的数值以前,证明在这个特殊情况下,容易将近似值向前推进。假设地、月两球的轨道皆是正圆的,这样便导出 $r'=a'$,并可将 A 看为 ξ,即时间的线性函数。

可是,刚才所说的第二近似计算,提供含有与 ξ 有关的差数的 r' 与 ☾ 的数值。将以上求得的差数项的 $A=☾-⊙$ 加以改正(ξ 仍然是时间的线性函数)。

$$A=\xi-\frac{15}{8}\frac{a'}{a}\frac{n}{n'}\sin\xi$$

$$\cos 2A=\cos 2\xi+\frac{15}{8}\frac{a'}{a}\frac{n}{n'}\cos\xi-\frac{15}{8}\frac{a'}{a}\frac{n}{n'}\cos 3\xi$$

$$\sin 2A=\sin 2\xi+\frac{15}{8}\frac{a'}{a}\frac{n}{n'}\sin\xi-\frac{15}{8}\frac{a'}{a}\frac{n}{n'}\sin 3\xi$$

因此 P 与 S 的月角差项可以写为(从 § 111 方程组 2 开始计算)

$$S=n^2r'\frac{a'}{a}\left(\frac{9}{8}+\frac{45}{16}\frac{n}{n'}\right)(\cos\xi-\cos 3\xi)$$

$$=\frac{9}{8}n^2r'\frac{a'}{a}\left(1+\frac{5}{2}\frac{n}{n'}\right)(\cos\xi-\cos 3\xi)$$

$$P=-n^2r'\frac{a'}{a}\left(\frac{3}{8}+\frac{45}{16}\frac{n}{n'}\right)(\sin\xi-\sin 3\xi)$$

$$=-\frac{3}{8}n^2r'\frac{a'}{a}\left(1+\frac{15}{2}\frac{n}{n'}\right)(\sin\xi-\sin 3\xi)$$

只取至含 ξ 之项,运动方程式变为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\dfrac{d☾}{dt}\right)^2=r'\left[-n'^2\left(\dfrac{a'}{r'}\right)^3+\dfrac{9}{8}n^2\dfrac{a'}{a}\left(1+\dfrac{5}{2}\dfrac{n}{n'}\right)\cos\xi\right]\\ \dfrac{dC}{dt}=-\dfrac{3}{8}n^2r'^2\dfrac{a'}{a}\left(1+\dfrac{15}{2}\dfrac{n}{n'}\right)\sin\xi\end{cases}$$

设在第二方程里以 a' 代 r',则可以一次积分而得解,于是,

$$r'^2\frac{d☾}{dt}=n'a'^2\left[1+\frac{3}{8}\frac{n^2}{n'(n'-n)}\left(1+\frac{15}{2}\frac{n}{n'}\right)\frac{a'}{a}\cos\xi\right]$$

$$=n'a'^2\left[1+\left(\frac{3}{8}\frac{n^2}{n'^2}+\frac{51}{16}\frac{n^3}{n'^3}\right)\frac{a'}{a}\cos\xi\right] \tag{2b}$$

如上利用 C 的改进值推进计算，首先推得含修订后的 r' 的方程式：

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=r'\left(n'^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^4\left[1+\left(\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'^2}+\frac{51}{8}\frac{n^3}{n'^3}\right)\frac{a'}{a}\cos\xi\right]-n'^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{9}{8}n^2\frac{a'}{a}\left(1+\frac{5}{2}\frac{n}{n'}\right)\cos\xi\right)$$

$$=r'\left(n'^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{a'}{r'}-1\right)+\frac{3}{8}n^2\left(5+\frac{49}{2}\frac{n}{n'}\right)\frac{a'}{a}\cos\xi\right) \tag{3b}$$

然后含 x 的对应的方程式：

$$[n'^2-(n'-n)^2]x=\frac{3}{8}n^2\left(5+\frac{49}{2}\frac{n}{n'}\right) \tag{4b}$$

由是
$$x=0.1013=\frac{15}{16}\frac{n}{n'}+\frac{81}{16}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\cdots$$

计入以上略去的因数，从而推得

$$\frac{d☾}{dt}=n'-n'\left(\frac{15}{8}\frac{n}{n'}+\frac{78}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right)\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\cos\xi$$

$$☾=n't+\varepsilon'-\left(\frac{15}{8}\frac{n}{n'}+\frac{93}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right)\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\sin\xi$$

式内含 $n:n'$ 的二次项是正确的．根据德洛勒月角差的系数展开如下：

$$-\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\left[\underset{74''}{\frac{15}{8}\frac{n}{n'}}+\underset{34''}{\frac{93}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2}+\underset{12''}{\frac{6887}{128}\left(\frac{n}{n'}\right)^3}+\underset{4''}{\frac{137197}{512}\left(\frac{n}{n'}\right)^4}+\cdots\right]$$

根据布朗，这一项之值为

$$-49808''.2\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}$$

或 $-124''.96$，当采用下列的常数时，

$$\varpi_0=8''.800\quad \varpi'=3422''.7\quad m:m'=81.45$$

他一方面，月掩星的观测可以对这系数提供更精确得多的数值；因为月角差上弦时推迟了掩星 3^m48^s，下弦时提早了同样长的时间．由于月掩星容易观测，可将这现象发生的时间记录到十分之一或二秒；现在用光电记录，误差更是减少．月面边沿不规则的轮廓，在测量的归算上可能引起一些困难；如果没有这一困难，月掩星的观测倒是测定太阳的距离（因而它的视差）一个好方法（参看 § 63 与 § 70）．

由于轨道的变形，月球的视差，在新月附近小了 $1''$，满月附近大了 $1''$．距离上对应的变化平均约为 ±110 公里．

§ 117　与地球轨道偏心率有关的差数项 1

1．周年差

与二均差相同，月球的周年差也是第谷发现的，是月球的平均运动以一年为周期的变

化．周年差是与太阳的摄动力的变化相联系的，而这变化之量是与向径 r 的立方成反比的，但 r 又是太阳的平近点角的函数．

S 分量的展开式（§111 的公式 4）里有含 M 之项，但 P 的展开式里则无．因此面积常数可以看做不变，于是可将运动的方程写为如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d☾}{dt}\right)^2=-\frac{n'^2a'^3}{r'^2}+\frac{3}{2}n^2a'e\cos M\\&\frac{dO}{dt}=0 \text{ 或 } r'^2\frac{d☾}{dt}=n'a'^2\end{aligned}\right\}$$

由这两个方程消去 $\frac{d☾}{dt}$，得

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=\frac{n'^2a'^3}{r'^2}\left(\frac{a'}{r'}-1\right)+\frac{3}{2}n^2a'e\cos M$$

寻找一个如下形状的近似解：

$$r'=a'(1+x\cos M)$$

$$\frac{a'}{r'}-1=-x\cos M$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2}=-a'xn^2\cos M$$

未知数 x 为下列方程所给出：

$$x(n'^2-n^2)=\frac{3}{2}n^2e$$

$$x=\frac{3}{2}e\frac{n^2}{n'^2}\left(1+\frac{n^2}{n'^2}+\cdots\right)=0.000141$$

（确切值：0.000117；$a'x=45$ 公里）．

最后得

$$\frac{d☾}{dt}=n'-2n'x\cos M+\cdots$$

$$☾=n't+\varepsilon'-2\frac{n'}{n}x\sin M+\cdots$$

这一差项的系数，据计算为 13′，其展开式的第一项为

$$-3e\frac{n}{n'}.$$

这展开式里不含 $\left(\frac{n}{n'}\right)^2$ 之项；至于含 $\left(\frac{n}{n'}\right)^3$ 之项，不能如以上的方式确切地推得．德洛勒求得的展开式如下：

$$-e\left[3\frac{n}{n'}-\frac{735}{16}\left(\frac{n}{n'}\right)^3-\frac{1261}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^4-\frac{142817}{96}\left(\frac{n}{n'}\right)^5-\frac{3257665}{576}\left(\frac{n}{n'}\right)^6-\cdots\right]$$

$$-776'' \qquad +67'' \qquad +34'' \qquad +12'' \qquad +3''$$

其和为 $-11'2''$．再加上与偏心率 e' 有关之项，这系数为 $-11'8''$．

由 1 月 2 日至 7 月 2 日，月球的运动较其平均运动迟；由 7 月 2 日至次年 1 月 2 日，较其平均运动速．由于周年差，4 月初食与掩星约推迟 20 分；10 月初这些现象便提早相同的一段时间．第谷即由食的观测，而发现了这个差数．

§ 118 与地球轨道偏心率有关的差数项 2

2. 月球的长期加速度

1693 年哈雷发现月球的平均运动为托勒密(2 世纪)与阿拉伯人(9 世纪)由日月食观测所定出的，比由近代观测所定出的要小一些. 拉朗德将所谓月球的长期加速度[1](这名称是不适当的)，定为每世纪 10″，换句话说，即在月球黄经的表达式里，为说明其平均运动的长期加速而引入的 t^2 之项的系数:

$$☾=n't+\varepsilon'+bt^2+\cdots$$

1787 年这现象还没有得着解释时，拉普拉斯说明地球轨道偏心率 e 的长期变化，应该在月球的运动上造成长期的加速. 我们知道，地球轨道的半长轴，不受任何长期摄动; 可是日-地间平均距离的表达式(§ 84)为

$$a\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)$$

因此这距离与偏心率作同方向的变化，于是太阳施于月球的非周期性的摄动力，也作长期的变化.

拉普拉斯为这个效应建立了理论; 我们将在下面叙述他所得的结果，这结果在当时好象是与观测相符合的. 在 § 113 里我们假设有如下的等式:

$$k(m+m')=n'^2a'^3\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^2e^2\right] \qquad (1)$$

这方程的右端代表一个不变量; 但是式内含有长期变化的偏心率 e. 因此轨道根数，特别是平均运动 n' 是变化的. 由于摄动力的分量 P 的表达式里不含有非周期项，而面积常数不受长期摄动，故乘积

$$n'a'^2 \qquad (2)$$

提供第二个不变量. 由 (1) (2) 两式消去 a'，便可立刻证明乘积:

$$n'\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^2e^2\right]^3$$

也是不变量. 容易推出平均运动 n' 对于偏心率 e 的导数为

$$\frac{dn'}{de}=-3\frac{n^2}{n'}e$$

据纽康，偏心率 e(现时在减少)的表达式为

$$e=0.01675104-418t10^{-7}-126t^210^{-9}$$

时间 t 自 1900.0 起算，单位是世纪. 写出这公式的开始两项，而设其为

$$e=e_0-ht$$

于是

$$dn'=3\frac{n^2}{n'}e_0hdt$$

$$n'=n_0'+3\frac{n^2}{n_0'}e_0ht$$

---

1) 所谓加速度等于系数 b 的两倍.

$$☾ = n_0' t + \varepsilon' + \frac{3}{2}\frac{n^2}{n_0'} e_0 h t^2$$

这便是拉普拉斯为月球的长期加速度求得的表达式，它提供

$$b = \frac{3}{2}\frac{n^2}{n'} e_0 h = 10''.3$$

式内时间 t 的单位是世纪.

拉普拉斯的理论好象与观测有相当好的符合，可是 1853 年 J. C. 亚当斯证明，拉普拉斯的分析是有缺陷的. 为了求出 b 的第二近似值，便须保留与 e 有关的摄动函数所有的项(不管它们是长期的或周期的)，而且在周期项里还应计入引数的表达式里的加速度. 亚当斯因此得出如下的展开式，后更经德洛勒加以补充：

$$b = \frac{n^2}{n'} e_0 h\left[\frac{3}{2} - \frac{3771}{64}\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - \frac{34047}{64}\left(\frac{n}{n'}\right)^3 - \cdots\right]$$

第一项之外，其他各项皆是负的. 级数之和大约是第一项的一半.

$$b = 10''.3 - (2''.3 + 1''.5 + 0''.7 + 0''.2 + 0''.1 + \cdots) = 6''$$

(根据布朗，这是 $7''.14$)可是根据观测现今估计的数值为 $12''.36$. 可见拉普拉斯发现的数应只能说明观测的加速度的一半. 费雷耳与德洛勒先后采取康德的意见，用潮汐使地球自转能量的损耗来说明造成残余之量(参看 § 62).

在 24000 年间，地球轨道的偏心率不断地减少，然后再度增加，而月球的平均运动的对应的变化将改变其方向. 可见这种差数不是真正长期的，而是很长周期的周期差.

我们刚才所研究的是行星对于地球轨道的摄动的间接效应：这些摄动足够改变太阳对于月球的作用，而表现为运动上的一个重要差数. 这不是唯一的情形. 行星施于月球的摄动分为两类：(1)一类是直接的，由于行星在地-月系上所施的引力；(2)另一类是间接的，由于行星的引力使地球的轨道变形，因而更引起太阳的摄动力的变化. 第一类摄动一般是很微弱的，而第二类摄动，即使太阳的黄经与地球的向径有很小的变化时，亦很显著. 行星的许多摄动力在地球的运动上虽不显著，但在月球的运动上便扩大地表现出来. 在将行星的摄动介入到月球的理论以前，须将地球运动上所受的摄动展开得相当的远，否则我们便会在月球的黄经上犯了略去不应略去之项的危险.

已知由于偏心率 e 的减少而来的平均运动的长期变长 $\Delta n'$ 便容易推算对应的距离的变短 $\Delta a'$，但乘积 $n'^2 a'^3$ 保持不变. 我们求得这变化在每世纪只有 2 米. 不需说，月球视差对应的变化是不能查觉的.

§ 119 与月球轨道偏心率有关的摄动 I

1. 近地点的长期运动

这一节与下一节，我们要用拉格朗日方程(§ 108 方程组 III)与摄动函数(其展开式推出于 § 132)来研究月球近地点的运动与其轨道的偏心率的变化. 仍如上假设轨道交角为零. 设在拉格朗日方程里更略去偏心率的平方项，则这些方程式便取得如下的形状，为我们将在这一节所使用：

$$\left.\begin{aligned}\frac{da'}{dt}&=\frac{2}{n'a'}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon'}\\ \frac{de'}{dt}&=-\frac{1}{n'a'^2e'}\frac{\partial R}{\partial \varpi'}\\ \frac{d\varpi'}{dt}&=\frac{1}{n'a'^2e'}\frac{\partial R}{\partial e'}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

引入在 e' 和 ϖ' 的导数里的摄动函数之项，只有那些含有这两个根数之一的项，即

$$R=n^2a'^2\Big[\frac{3}{8}e'^2-\frac{1}{2}e'\cos M'+\frac{3}{4}e'\cos(2\xi+M')-\frac{9}{4}e'\cos(2\xi-M')$$

$$-\frac{1}{8}e'^2\sin 2M'+\frac{3}{4}e'^2\cos 2(\xi+M')+\frac{15}{8}e'^2\cos 2(\xi-M')+\cdots\Big]e'^2$$

以上几次提到，长周期摄动是使受摄体(别的都是一样的情况下)离其平均位置最大的一种摄动．因此在下面的展开式里，除了非周期项之外，我们只保留周期最长的周期项．

含 M' 与 $2\xi-M'$ 的项的周期约为1月，含 $2M'$ 之项的周期 14 日；含 $2\xi+M'$ 与 $2(\xi+M')$ 之项的周期更短，剩下的便是含

$$2(\xi-M')=-2(\odot-\varpi')$$

之项，若月球的近地点固定，其周期为 6 个月，显然比其他项的周期都长得多．因此月球的平均运动 n' 不在这一项的引数里．

于是我们只取含以下项的摄动函数：

$$R=\frac{3}{8}n^2a'^2e'^2[1+5\cos 2(\xi-M')]=\frac{3}{8}n^2a'^2e'^2[1+5\cos 2(\odot-\varpi')]\tag{2}$$

且用拉格朗日方程推出这摄动函数对月球轨道的偏心率与近地点的黄经的导数．首先，由于方程(2)不含月球的黄经，故有

$$\frac{\partial R}{\delta \varepsilon'}=0$$

而且由于拉格朗日的第一方程，便得

$$\frac{da'}{dt}=0$$

可见半长轴不受与引数 $2(\xi-M')$ 有关的摄动．若略去含 e' 的高次项，则剩下的是

$$\left.\begin{aligned}\frac{de'}{dt}&=-\frac{15}{4}\frac{n^2}{n'}e'\sin 2(\odot-\varpi')\\ \frac{d\varpi'}{dt}&=\frac{1}{4}\frac{n^2}{n'}[3+15\cos 2(\odot-\varpi')]\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

容易证明在拉格朗日方程里略去含 e'^2 之项是合理的．

首先研究近地点的运动．设

$$\odot-\varpi'=\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=n-\frac{d\varpi'}{dt}=n-\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}-\frac{15}{4}\frac{n^2}{n'}\cos 2\varphi$$

$$=n\Big(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\Big)\Big(1-\frac{15n}{4n'-3n}\cos 2\varphi\Big)$$

为了积分这个变数分离的方程，设

上式便写为 $\tan\varphi = x \qquad \dfrac{15n}{4n'-3n} = p$

或 $$n\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)(t-t_0) = \int \frac{dx}{1-p+(1+p)x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{1+p}{1-p}}\tan\varphi\right]$$

但由等式 $$\tan\varphi = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}\tan\left[n\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sqrt{1-p^2}(t-t_0)\right]$$

得(§ 18) $$\tan\varphi = q\tan\psi \qquad \text{式内}\ q = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}$$

$$\varphi = \psi - \frac{1-q}{1+q}\sin 2\psi + \cdots$$

略去的第一项是含 $\sin 4\psi$ 的.

故若设 $$\psi = n\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sqrt{1-p^2}(t-t_0)$$

我们可以写给出近地点黄经的表达式如下:

$$\varpi' = \odot - \varphi = nt + \varepsilon - \psi + \frac{1-q}{1+q}\sin 2\varphi + \cdots$$

$$\varpi' = \varpi'_0 + nt\left[1-\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sqrt{1-\left(\frac{15n}{4n'-3n}\right)^2}\right] + \frac{1-q}{1+q}\sin 2\psi + \cdots$$

为了解说这个方程,我们应当认为,近地点有一种长期运动[1],其平均角速度为

$$\mu = n\left[1-\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sqrt{1-\left(\frac{15n}{4n'-3n}\right)^2}\right]$$

$$= n'\frac{n}{n'}\left[1-\sqrt{1-\frac{3}{2}\frac{n}{n'}-\frac{27}{2}\left(\frac{n}{n'}\right)^2}\right]$$

这个近似式给出近地点的平均运动为 $0.00739n'$ 或 $351''$,而观测值为 $401''$.

这展开式的开始几项为

$$\mu = n'\left[\frac{3}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^2 + \frac{225}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^3 + \cdots\right]$$

牛顿求得式内的第一项,将方程 3 的第二式简化,便得

$$\frac{d\varpi'}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}$$

这方程的右端里以时间的线性函数代 $\odot - \varpi'$ 角的第一近似值,亦得这个结果.

牛顿的结果只能代表真实的长期运动的一半,因为

$$\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'} = 0.00420n'$$

而观测值为 $0.00845n'$.

克勒罗与达朗贝尔的初期工作在这一点上并没有什么改进, 克勒罗为使理论与观测符合,甚至提出在牛顿引力之外,还须加上另外一个与距离立方成反比的引力(§ 106). 只

1) 我们可以将这结果和 § 106 里所得的结果比较,虽然摄动的性质是不同的.

须为这附加的力选一个适当的参数，便可使近地点的运动符合于观测的情况；而且距离增加时，这个附加力变小得很快，因而在行星的情况里，没有显著的效应，但于1749年克勒罗将其分析推进时，便放弃了这种人为的结构，只得出以上的数字解．稍后达朗贝尔对μ的第二项给出文字的表达式为$225n^3:32n'^2$．但多年以后，才有人建立近地点平均运动的确切理论．这个平均运动与偏心率和交角无关的主要部分，德洛勒给出如下的级数：

$$n'\left[\frac{3}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\frac{225}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^3+\frac{4071}{128}\left(\frac{n}{n'}\right)^4+\frac{265493}{2048}\left(\frac{n}{n'}\right)^5+\cdots\right]$$

这级数收敛很慢，可从下表看出

2	$0.00419643\ n'$
3	294280
4	99570
5	30368
6	9139
7	2830
8	984
9	347
	…
和＝	$0.00857151\ n'$

这展开式前几项之和只准确到三位有效数字．希耳(Hill)才确定地解决了这个很困难的问题，他得出的结果是

$$0.0085725730049n'$$

他在这上面更加入与偏心率和交角有关不太重要之项，最后，

$$\mu=0.008452115n'=400''.9167$$

其运转周期为8年310日．

附注：1888年刊布的牛顿的遗稿里，表明他曾推出方程组(3)的第二式，只是周期项的数字系数上有一个误差(将15误为16.5)，因而他对μ算出一个相当好的近似值．他没有刊布他的结果，可能由于他对它有点怀疑．

§120 与月球轨道偏心率有关的摄动 2

2．出差

前节所得的近地点的黄经里有一周期差项：

$$\varpi'=\varpi'_0+\mu t+\frac{1-q}{1+q}\sin 2\psi$$

因ψ是φ角的长期部分，可见若以ϖ'_m表示近地点的平黄经，并设不考虑地球轨道的偏心率，则可令

$$\varpi'=\varpi'_0+\mu t+\frac{1-q}{1+q}\sin 2(\odot-\varpi'_m)$$

便有

$$q=\sqrt{\frac{1-p}{1+p}},\quad p=\frac{15n}{4n'-3n}=\frac{15}{4}\ \frac{n}{n'}+\frac{45}{16}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\cdots$$

于是求得这差项的系数为

$$\alpha=\frac{1-q}{1+q}=\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p}=0.152=8.^\circ7$$

(实际, α 角可达 $11.^\circ6$).

这里所发展的初级理论,只能提供其展开式的第一项:

$$\alpha=\frac{15}{8}\frac{n}{n'}+\cdots$$

至于这差数的周期为

$$\frac{\pi}{n-\mu}=\frac{648000''}{3548.''19-400.''92}=205.89 \text{ 日}$$

为了表明对应于偏心率的差数项,再回来讨论前节的方程组(3):

$$\frac{de'}{dt}=-\frac{15}{4}\frac{n^2}{n'}e'\sin 2\varphi$$

式内

$$\frac{d\varphi}{dt}=n\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}-\frac{15}{4}\frac{n}{n'}\cos 2\varphi\right)$$

两式相除,便得变数分离的下列方程:

$$\frac{de'}{e'}=\frac{-\frac{15}{4}\frac{n}{n'}\sin 2\varphi d\varphi}{1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}-\frac{15}{4}\frac{n}{n'}\cos 2\varphi}$$

积分后得

$$e'=\frac{K}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}-\frac{15}{4}\frac{n}{n'}\cos 2\varphi}}$$

K 是常数.

这式还可写为

$$e'^2=\frac{K^2n}{\frac{d\varphi}{dt}}$$

由于

$$\frac{d\varphi}{dt}=(1-2\alpha\cos 2\psi)\frac{d\psi}{dt}$$

且因 $\frac{d\psi}{dt}$ 是常数,终于求得

$$e'=e_0'(1+\alpha\cos 2\psi+\cdots)=e_0'[1+\alpha\cos 2(\odot-\varpi_m')+\cdots]$$

因平均偏心率 $e_0'=0.0549$, 真偏心率在下列两极值间变化:

$$e_0'(1-\alpha)=0.0448 \qquad e_0'(1+\alpha)=0.0650$$

总之,轨道为下列两关系式所规定:

$$\varpi'=\varpi_0'+\mu t+\alpha\sin 2(\odot-\varpi_m')$$

$$e'=e_0'[1+\alpha\cos 2(\odot-\varpi_m')]$$

半长轴 a' 没有受摄动; 在这两式里, ϖ_m' 是近地点的平黄经, 等于 $\varpi_0'+\mu t$.

欧勒给与这些结果一个近似的几何意义. 月球轨道的平均中心 C_m 在 8 年 310 日内循顺向绕地球走了一个正圆(图 131), 其半径为

$$a_0'e_0' = 60.27 \times 0.0549 = 3.31 \text{ 地球赤道半径}$$

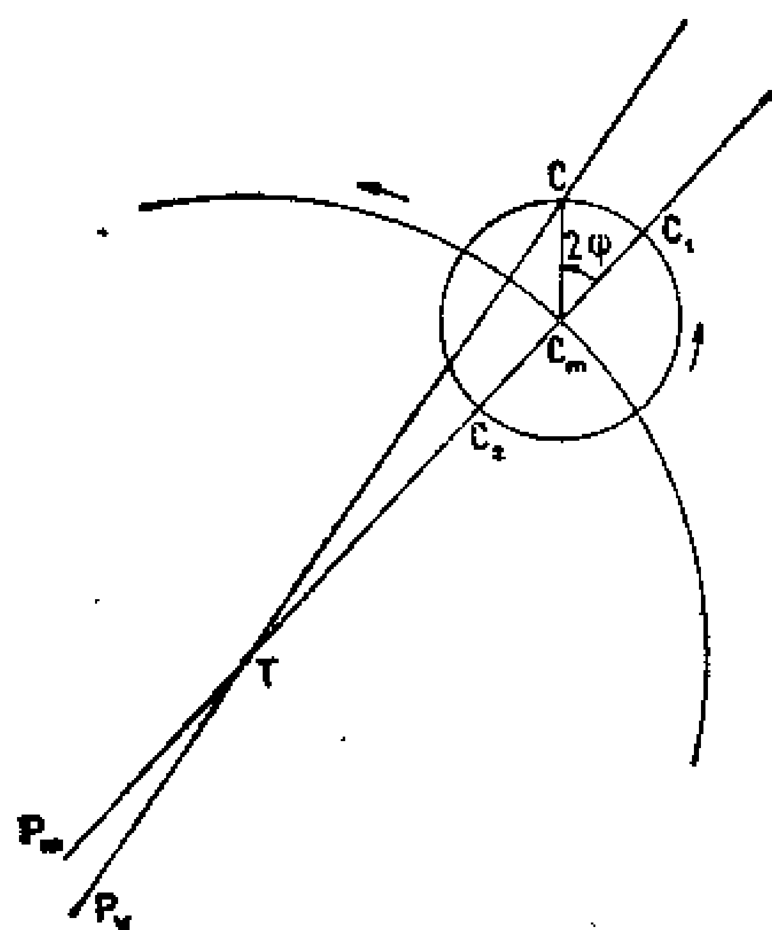


图 131

真中心 C 围绕平均中心在 206 日内循相同的方向走了一个正圆，其半径等于

$$3.31\alpha = 0.7 \text{ 地球赤道半径}$$

C_mC 与月球的向径之间的角等于 $2\psi = 2(\odot - \varpi_m')$. 当太阳经过拱线之时，真中心在 C_1，那时偏心率极大，近地点运动的角速度极大(§ 119 里的方程组 3)，即

$$\frac{9n^2}{2n'} = +1185'' \text{ 每日}$$

当太阳与拱线成 $90°$ 之角时，真中心在 C_2，偏心率极小，近地点的运动是逆行的，其角速度为

$$-3\frac{n^2}{n'} = -790'' \text{ 每日}$$

当 $\cos 2\varphi = -0.2$，即当 $\varphi = 101°$ 或 $259°$ 时，近地点留.

现在计算这个变形的轨道中心的方程式. 设 $\mathfrak{M}'$ 表示月球受扰的平近点角，则

$$☾ = n't + \varepsilon' + 2e' \sin \mathfrak{M}' \tag{1}$$

因近地点是移动的，故这里应设

$$\mathfrak{M}' = n't + \varepsilon' - \varpi' = n't + \varepsilon' - \varpi_0' - \mu t - \alpha \sin 2(\odot - \varpi_m')$$

现在表明这近点角的长期部分:

$$M' = (n' - \mu)t + \varepsilon' - \varpi_0'$$

于是

$$\mathfrak{M}' = M' - \alpha \sin 2\psi$$

$$\sin \mathfrak{M}' = \sin M' - \alpha \sin 2\psi \cos M'$$

将 e' 与 $\sin \mathfrak{M}'$ 的展开值代入(1)式:

$$☾ = n't + \varepsilon' + 2e_0'(1 + \alpha \cos 2\psi)(\sin M' - \alpha \sin 2\psi \cos M')$$

略去第二阶项:

$$☾ = n't + \varepsilon' + 2e_0' \sin M' + 2e_0'\alpha \sin(M' - 2\psi) + \cdots$$

$2e_0' \sin M'$ 一项代表大小不变的椭圆轨道里的中心差，拱线循顺向以匀角速度 μ 转动. 至于它后面的一项是一个加在中心差上的另一差数，与引数为

$$M' - 2\psi = M' - 2(\odot - \varpi_m') = ☾ - 2\odot + \varpi_m' = 2\xi - M'$$

的正弦有关. 这一项叫做**出差**为托勒密所发现. 式内时间 t 含在

$$n' - 2n + \mu = 40739''.42$$

为因子之项内，与此对应的周期是 31.81194 日，其系数为

$$2e_0'\alpha = e_0'\left(\frac{15}{4}\frac{n}{n'} + \cdots\right)$$

用理论所提供的 α 的数值，求得这系数为 $57'.4$. 德洛勒还为出差的系数的主要部分寻出一个收敛很慢的级数:

$$e_0'\left[\frac{15}{4}\frac{n}{n'}+\frac{263}{16}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\frac{48217}{768}\left(\frac{n}{n'}\right)^3+\frac{1880537}{9216}\left(\frac{n}{n'}\right)^4\right.$$

3176″ 1041″ 298″ 72″

$$\left.+\frac{130463405}{221184}\left(\frac{n}{n'}\right)^5+\cdots\right]$$

16″

3176″ 1041″ 298″ 72″

这系数本身之值是 1°16′26″.

由于偏心率 e_0' 相当大，故中心差的系数之值亦相当大：

$$6°17'20''\sin M'+12'49''\sin 2M'+36''\sin 3M'+\cdots$$

与出差相伴而生的，在向径上还有一个差数项，应加在第十章的椭圆运动之项上：

$$r'=a'\left(1+\frac{1}{2}e_0'^2-e_0'\cos M'-\frac{1}{2}e_0'^2\cos 2M'\cdots\right).$$

令 $\delta r'$ 表示与引数 $2\xi-M'$ 有关的差数项；面积定律：

$$r'^2\frac{d☾}{dt}=\text{常数}$$

由对数微分提供

$$\delta r'=-\frac{r'}{2}\frac{\delta\left(\frac{d☾}{dt}\right)}{\frac{d☾}{dt}}$$

这里可取

$$\frac{d☾}{dt}=n';\ \delta\left(\frac{d☾}{dt}\right)=2e_0'\alpha(n'-2n+\mu)\cos(2\xi-M')$$

由是

$$r'=a'\left[1+\cdots-e_0'\left(\frac{15}{8}\frac{n}{n'}+\cdots\right)\cos(2\xi-M')\right]$$

视差 $a':r'$ 的正弦的展开式容易由 $r':a'$ 的展开式推出．关于含 M', $2M'\cdots$ 等项，可以参看第十章．

为了结束黄经的差数项，再谈一下黄道订正，这不是一种摄动，而是与第三章内所说的赤道订正类似的归算．第谷在其月球的理论里，业已介入这个名词．月球的黄经与其在轨道上的经度之差为

$$l-☾=-\tan^2\frac{i'}{2}\sin 2\eta=-6'.9\sin 2\eta$$

l 表示黄经，i' 表示黄白交角，η 表示黄纬 $☾-\Omega'$ 的引数．据 §32 的方法容易推得这个结果．

现在将 §115 至 §120 内所得的结果汇集于下：

$$l=n't+\varepsilon'+\frac{3}{2}\frac{n^2}{n'}e_0ht^2+2e_0'\sin M'+\frac{5}{4}e_0'^2\sin 2M'$$

$$+\left[\frac{11}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\frac{59}{12}\left(\frac{n}{n'}\right)^3\right]\sin 2\xi-\left[\frac{15}{8}\frac{n}{n'}+\frac{93}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right]\frac{a'}{a}\frac{m-m'}{m+m'}\sin\xi$$

$$-3\frac{n}{n'}e\sin M+\frac{15}{4}\frac{n}{n'}e_0'\sin(2\xi-M')-\tan^2\frac{i'}{2}\sin 2\eta$$

$$\frac{a'}{r'}=1+e_0'\cos M'+e_0'^2\cos 2M'+\left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\frac{19}{6}\left(\frac{n}{n'}\right)^3\right]\cos 2\xi$$
$$-\left[\frac{15}{16}\left(\frac{n}{n'}\right)+\frac{81}{16}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right]\frac{a'}{a}\,\frac{m-m'}{m+m'}\cos\xi$$
$$-\frac{3}{2}\left(\frac{n}{n'}\right)^2 e_0\cos M+\frac{15}{8}\,\frac{n}{n'}\,e_0'\cos(2\xi-M')$$

至于黄纬的表达式将推导在下节之内.

§ 122 之末载有月球的黄经、黄纬与视差的主要差数,是根据布朗月离表而来的.

§ 121 摄动力的法向分量,月球黄纬上的差数项

直到这节,我们总设摄动力在轨道面内;实际摄动力是在含日、地、月三球的中心的平面内. 因而它在与轨道面正交的方向上有一分量,我们叫它做*法向分量*.

§ 111 内,我们将摄动力分为两个向量: 一在月球的向径上,另一平行于地-日两心的联线; 最后这一向量含有一个非零的法向分量. 以上讲过, 这分量的表达式为(正方向指着太阳)

$$kr\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{r^3}\right)=n^2\frac{a^3}{r^3}\,r'[3\cos A+\cdots]$$

不计偏心率时,这式展开后的第一项为

$$3n^2a'\cos\xi$$

这个量在轨道面的法线上的投影便是要寻找的法向分量.

在天球上绘出黄道 E(图 132), 白道(月球的地心位置表为 L)太阳 ⊙, 升交点 N 与白道的北极 Π. 令

$$NL=\eta$$

设 i' 表示黄白交角,Ω' 表示升交点黄经; 精准到二阶项时,我们还有

$$N\odot=\eta-\xi,\quad \eta=☾-\Omega'\qquad \xi=☾-\odot$$

分量 T 的表达式为

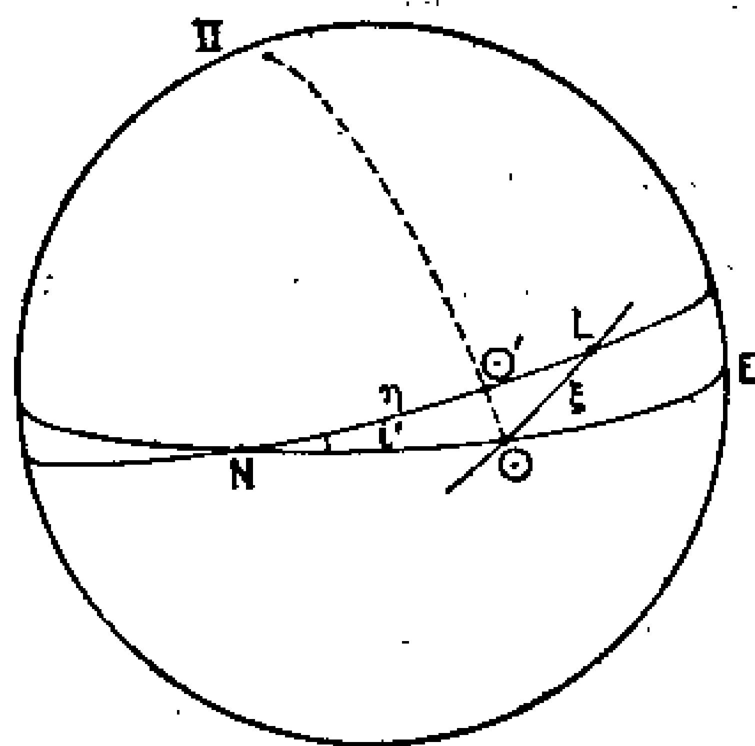


图 132

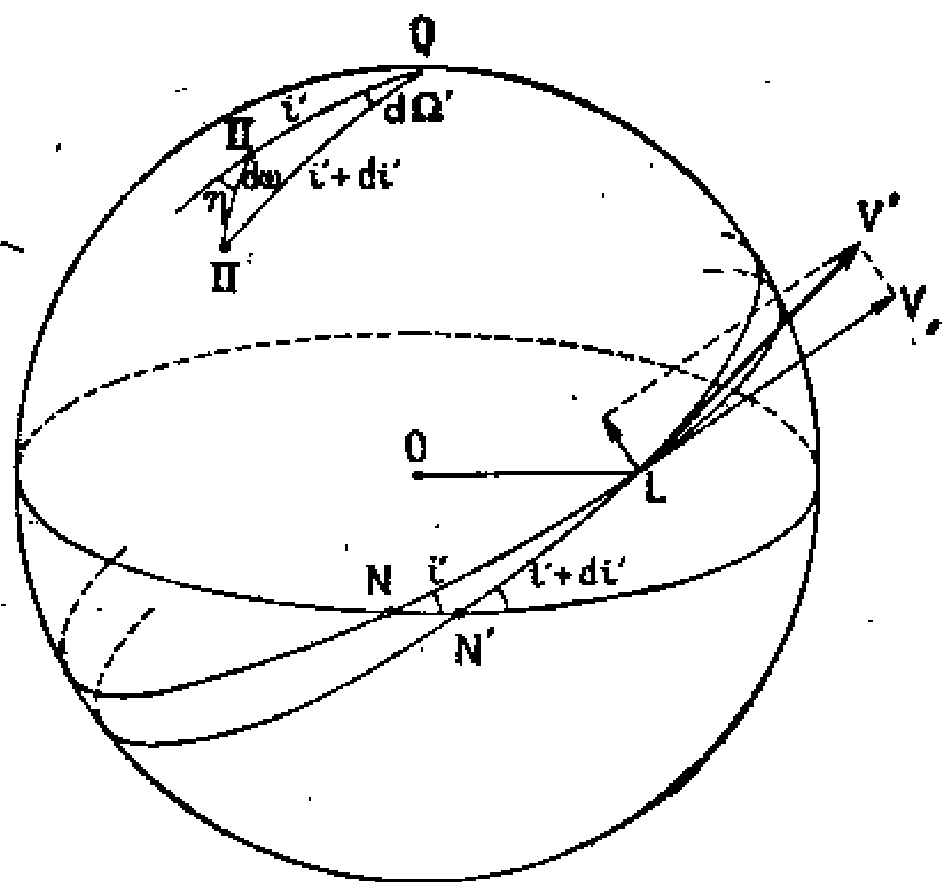


图 133

$$T=-3n^2a'\cos\xi\sin\odot\odot'$$

这分量指向北极时为正。

可是 $$\sin\odot\odot'=\sin i'\sin N\odot=\sin i'\sin(\eta-\xi)$$

因此 $$T=\frac{3}{2}n^2a'\sin i'[\sin(2\xi-\eta)-\sin\eta]$$

现在表明法向瞬时摄动的效应。令 V(图 133) 表示月球在假设为正圆的轨道上的速度；将这速度与向量 Tdt 相加，被摄动的速度仍与向径正交，与速度所成之角为 $d\omega$。因此，摄动使轨道面围绕向径 OL 旋转；升交点由 N 移到 N'，交角改变了 di' 角。设 $d\Omega'$ 为交点的位移，则就代数值言($d\omega$ 的方向与方位角的方向相同)：

$$d\omega=\frac{-T}{V}dt=\frac{-T}{n'a'}dt$$

设以 Π 与 Π' 表示两个轨道的极点，容易推导 $Q\Pi\Pi'$ 三角形边角间的关系式(考虑到轨道面绕 OL 旋转的方向)：

$$d\Omega'=-d\omega\frac{\sin\eta}{\sin i'}$$

$$di'=-d\omega\cos\eta$$

从而

$$\frac{d\Omega'}{dt}=\frac{3}{2}\frac{n^2}{n'}[\sin(2\xi-\eta)-\sin\eta]\sin\eta=-\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}[1-\cos2\eta-\cos2(\xi-\eta)+\cos2\xi]$$

$$\frac{di'}{dt}=\frac{3}{2}\frac{n^2}{n'}\sin i'[\sin(2\xi-\eta)-\sin\eta]\cos\eta$$

$$=\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}\sin i'[\sin2(\xi-\eta)+\sin2\xi-\sin2\eta]$$

由于这些引数的几何意义，

$$\xi-\eta=-(\odot-\Omega')\qquad\xi=☾-\odot\qquad\eta=☾-\Omega'$$

这两个微分方程式便可写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Omega'}{dt}&=-\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}[1-\cos2(\odot-\Omega')+\cos2(☾-\odot)-\cos2(☾-\Omega')]\\\frac{di'}{dt}&=-\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}\sin i'[\sin2(\odot-\Omega')-\sin2(☾-\odot)+\sin2(☾-\Omega')]\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

含 $2(\odot-\Omega')$ 之项的周期最长，约为 6 个月，含 $2(☾-\odot)$ 一项的周期等于半个朔望月，含 $2(☾-\Omega')$ 一项的周期等于半个交点月。这里，正如对近地点与偏心率的研究那样，暂时不论短周期项，于是

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Omega'}{dt}&=-\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}[1-\cos2(\odot-\Omega')]=-\frac{3}{2}\frac{n^2}{n'}\sin^2(\odot-\Omega')\\\frac{di'}{dt}&=-\frac{3}{4}\frac{n^2}{n'}\sin i'\sin2(\odot-\Omega')\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

上列方程组内的第一式与有关近地点的方程(§ 119)同一类型，因而可以同样的方式积分，令

$$\odot-\Omega'=\varphi$$

便得 $$\frac{d\varphi}{dt}=n\left(1+\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\left(1-\frac{3n\cos2\varphi}{4n'+3n}\right)$$

积分后得

$$\tan\varphi=q\tan\left[n\left(1+\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sqrt{1-p^2}(t-t_0)\right] \tag{3}$$

设

$$p=\frac{3n}{4n'+3n}\qquad q=\sqrt{\frac{1-p}{1+p}}$$

我们知道方程 3 有如下形式的解:

$$\varphi=\psi-\frac{1-q}{1+q}\sin 2\psi+\cdots$$

更设

$$\psi=n\left(1+\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sqrt{1-\left(\frac{3n}{4n'+3n}\right)^2}(t-t_0)$$

便推出交点的黄经为

$$\Omega'=\Omega'_0+n\left[1-\left(1+\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sqrt{1-\left(\frac{3n}{4n'+3n}\right)^2}\right]t+\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p}\sin 2\psi$$

因此交点对于恒星的平均运动的表达式为

$$\nu=-n\left[\sqrt{1+\frac{3}{2}\frac{n}{n'}}-1\right]=-n'\left[\frac{3}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^2-\frac{9}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^3+\cdots\right]$$

或 $-193''.8$(观测值为 $-190''.77$).

牛顿曾用一个漂亮的方法推出这个结果,值得在此一提. 同时有

$$\begin{cases}\dfrac{d\Omega'}{dt}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{n^2}{n'}\sin^2\varphi\\[2mm]\dfrac{d\Omega'}{dt}+\dfrac{d\varphi}{dt}=n\end{cases}$$

因此

$$d\Omega'=-\frac{3}{2}\frac{n}{n'}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{1+\frac{3n}{2n'}\sin^2\varphi}$$

在继续两次太阳与升交点合之时间内, φ 角增加了 2π. 现在计算这期间升交点的位移度 $\Delta\Omega'$:

$$\begin{aligned}\Delta\Omega'&=-\frac{3}{2}\frac{n}{n'}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{1+\frac{3n}{2n'}\sin^2\varphi}\\&=-\frac{3}{2}\frac{n}{n'}\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\sin^2\varphi-\frac{3}{2}\frac{n}{n'}\sin^4\varphi+\frac{9}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\sin^6\varphi+\cdots\right]\\&=-\frac{3}{2}\frac{n}{n'}\pi\left[1-\frac{9}{8}\frac{n}{n'}+\frac{45}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^2-\cdots\right]=-0.10356\pi\end{aligned}$$

还可推得

$$\Delta\Omega'=-2\pi\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3n}{4n'}}}\right]$$

在这同一时间内,太阳移动了 $2\pi+\Delta\Omega'$ 角,因此有

$$\nu=n\frac{\Delta\Omega'}{2\pi+\Delta\Omega'}=-0.05461n$$

这样再度求得上面的结果 $-193''.8$.

德洛勒对于与偏心率和交角无关的 ν 的主要部分,求得如下的展开式:

$$-n'\left[\frac{3}{4}\left(\frac{n}{n'}\right)^2-\frac{9}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^3-\frac{273}{128}\left(\frac{n}{n'}\right)^4-\frac{9797}{2048}\left(\frac{n}{n'}\right)^5-\frac{199273}{24576}\left(\frac{n}{n'}\right)^6-\cdots\right]$$

计算 ν 的这个展开式比计算 μ 的展开式好些；实际的计算如下：

2	$-0.00419643\ n'$	
3	$+$	11771
4	$+$	6677
5	$+$	1120
6	$+$	142
7	$+$	15
和：	$-0.00399918n'=-189''.70$	

J. C. 亚当斯用更精确的方法求得

$$-0.00399917228n'$$

更考虑了与偏心率和交点有关之项，最后得升交点对于恒星的平均运动为

$$\nu=-190''.7717$$

其旋转周期为 6793.5 日 $=$18.600 年

设以 Ω_m 表示升交点的平黄经，它等于 $\odot-\psi$，我们可将受了主要差数的黄经写为如下的形状：

$$\Omega'=\Omega'_m+\beta\sin 2\psi$$

式内

$$\beta=\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p}$$

差数的周期是

$$\frac{\pi}{n-\nu}=\frac{648000''}{3548''.19+190''.77}=173.31\text{ 日}$$

其半变幅为

$$\beta=\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p}=\frac{p}{2}+\frac{p^3}{8}+\cdots=\frac{3n}{8n'}-\frac{9}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\cdots$$

$$\beta=1^\circ 31'$$

现在讨论交角的差数；将方程组(2)的第二式与下列由 φ 的定义而来的关系式

$$\frac{d\varphi}{dt}=n\left(1+\frac{3n}{4n'}-\frac{3n}{4n'}\cos 2\varphi\right)$$

联合，并消去 dt，便得变数分离的微分方程：

$$\frac{di'}{\sin i'}=\frac{-\frac{3n}{4n'}\sin 2\varphi d\varphi}{1+\frac{3n}{4n'}-\frac{3n}{4n'}\cos 2\varphi}$$

设

$$\tau=\tan\frac{i'}{2}$$

则这方程写为

$$\frac{d\tau}{\tau}=\frac{-\frac{3n}{4n'}\sin 2\varphi d\varphi}{1+\frac{3n}{4n'}-\frac{3n}{4n'}\cos 2\varphi}$$

于是得到与表示偏心率的方程同类型的微分方程式，已在 § 120 内讨论过了，我们可以立刻写出其积分：

$$\tan\frac{i'}{2}=(1+\beta\cos 2\psi)\tan\frac{i'_0}{2}$$

i'_0 是常数. 这方程与 $\tan y=p\tan x$(§ 18)的形状相合,其解为

$$i'=i'_0+\sin i'_0\left[\frac{3n}{8n'}-\frac{9}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\cdots\right]\cos 2\psi\mp\cdots$$

因此交角所受的差数与交点所受的差数,有相同的周期:173日,其半变幅是 $\beta\sin i'_0$ 或8′.2.

为了计算短周期项的差数,应该回去讨论方程组(1),直到现在我们略去式内的末后几项. 由于这里要研究的是二阶的差数,我们先以 Ω'_m 代 Ω',然后再在各项单独存在的假设下去加以积分. 最后求得交点的黄经与交角的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\Omega'&=\Omega'_0+\nu t+\left(\frac{3n}{8n'}-\frac{9}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right)\sin 2(\odot-\Omega'_m)\\&\quad-\frac{3}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\sin 2(☾-\odot)+\frac{3}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\sin 2(☾-\Omega'_m)\\i'&=i'_0+\sin i'_0\left[\left(\frac{3n}{8n'}-\frac{9}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\right)\cos 2(\odot-\Omega'_m)\right.\\&\quad\left.-\frac{3}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\cos 2(☾-\odot)+\frac{3}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\cos 2(☾-\Omega'_m)\right]\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

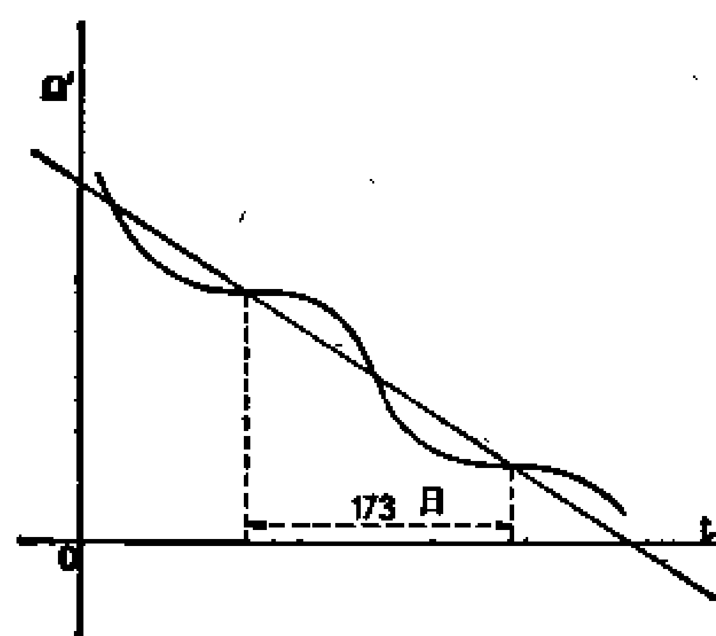


图 134

这三个差数的周期分别为:

1. 太阳返回交线的周期: 173.31 日;
2. 月球的半个朔望月: 14.77 日;
3. 月球的半个交点月: 13.61 日.

在 i' 的表达式里最后两项的系数约为 0′.6.

表示交点黄经的变化的下行曲线(图 134),当太阳与一交点合时,表现一个具有水平方向的切线;这是可由方程(1)核校的;并可预料当太阳过轨道面时,两个交点的运动为留. 而且那时交点与平交点相重合. 至于交角达到它的极大值:

$$i'_0\left(1+\frac{3}{8}\frac{n}{n'}-\cdots\right)$$

或 5°17′.5,短周期项大约相互抵消. 日月食时出现这些情况,对食的现象作普遍的理论时,须考虑上述这些特殊情况,而不应该象某些初级书中所说的,让交角在两极间变化.

为了表明白道的真极点的运动,我们可以给与方程组(2)以一个几何的意义. 与交点的逆行相对应的,有白道的平极点围绕黄极 Q 的运动; 距离 Π_mQ 总是等于 i'_0 或 5°9′(图 135). 不计短周期的差数,真极在 173 日内围绕平极走了一个正圆周,距离 $\Pi\Pi_m$ 总是等于 $\beta\sin i'_0$ 或 8′. 图 135(右)是在天球内部看去的情况. 考虑了短周差之后,真轨迹是一种离开圆周少许悬挂于两点间成圆弯形的花彩状曲线.

结束本节前,再研究影响月球黄纬 U 的差数. 用下式计算这个坐标:

$$\sin U=\sin i'\sin(☾-\Omega')$$

因此黄纬的展开式含有两类的差数:一类由月球黄经上的差数而来,另一类由交点与交角的差数而来. 令 $\sum p$ 表示月球黄经的周期差之和. 先暂时略去交角与交点的差数,并令

$$☾-\Omega'_m=\eta+\sum p$$

η 随时间作均匀的增长．我们可以写

$$\sin(☾-\Omega'_m)=\sin\eta+\sum p\cos\eta+\cdots$$

但因 $\sum p$ 具有 $\sum k\sin\lambda$ 的形状(λ 表示时间的线性函数，k 表示常数)，最后

$$\sin U=\sin i'_0\sin\eta+\sum\frac{k}{2}\sin i'_0[\sin(\lambda+\eta)+\sin(\lambda-\eta)] \tag{3}$$

这是在轨道面固定的假设下展开式的一般形状，但其摄动可以提供与引数 $\lambda+\eta$ 和 $\lambda-\eta$ 有关的其他差数，在简化相似之项后，这两个引数的正弦，一般具有不同的系数．

与交点和交角之差有关的黄纬的差数很小，除了要去计算的以"黄纬大差"得名的一项之外．

设白道只受交点的逆行一种摄动(不计一切周期差)，则

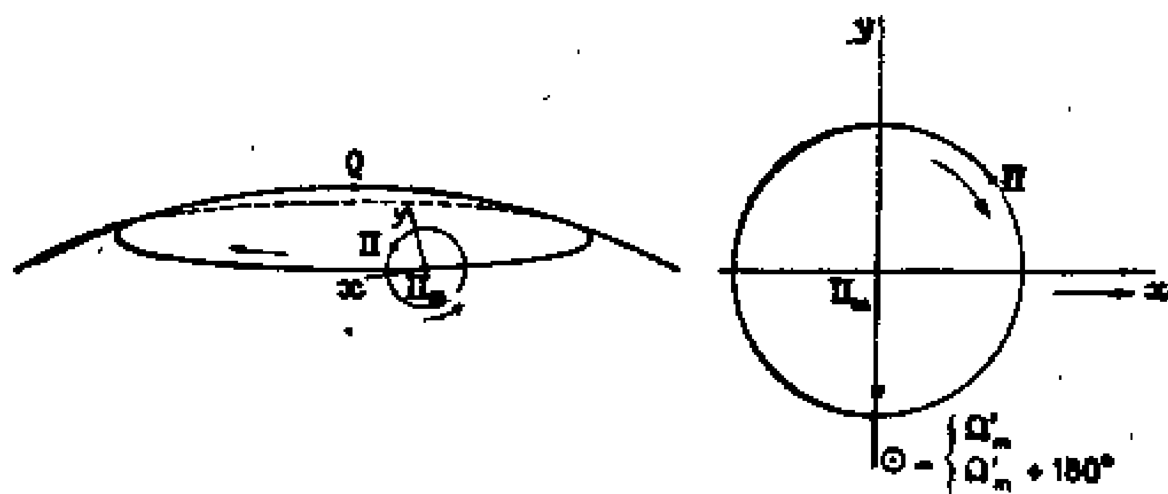


图 135

黄纬取得一定的数值，我们将其表为 U_0，为下列方程所给出：

$$\sin U_0=\sin i'_0\sin(☾-\Omega'_m)$$

在 $U-U_0$ 式里只保留含 i'_0 的一阶项，则

$$U-U_0=(i'-i'_0)\sin(☾-\Omega'_m)-(\Omega'-\Omega'_m)\sin i'_0\cos(☾-\Omega'_m)$$

将上式的差数代以其表达式，即

$$\Omega'-\Omega'_m=\frac{3}{8}\frac{n}{n'}\left[\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sin2(\odot-\Omega'_m)-\frac{n}{n'}\sin2(☾-\odot)+\frac{n}{n'}\sin2(☾-\Omega'_m)\right]$$

$$i'-i'_0=\frac{3}{8}\frac{n}{n'}\sin i'_0\left[\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\cos2(\odot-\Omega'_m)\right.$$
$$\left.-\frac{n}{n'}\cos2(☾-\odot)+\frac{n}{n'}\cos2(☾-\Omega'_m)\right]$$

便得 $U-U_0$ 如下的形式：

$$U-U_0=\frac{3}{8}\frac{n}{n'}\sin i'_0\left[\left(1-\frac{3}{4}\frac{n}{n'}\right)\sin(☾-\Omega'_m-2\odot+2\Omega'_m)\right.$$
$$\left.+\frac{n}{n'}\sin(2☾-2\odot-☾+\Omega'_m)-\frac{n}{n'}\sin(☾-\Omega'_m)\right]$$

$U-U_0$ 的第三项只含升交距角；因此将它加在 $\sin U$ 的主要项上，只须在交角上加一常数，便将其考虑进去了．经过这种改正的 i'_0，是由观测所决定，而不是由理论计算得的数值．至于 $U-U_0$ 的其他两项，因其有相同的引数，可以混为一项，其长期部分是 $2\xi-\eta$．因此 U 的展开式如下：

$$U=U_0+\frac{3}{8}\frac{n}{n'}\left(1+\frac{1}{4}\frac{n}{n'}\right)\sin i'_0\sin(2\xi-\eta)$$

这样求得黄纬差，其半变幅达 8′49″．但这一差数上还须加入按照以上所说的机制而来的类似之项，其显著的一项是从二均差而来的．于是设

$$☾-\Omega'_m=\eta+\frac{11}{8}\left(\frac{n}{n'}\right)^2\sin2\xi$$

可见在黄纬的表达式里，后面应引入一个附加项(见方程 3)：

$$\frac{11}{16}\left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin i_0' \sin(2\xi-\eta)$$

与含 $2\xi+\eta$ 的类似项，于是可将"黄纬大差"表为如下的形式：

$$+\sin i_0'\left[\frac{3}{8}\frac{n}{n'}+\frac{25}{32}\left(\frac{n}{n'}\right)^2+\cdots\right]\sin(2\xi-\eta)$$

时间含在引数里，其系数为

$$n'-2n+\nu=40147''.733$$

其对应的周期为 32.28078 日，与出差的周期相近，但不应将两者混淆.

考虑到与整个二均差(39′30″)的附加项达 1′46″，"黄纬大差"的半变幅总共是 10′35″(确切值是 10′24″).

§122 月 离 表

十八世纪西欧各国，因远洋航行，须利用月球对于恒星的距离，以测定船舰在海洋上的经度，因而须编制月离表，于是设置巨额奖金以推动这一工作. 许多数理天文学家受了鼓舞，逐渐改进月球运动的理论. 同时这些国家更推动钟表制造者改进航海钟，以便保存基本经圈上的时刻，携带到远方去. 今天第二个问题已经得着满意的解决，而第一个问题仍然需要研究；天文学家还要据月球的运动去实际测定均匀时(§68). 不过这问题的意义，不是昔日那样了.

虽然作了很大的努力，直到十九世纪，月离表仍然很不完善. 十八世纪的月离表误差为 1′ 至 2′. 牛顿以前，高明的观测者已经根据经验发现了中心差、出差、周年差与二均差，但是他们却不能发现虽比较小而却不可忽略的其他差数，由于它们和主要差数纠缠在一起的缘故. 这些差数只能由理论的分析而表现出来. 可是这些差数的系数，在长期里作逐渐近似计算，才很费力地求了出来. 牛顿只觅得一些大的差数，他算至第二近似值而止，当然不能满足实际的需要. 克勒罗在其«月球理论»(刊于 1752，补充于 1765 年)，达朗贝尔在研究报告里(1754 至 1773 年)，欧勒在其«月球运行理论»书中(1753 与 1772 两版)都计算了更精密的数值，而且他们都是月球的分析理论的创始人. 但是默耶尔(T. Mayer 1723—1762)的月离表里的系数仍是根据观测而得的经验值. 默耶尔、布尔格(Burg)与马桑(Mason)在决定差数的表达式时使用理论，而其数值的大小，则须乞求于观测的结果[1].

拉普拉斯的研究开辟了第三时期(«天体力学»第二篇，1802 页). 他大大改进了月球运动的理论，完备的程度远远超过其以前的作者. 根据拉普拉斯的理论而编制的达木瓦佐(Damoiseau)的月离表(1824)便不须乞求于观测(当然理论上所需的任意常数除外). 自此以后，对于达木瓦佐的系数的改正值，在黄经上很少超过十分之几秒. 因而这个月离表远远超过以前默耶尔等人的表，因而达木瓦佐的表用到 1857 年始为汉森(P. A. Hansen 1795—1874)的表所代替.

---

1) 布尔格使用马斯克列恩(Maskelyne)的观测，马桑使用布拉德累的观测. 拉普拉斯在其«天体力学»里，用他们的经验系数和他由分析理论所算出的加以比较.

汉森大大地推进了分析式的近似值，因此那时天文学界认为，这问题已经得着确定的解决了. 1750 至 1850 年间天文学家所作优良观测，都与汉森计算的位置，相合到观测的误差范围之内. 但是以后的观测和表载位置逐渐离开，到了 1875 年黄经差达 8″ (纽康)，汉森的表又不可靠了. 德洛勒根据他的理论(1867)计算了各种差的文字表达式，将其展开到 7 阶甚至 9 阶之项，可是由此算出的数值仍然与汉森的表相近，因而使人认识月离表本身上的高度精确性. 于是纽康才开始怀疑地球自转的不均匀性. 为了从观测事实去检验这个假想的解释，纽康搜集自古以来对于月球、太阳与行星的一切观测，去和理论的位置加以广泛的比较，他的这个假设今天已经得着完全的证实(见第七章 § 62).

自 1915 至 1925 年，法国天文年历采用根据德洛勒理论经腊道 (Radau) 编制的月离表. 现今各国编算天文年历所采用的是布朗的月离表*(1919)，它建立在一个新的理论之上，其主要的优点不是提供差项的系数的文字表达式，而是提供这些系数的数字值，以达到需要的精确度。德洛勒的系数的展开式以上几节里已经举出几个很简单的例子，它们常表为收敛很缓慢的级数，因而没有计算的剩余项不尽是可以忽略的，布朗为了避免这个困难，乃从任意常数(平均运动、长期加速度、太阳视差、月球质量…)的精密测定，去改造他的理论.

布朗的月离表提供月球的黄经、黄纬与赤道视差三个坐标的数值，前两者表为正弦之和，后者表为余弦之和，这些周期函数是与时间成正比的角. 由太阳而来的差数的引数，一般的形式为

$$iM'+jM+k\xi+l\eta$$

式内 M 与 M' 分别表示太阳与月球的平近点角而约化为其长期部分，ξ 表示月球与太阳的平黄经之差，η 表示月球的升交距角，即平月球的黄经与平交点的黄经之差; 最后 i, j, k, l 是正、负整数或零.

布朗对于月球的黄经、黄纬与视差，研究了 1500 个由太阳或行星而来的差数. 保留在他的月离表里的太阳项的系数，按其数值的次序，对于黄经与视差，分类如下:

黄经		视差	
$>1000''$	3	$>100''$	1
从 100″ 到 1000″	10	从 10″ 到 100″	3
从 10″ 到 100″	14	从 1″ 到 10″	4
从 1″ 到 10″	32	从 0″.1 到 1″	19
从 0″.1 到 1″	58	从 0″.01 到 0″.1	29
从 0″.01 到 0″.1	104	从 0″.001 到 0″.01	51
$<0''.01$	89	$<0''.001$	50
总共	310	总共	157

* 自 1960 年起，编算天文年历时已不再使用布朗的月离表，原因是这个表的精确度既不够用，而且其中含有无理论根据的"经验项"，同时自 1960 年采用历书时编算月离表所用的公式需要稍加修改. 现在紫金山天文台用电子计算机所算出的月球位置便是根据布朗原来计算月离表的理论公式，而加以如下的三种改正: 1. 平黄经上的改正; 2. 去掉经验项; 3. 加入布朗理论公式没考虑的光行差的影响. 参考: Improved Lunar Ephemeris 1952—1959, a joint supplement to the American Ephemeris and the (British) Nautical Almanac, Washington, 1954——译者注

行星项很多但一般都很小．其中多数不是反映行星对月球本身的作用，而是行星施于围绕太阳运行的地球的摄动的间接效应．

为了举例说明起见，我们在此列出由太阳而来的几个差数．对于黄经与视差，这里转载布朗表内的确定系数[1]．对于黄纬，这里转载他一篇论文里的数字[2]，但在计算这一坐标时，他所采用的基本常数的数值与常用的稍微不同；为了计算他的确定的月离表，他对黄纬差数所采用的不是显函数的形式，而只取便于数字的计算．

月球的主要差数

(取自布朗表)

黄经

引数	正弦的系数	
M'	+22639″.50	(1)
$2M'$	+769.02	(1)
$3M'$	+36.12	(1)
$4M'$	+1.94	(1)
$5M'$	+0.11	(1)
$6M'$	+0.01	(1)
2ξ	+2369.90	(2)
M	−668.11	(3)
ξ	−125.15	(4)
$2\xi-M'$	+4586.43	(5)
2η	−411.61	(6)
$2\xi-2M'$	+211.66	
$2\xi-M'-M$	+205.96	
$2\xi+M'$	+191.95	
$2\xi-M$	+165.15	
$M'-M$	+147.69	
$M'+M$	−109.67	
$2\xi-2\eta$	+55.17	
$2\eta+M'$	−45.10	
$2\eta-M'$	−39.53	
$4\xi-M'$	+38.43	
$4\xi-2M'$	+30.77	
$2\xi-M'+M$	−28.47	
$2\xi+M$	−24.42	
$\xi-M'$	−18.61	
$\xi+M$	+18.02	
$2\xi+M'-M$	+14.58	
$2\xi+2M'$	+14.39	
4ξ	+13.90	
$2\xi-3M'$	+13.19	
$2\xi-M'+2\eta$	−9.37	
…	…	

黄纬

引数	正弦的系数	
η	+18461″.48	(7)
3η	−6.30	
5η	+0.005	
$M'+\eta$	+1010.18	(1)
$M'-\eta$	+999.69	(1)
$2M'+\eta$	+61.91	(1)
$2M'-\eta$	+31.76	(1)
$3M'+\eta$	+3.98	(1)
$3M'-\eta$	+1.58	(1)
$4M'+\eta$	+0.27	(1)
$4M'-\eta$	+0.09	(1)
$5M'+\eta$	+0.02	(1)
$5M'-\eta$	+0.01	(1)
$2\xi+\eta$	+117.26	(2)
$2\xi-\eta$	+623.66	(8)
$M+\eta$	−6.49	(3)
$M-\eta$	−4.86	(3)
$\xi+\eta$	−5.36	(4)
$\xi-\eta$	−4.79	(4)
$2\xi-M'+\eta$	+199.48	(5)
$2\xi-M'-\eta$	+166.58	(5)
$2\xi+M'-\eta$	+33.36	
$2\xi-M-\eta$	+29.69	
$2\xi-2M'-\eta$	+15.56	
$2\xi+M'+\eta$	+15.12	
$2\xi+M-\eta$	−12.14	
$2\xi-M'-M+\eta$	+8.90	
$2\xi-M+\eta$	+8.00	
$2\xi-M'-M-\eta$	+7.46	
$M'-M+\eta$	+6.76	
$4\xi-M'-\eta$	+6.58	
$M+\eta$	−6.49	
$M'-M-\eta$	+5.65	
$M'+M+\eta$	−5.33	
$M'+M-\eta$	−5.10	
…	…	

赤道视差

引数	余弦的系数	
M'	+186″.540	(1)
$2M'$	+10.166	(1)
$3M'$	+0.621	(1)
$4M'$	+0.040	(1)
$5M'$	+0.003	(1)
2ξ	+28.233	(2)
M	−0.400	(3)
ξ	−0.978	(4)
$2\xi-M'$	+34.312	(5)
$2\xi+M'$	+3.086	
$2\xi-M$	+1.918	
$2\xi-M-M'$	+1.444	
$M'-M$	+1.153	
$M'+M$	−0.949	
$4\xi-M'$	+0.601	
$2\eta-M'$	−0.714	
…	…	
	+3422″.700	(9)

(1) 中心差，(2)二均差，(3)周年差，(4)月角差，(5)出差，(6)黄道订正，(7)黄纬主要项，(8)黄纬大差，(9)平均视差．

1) Ernest W. Brown, Tables of the Motion of the Moon; 3vol; New Haven, 1919.

2) Ernest W. Brown, Theory of the Motion of the Moon; Memoirs of the Royal Astr. Soc. Vol. LVII, p51; London, 1908.

§ 123 日-月岁差与章动

由于白道的交点有其长期的与周期的移动，日-月岁差与章动便表现有类似的情况，因而我们把它们联系起来讨论。

如 § 42 里大略叙述的，日-月岁差起源于太阳与月球对于椭球形的地球所施的力偶矩，在其转动上所引起的一种效应。利用欧勒方程我们得以研究刚体受一定力偶矩的作用时，围绕其中心的转动。因此我们首先将地球所受的力偶矩表为摄动体(太阳与月球)的坐标的函数，然后将这些表达式引入加以适当转换的欧勒方程。这些方程的积分提供：一方面是日-月岁差，另一方面是在黄经上的与黄赤交角上的章动里的几个主要项。

首先说明规定地球转动的元素所属的参照系(图 136)。第一个直角坐标系，原点在地心 O；Ox 与 Oy 两轴指向黄道上两个不变的方向，Oz 则指着黄道的北极。这坐标系 $Oxyz$ 是顺向的，本节内其他坐标系也是顺向的。

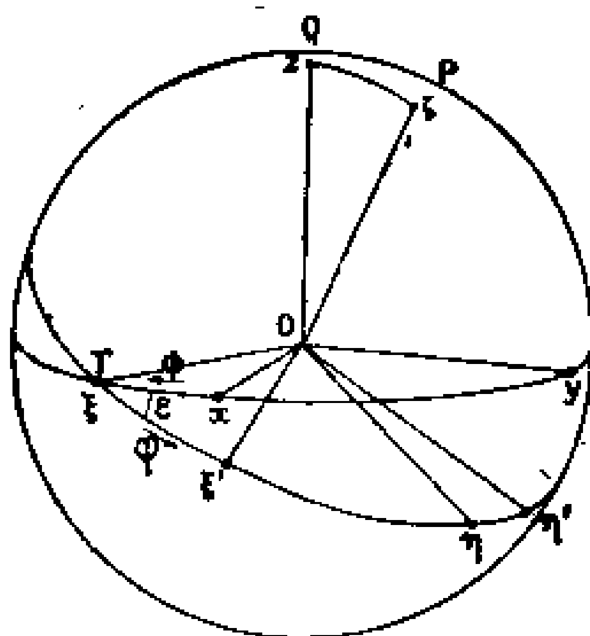


图 136

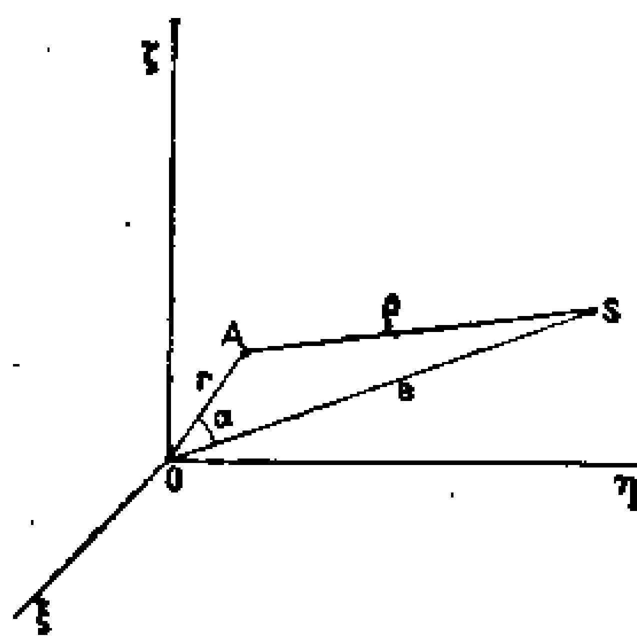


图 137

第二个坐标系与地球联系，为其旋转所带动；$O\xi'$ 与 $O\eta'$ 两轴指着地赤道上两个不变的方向，$O\zeta$ 轴是地球的自转轴，向北极为正。假设惯量椭球是旋转体，其一轴便与 $O\zeta$ 相重合。

我们将利用第三坐标系 $O\xi\eta\zeta$，使以上两坐标系相互转换；这里 $O\xi$ 指向黄道在赤道上的升交点；因此这是经常用以决定赤道坐标的参照系。这三个坐标轴还可当做是惯量主轴。

地球的自转可以将下列三弧*表为时间的函数的公式所确定：

$\psi = x\xi$　　以逆向为正

$\varphi = \xi\xi'$　　以顺向为正

$\varepsilon = z\zeta$　　经常是正的

若地球不受外力的作用，则 ψ 与 ε 是不变量；但由于太阳与月球的引力扰乱了地球的自转运动，使这两个元素发生变化。试研究这引力的性质。

令 ξ, η, ζ 表示地球的一个小体积单元 A(质量为 dm)的赤道直角坐标(图 137)；X, Y, Z 为太阳对于相同三轴的坐标。并以 a 表示距离 OS，r 表 OA，ρ 表示 AS。设以太阳的质量为 1，则它施于 A 点处单位质量的力为

* 亦称欧勒角——译者注

$$\frac{k}{\rho^2}$$

这力可以分解为两个向量，分别指向 AO 与平行于 OS 的方向．第一向量对于三轴的矩为零，因此可以略而不计．第二向量的大小为

$$\frac{ka}{\rho^3}=\frac{k}{a^2}+ka\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{a^3}\right)$$

与式内右端第一项对应的是与单元的位置无关的一个加速度，即地球在其轨道上运动的加速度．第二项是一个摄动力，可以足够的近似值，写为

$$-3\frac{k}{a^3}(\rho-a)=-3n^2(\rho-a)$$

在相同的近似值下，还有

$$\rho-a=-r\cos\alpha=-\frac{\xi X+\eta Y+\zeta Z}{a}$$

α 表示 OS 与 OA 之间的夹角．因此施于单元质量 dm 上的摄动力为

$$dF=3\frac{n^2}{a}(\xi X+\eta Y+\zeta Z)\,dm$$

这力平行于 OS；因此在赤道三轴 $O\xi\eta\zeta$ 上的分量为

$$\frac{X}{a}dF\qquad\frac{Y}{a}dF\qquad\frac{Z}{a}dF$$

又其力矩为

$$dL_1=\frac{dF}{a}(\eta Z-\zeta Y)$$

$$dM_1=\frac{dF}{a}(\zeta X-\xi Z)$$

$$dN_1=\frac{dF}{a}(\xi Y-\eta X)$$

因此施于地球的力偶矩为

$$L_1=3\frac{n^2}{a^2}\sum(\xi X+\eta Y+\zeta Z)(\eta Z-\zeta Y)dm$$

$$M_1=3\frac{n^2}{a^2}\sum(\xi X+\eta Y+\zeta Z)(\zeta X-\xi Z)dm$$

$$N_1=3\frac{n^2}{a^2}\sum(\xi X+\eta Y+\zeta Z)(\xi Y-\eta X)dm$$

由于这些坐标轴是惯量主轴，这些表达式可以大大地简化．设 A, B, C 表示对应的转动惯量；暂时设 B 不等于 A：

$$\sum\xi\,dm=\sum\eta dm=\sum\zeta\,dm=\sum\eta\zeta\,dm=\sum\zeta\xi\,dm=\sum\xi\eta dm=0$$

$$\sum(\eta^2+\zeta^2)dm=A\qquad\sum(\zeta^2+\xi^2)dm=B\qquad\sum(\xi^2+\eta^2)dm=C$$

$$\sum(\eta^2-\zeta^2)dm=C-B\qquad\sum(\zeta^2-\xi^2)dm=A-C\qquad\sum(\xi^2-\eta^2)dm=B-A$$

因此摄动的力偶矩可以写为（现在使 $A=B$）

$$\left.\begin{aligned}L_1&=3n^2\frac{YZ}{a^2}(C-A)\\M_1&=-3n^2\frac{ZX}{a^2}(C-A)\\N_1&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

将 X, Y, Z 表为太阳的黄经$\odot$与黄赤交角 ε 的函数:

$$\left.\begin{aligned} X&=a\cos\odot\\ Y&=a\cos\varepsilon\sin\odot\\ Z&=a\sin\varepsilon\sin\odot\end{aligned}\right\}$$

最后得[1)]

$$\left.\begin{aligned} L_1&=\frac{3}{4}n^2(C-A)\sin 2\varepsilon(1-\cos 2\odot)\\ M_1&=-\frac{3}{2}n^2(C-A)\sin\varepsilon\sin 2\odot\\ N_1&=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

(1) 式也提供由月球而来的摄动力偶矩，但是月球的坐标 X', Y', Z' 代 X, Y, Z，并以 a' 代 a，却是不够．我们还应记住(1)式内曾以 n^2 代 $k:a^3$，因此这里的 k 应以乘积

$$n^2m'\left(\frac{a}{a'}\right)^3$$

代替．§114 内所得的相当于 $\frac{1}{m'}$ 的数字值是

$$\frac{1}{m'}=332310\times 81.45=27067000$$

更取 $\varpi_0=8''.800$，则得

$$\frac{a}{a'}=388.93$$

由此得

$$m'\left(\frac{a}{a'}\right)^3=2.174$$

以下我们以其数字值代替这个量．

用 §87 里的公式可以计算月球的赤道直角坐标，但为了简化起见，我们略去与 i'^2 同级之量．因此我们以 1 代替黄纬的余弦，更以

$$\sin i'\sin(☾-\theta)$$

代其黄纬的正弦，☾ 与 θ 分别表示月球的与白道升交点的黄经(这里的符号与前节所用的不同)．于是

$$\left.\begin{aligned} X'&=r'\cos☾\\ Y'&=r'\sin☾\cos\varepsilon-r'\sin\varepsilon\sin i'\sin(☾-\theta)\\ Z'&=r'\sin☾\sin\varepsilon+r'\cos\varepsilon\sin i'\sin(☾-\theta)\end{aligned}\right\}$$

最后丢掉含 i'^2 级之项，并取 $r'=a'$，则简化后我们将由月球而来的摄动力偶矩写为如下的形式:

$$\left.\begin{aligned} L_2&=1.63n^2(C-A)[\sin 2\varepsilon(1-\cos 2☾)+2\sin i'\cos 2\varepsilon(\cos\theta-\cos(2☾-\theta))]\\ M_2&=-3.26n^2(C-A)[\sin\varepsilon\sin 2☾-\sin i'\cos\varepsilon(\sin\theta-\sin(2☾-\theta))]\\ N_2&=0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

地球所受的力偶矩 L, M, N 在赤道三轴上 $O\xi\eta\zeta$ 上的投影为

$$L=L_1+L_2,\ \cdots$$

注意到 L 有一常数部分:

1) 若以 $\sin 2\varepsilon$ 为 $2\sin\varepsilon$，则摄动力偶矩分为两个大小相等的向量: 一个是固定的，指向 γ 点; 另一个在赤道内移动．这正是第四章 §42 内所假设的，不过这只是一种近似的表示法．

$$2.38n^2(C-A)\sin 2\varepsilon$$

现在写出地球绕它的重心运动的方程式. 欧勒方程提供地球围绕与它联系的惯量三轴 $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta$ 的瞬时自转速度 p, q, r; 以 λ, μ, N 表示力矩在这三轴上的投影; 则欧勒方程写为

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}+(C-A)qr=\lambda \\ &A\frac{dq}{dt}-(C-A)pr=\mu \\ &C\frac{dr}{dt}=N \end{aligned}\right\}$$

因惯量椭球被假设为旋转体, 故 $A=B$.

向量 λ, μ 与向量 L, M 的关系为

$$\left.\begin{aligned} L&=\lambda\cos\varphi-\mu\sin\varphi \\ M&=\lambda\sin\varphi+\mu\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} &A\left(\frac{dp}{dt}\cos\varphi-\frac{dq}{dt}\sin\varphi\right)+(C-A)r(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=L \\ &A\left(\frac{dp}{dt}\sin\varphi+\frac{dq}{dt}\cos\varphi\right)-(C-A)r(p\cos\varphi-q\sin\varphi)=M \\ &C\frac{dr}{dt}=N \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

设 p_1, q_1, r 为地球绕 $O\xi\eta\zeta$ 三轴的自转速度, p_1 与 q_1 容易从 p 与 q 推出.

$$\left.\begin{aligned} &p\cos\varphi-q\sin\varphi=p_1 \\ &p\sin\varphi+q\cos\varphi=q_1 \\ &\frac{dp}{dt}\cos\varphi-\frac{dq}{dt}\sin\varphi=\frac{dp_1}{dt}+q_1\frac{d\varphi}{dt} \\ &\frac{dp}{dt}\sin\varphi+\frac{dq}{dt}\cos\varphi=\frac{dq_1}{dt}-p_1\frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

剩下的是将 p_1, q_1, r 表为欧勒角与其导数的函数. 这可以将这些角速度表为绕每一坐标轴的旋转

$$\left.\begin{aligned} p_1&=-\frac{d\varepsilon}{dt} \\ q_1&=\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon \\ r&=\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

关系式 5 与 6 提供欧勒方程的最后转换形式:

$$\left.\begin{aligned} &-A\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}-(C-A)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+C\sin\varepsilon\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=L \\ &A\sin\varepsilon\frac{d^2\psi}{dt}+(C-2A)\cos\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{d\psi}{dt}+C\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=M \\ &\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{d^2\psi}{dt^2}\cos\varepsilon+\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}\sin\varepsilon=0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

第三式简化为

$$\frac{dr}{dt}=0$$

由此可见，绕 $O\zeta$ 轴的旋转是未受摄动的匀速转动．另外，由于 $\frac{d\psi}{dt}$ 与 $\frac{d\varepsilon}{dt}$ 是小量，因而在第一近似值的情形，可以略去 $\frac{d^2\psi}{dt^2}$，$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$，$\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}$．于是方程组 7 简化为

$$\left.\begin{aligned}&C\sin\varepsilon\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=L\\&C\frac{d\varepsilon}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=M\\&\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

由方程组(8)的最后一式可见 φ 角作匀速的增加．从此假设这角在一恒星日内增加360°．设将时间的单位取为回归年，则

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varphi'=360°\times366.2422$$

方程组(8)的其他二式可以写为

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{L}{C\frac{d\varphi}{dt}\sin\varepsilon}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{M}{C\frac{d\varphi}{dt}}$$

式内将(2)与(3)的展开式之和代 L 与 M．由这两方程的积分便得岁差与章动在这些坐标上的理论表达式．

将 L 简化为其常数部分，便立刻求出日-月岁差．这样求得的岁差为

$$4.76\frac{n^2}{\varphi'}\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon$$

观测所给出的这个常数之值为 $50''.37$．再取

$$n=360°\qquad\frac{\varphi'}{n}=366.24\qquad\cos\varepsilon=0.9174$$

便得 $(C-A):A$ 之比，即转动惯量的相对差为 1:306.8．

得到这一点之后，由以上两方程里周期项的积分而得章动．按照习惯，以 N 与 Ω(第五章)分别表示黄经上与黄赤交角上的章动．可见这里的 N 字与本节开始处的 N 字所表示的意义不同，而 Ω 字这里也不是表示交点的黄经，上面用 θ 去表示了它．积分导至以下两式：

$$\begin{aligned}N=3.26\frac{n^2}{\varphi'}\frac{C-A}{C}\Big[&\frac{\sin i'\cos2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\frac{\sin\theta}{\nu}-\frac{\cos\varepsilon}{4.35}\frac{\sin2\odot}{n}\\&-\cos\varepsilon\frac{\sin2☾}{2n'}-\frac{\sin i'\cos2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\frac{\sin(2☾-\theta)}{2n'-\nu}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega=-3.26\frac{n^2}{\varphi'}\frac{C-A}{C}\Big[&\sin i'\cos\varepsilon\frac{\cos\theta}{\nu}-\frac{\sin\varepsilon}{4.35}\frac{\cos2\odot}{n}\\&-\sin\varepsilon\frac{\cos2☾}{2n'}-\sin i'\cos\varepsilon\frac{\cos(2☾-\theta)}{2n'-\nu}\Big]\end{aligned}$$

如以平太阳日为时间的单位，则

$$n=3548''.2 \qquad \varphi'=366.24n \qquad n'=47435'' \qquad \nu=-190''.63.$$

这些平均运动均是对于春分点计算的．将$(C-A):C$之值代入这些公式里去，便得如下的数值．布拉德累的章动为

$$N_1=-17''.16\sin\theta$$

$$\Omega_1=+9''.17\cos\theta$$

(纽康所采用的数字为$-17''.21$与$9''.21$)．章动椭圆的两轴之比为$\cos 2\varepsilon:\cos\varepsilon$，按方位角增长的方向而形成，其引数$\theta$是时间的减函数．

还有章动的短周期次：

$$N_2=-1''.263\sin 2\odot-0''.205\sin 2☾-0''.034\sin(2☾-\theta)$$

$$\Omega_2=0''.548\cos 2\odot+0''.089\cos 2☾+0''.018\cos(2☾-\theta)$$

$$-1''.272 \qquad -0''.204 \qquad -0''.034$$

$$+0.551 \qquad +0.089 \qquad +0.018$$

太阳项的周期是半个回归年，月球项的周期是半个分至月；因为引数随时间增加，对应的章动椭圆按方位角减少的方向而形成的；椭圆的两轴之比为$\cos\varepsilon:1$．最后一项的周期为13.6334日；对应的椭圆所形成的方向与以上两者相同；但两轴之比，与布拉德累的章动相同，皆是$\cos 2\varepsilon:\cos\varepsilon$．

若将偏心率和高于一阶的含i'之项一并考虑进去，还可得出其他系数更小之项(见书末表XVI)．

第十四章　食，掩星，凌日

§124　日月食概论，沙罗周

当地影投在月面上时发生月食．当月影投在地上时，发生日食，月轮盖着日轮的全部或一部．在这两种情形，月亮的中心在日地两球中心的连线附近．因此：

1．日期须在朔与望，即日食发生于新月朔日，月食发生于满月望日．在表达月亮的坐标式里所引进的参数 ξ（即月亮与太阳的黄经差）对于日食大约为零，对于月食大约为 $180°$．

2．食时月亮的黄纬必然很小，或者说，月亮在其轨道的一个交点附近．因此第二参数 η（即月亮与白道交点的黄经差）大约是 $0°$ 或 $180°$．

由此得出几个重要的结论．与 ξ 和 η 有关的月球运动的差数项在食时不能有任何的数值．例如，黄经与黄纬上的二均差与月角差以及黄道订正，均可略而不计．只有与太阳平近点角 M、月亮平近点角 M' 为引数的差数项，如中心差、出差与周年差，才不是事先决定的．月亮的视差应改正其在朔望时的二均差与月角差的效应．上面已经讲过，黄白交角 i' 在食时达到极大值，等于 $5°17'.5$；交点发生住留现象，而与平交点相重合．在食的一般讨论里，若以月亮的轨道根数可以有两极限之间的一切数值，那便产生了误差．

现在借用天体力学所推出的月球运动的主要差数；但如上所述，使 ξ 与 η 等于 $0°$ 或 $180°$．与 $M=M'=90°$ 对应的食叫做平食；与月亮在近地点，太阳在远地点（即 $M'=0$，$M=180°$）对应的食叫做近地食；与月亮在远地点，太阳在近地点（即 $M'=180°$，$M=0$）对应的食叫做远地食；后面两种食是两个极端的情形．

要用的数据如下：

(1) 月亮黄经的每时变化，可以 24 除其黄经对于时间的导数而求得，再将以上的 ξ 和 η 之值引入，便得

$$\Delta L'=2011''+258''\cos M'+16''\cos 2M'-1''\cos\xi+2''\cos M$$
$$+1''\cos(M'-M)-0''.5\cos(M'+M)+\cdots$$

(2) 月亮黄纬的每时变化，其近似表达式显然是

$$\Delta U=\Delta L'\tan i'=0.09262\Delta L'$$

(3) 太阳黄经的每时变化：

$$\Delta L=148''(1+2e\cos M)$$

(4) 太阳的视差 P：取其近似值为 $9''$．

(5) 太阳的视半径 s：

$$s=960''(1+e\cos M)$$

(6) 月亮的赤道地平视差 P'，在食的情形，其表达式可以简化为如下几项：

$$P'=3451''-1''\cos\xi+224''\cos M'+10''\cos 2M'+0''.6\cos 3M'$$
$$+1''.5\cos M+1''.2\cos(M'-M)+0''.5\cos(M'+M)+\cdots$$

(7) 月亮的视半径 s'. 已知

$$s'=0.2723P'$$

以上所讲的数据以后常要用到，总结列入下表：

	近地食	平食	远地食
$\Delta L'$[1]	2282″	1997″	1770″
ΔU	211″.4	185″.0	163″.9
ΔL	143″	148″	153″
P	9″	9″	9″
s	944″	960″	976″
P'[1]	3682″	3440″	3236″
s'	1003″	937″	881″

规定朔望循环的会合周 S 为

$$S=29.5305881 \text{ 日}$$

规定月亮复回白道与黄道的一个交点的交点周 D 为

$$D=27.2122178 \text{ 日}$$

由于不是每个朔望日，也不是月亮每次过交点时便发生食，因而不能单纯依据这两个周期去预报日月食的出现. 但是我们可以利用它们去推求食的循环周期，即沙罗周；经过一个沙罗周，月亮、太阳和地球差不多恰好重复回到其原来的相对位置.

首先，我们注意到 223 个会合周差不多等于 242 个交点周：

$$242D=6585.35670 \text{ 日}$$

$$223S=\underline{6585.32115} \text{ 日}$$

$$\text{差：}\quad 0^{\text{d}}.03555=0^{\text{h}}51^{\text{m}}12^{\text{s}}$$

经过 223 个平朔望月，太阳和月亮再度相合. 至于交点，它对于太阳的位置在黄经增加的方向上已经变了 28′.2，这个小角相当于 51^{m} 内月亮对于交点的运动. 或者说，月亮的升交距角减少了 28′.2 或 0°.470. 由于黄白交角相当小，这变化一般不致影响一个沙罗周后日月食循环的情况.

如果在这里略去与引数 M 和 M' 有关的差数项，便不合理了. 太阳运动的差项变幅很小，而月亮的差项则大得很多，月亮可以离开它的平均位置达 7° 之多. 因此我们应当说，沙罗周也是日与月的平近点角的循环周期.

沙罗周长 18 年 11 日，超过整倍年之数只有 11 日，因此太阳的平近点角 M 回到原来的数值时只差 10°.5. 故与月亮和太阳的黄经相关之项(其系数都很小)，只受到很小的变化. 至于月亮的平近点角 M'，由于偶合，差不多恢复到原来的数值. 若以 A 表近点月，则

$$239A=6585.53745 \text{ 日}$$

这数字比 223 个朔望月仅多了 0.21630 日. 因此平近点角 M' 复回原来的数值只少 2°50′ 或 2°.826，这数字相当于月亮在 $5^{\text{h}}11^{\text{m}}$ 内对于近地点的位移.

总之，沙罗周是规定月亮对于太阳和地球的位置的四个参数很近似的周期[2]. 因此，

1) 月食加 1″，日食减 1″.

2) 参看 §129 与 §133 内有关同系的食的演变.

这周期将食带回到差不多相同的情况上去．可是这个周期以日计含有一个分数，约等于1/3日，因而地上见食的区域，平均每次比前次约西移120°.

§125 月　　食

现在研究月食，先讨论假设观测者在地心所见的一般情况．这是一个合理的假定，因为一方而视差的效应既不显著地影响食的情况，也不影响各食相发生的时刻，而另一方面凡是对于不能精密定位的观测，我们不必去作精密的理论．

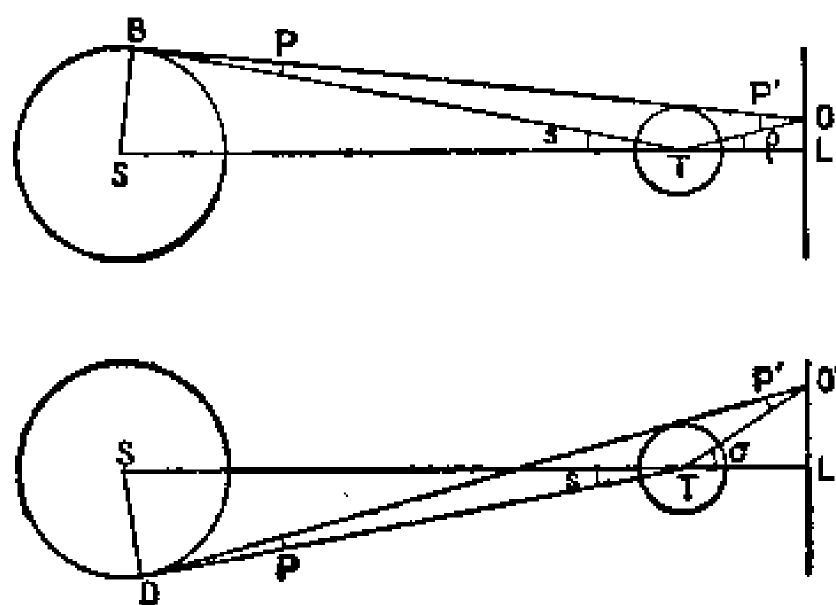


图 138

由于投影在月面的是地球，若从月球中心作与影锥轴正交的平面帘幕去代替球形的月面，是不会对现象有什么改变的．设想这个幕是无限的，我们便在它上面看出一个圆形的本影，外边还围绕有一个环状的半影．令ρ与σ表示本影与半影的视半径(图138)．这本影为以ST为轴以地日两球的外公切线BO为母线的旋转锥所决定(上图)．由于TOB三角形两内角之和等于第三个角的外角，仍用上节的符号可以写为

$$P+P'=\rho+s$$

于是

$$\rho=P+P'-s \tag{1}$$

同样的推理求得半影的视半径(138下图)：

$$\sigma=P+P'+s \tag{2}$$

若在1与2两式里引入§124里所给出的平均数据，便得

$$\rho=3441''+9''-960''=2490''=41'30''$$

$$\sigma=3441''+9''+960''=4410''=1°13'30''$$

为平均半径达41′的圆所围的本影，可以将整个月轮包括进去．因而这本影可以造成全食．至于外围的半影，它的视宽度等于太阳的视半径的二倍，这与月亮的平均视直径也相当接近．在远地点的月亮可能完全浸没在这半影里；这样便会使月亮在半影里造成全食．

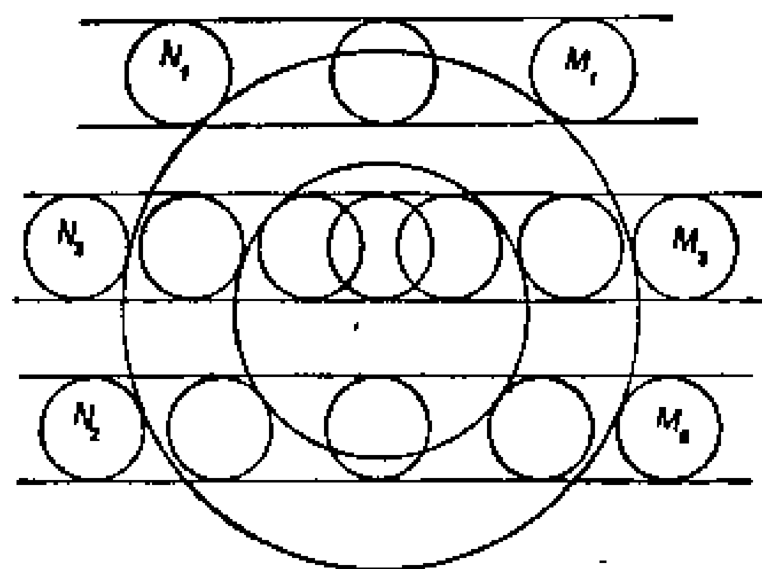


图 139

满月时，月轮可能全部或一部进入半影的环圈里，而没有进入本影里去(图139内M_1N_1的情况)，便发生半影食；这是不显著的现象，1959年以前法国天文年历不载半影食．半影食一般是偏食，很少全食*．这现象开始与终了之际，月轮与半影的周界相外切．这两个食相叫做半影食的初亏与复圆．

若在月食过程中月轮一部分进入本影(图中M_2N_2的情况)，便造成月偏食．偏食开始与终了之际，月轮与本影的周界外切，这是本影

* 据1964—2163年间半影月食的统计，偏食与全食之比约为10:1——译者注

食的初亏与复圆两个食相;大约与半影食的两个内切同时发生,这是由于月亮的视直径和太阳的视直径经常是相差不多的缘故.

最后,若月轮全部进入本影(图中 M_3N_3 的情况)则发生全食. 当月轮与本影的周界内切之际,便是全食开始与终了的时刻,这叫做食既与生光.

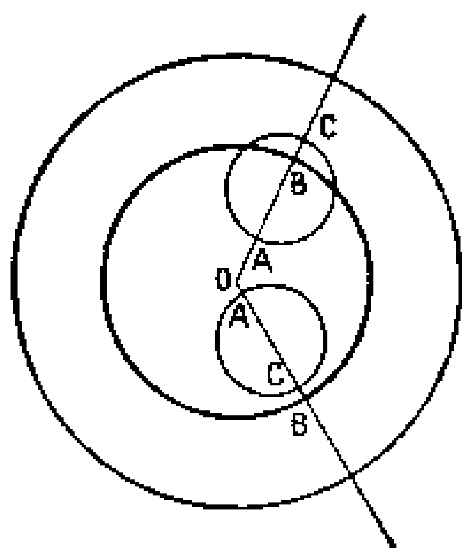


图 140

全食或偏食被食的程度名叫"食分",以食甚时由被食的边沿到本影的边沿的距离表示(图 140),而将月亮的视直径取为量度的单位. 在月偏食的情形食分

$$g=\frac{AB}{AC}=\frac{\rho-d+s'}{2s'}$$

d 表示月轮中心至本影中心的最短距离. 同样的公式也应用于全食. 特别是中心食的情形,食分为

$$\frac{\rho+s'}{2s'}$$

在平均的情形,这数字是 1.83. 食分小于 1 时为偏食,大于 1 时为全食.

同样亦可规定半影食的食分;只须在以上的公式里将 σ 代 ρ 便得. 半影食的食分也可能大于 1,而成半影里的全食,这时月轮全部进入半影,但未接触本影. 这只发生于月球在其近地点附近之时(例如 1926 年 12 月 19 日).

古人以"指"表示食分,一指等于月亮的直径的十二分之一. 中心食的平均食分为 1.83 的 12 倍,即 22 指.

§ 126 地球的大气与月食

假使地球是一个没有大气的不透明体,它的本影里便不会有丝毫光线. 在上述屏幕的一个直径上,亮度的变化如图 141 中 $ACDF$ 那条曲线. 但是大气使在它里而透过的光线发生偏折同时并改变其光谱的成分. 光线向影锥内面偏折,而照着月面,因此月面不会完全黑暗.

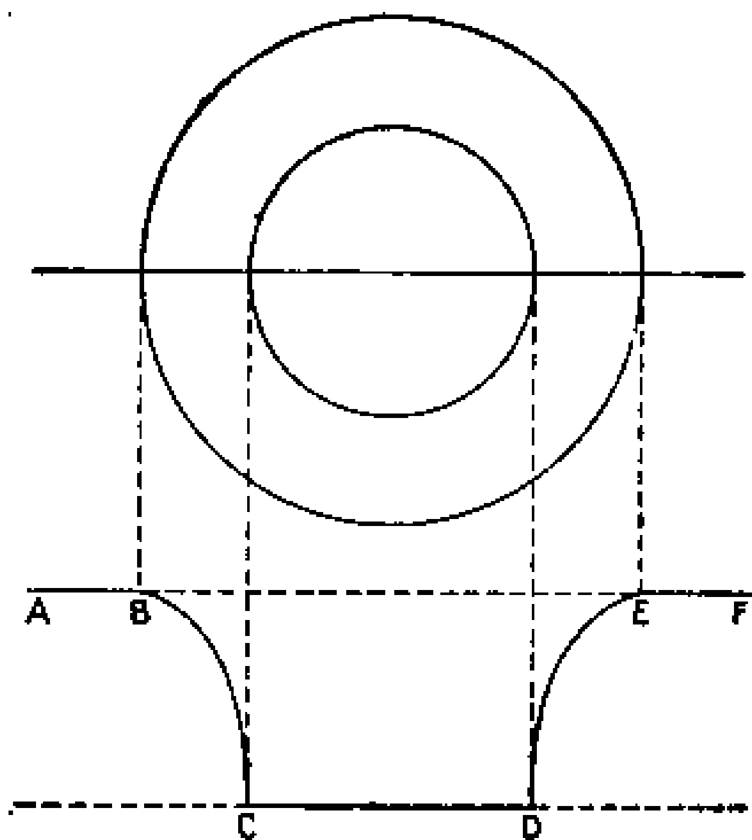


图 141

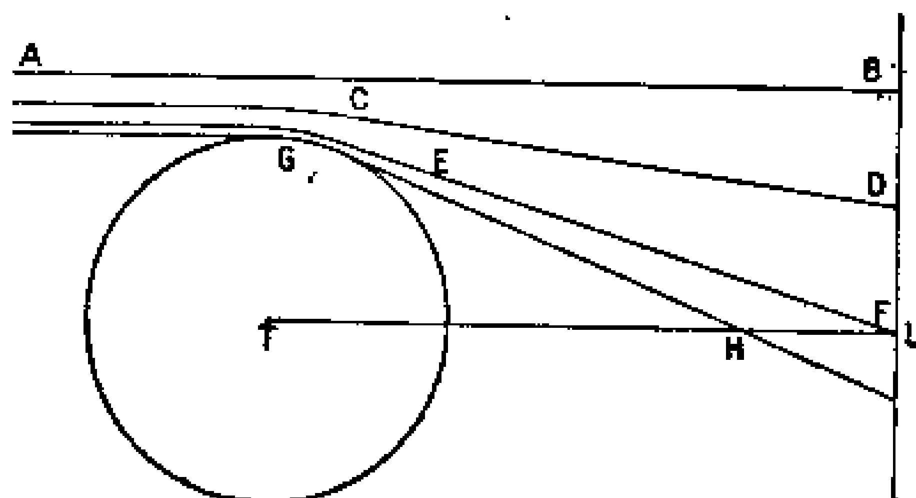


图 142

暂时假设以一个无限远的光点来代替太阳. 象 GH 那样的一线光(图 142)掠地面,G 点而过,所遭受的总偏折两倍于地平蒙气差,即约 $70'$. 其他光线,如离地面最近的高度

为 h 的 CD，受到的偏折较少．当 h 增大时，地平蒙气差迅速地变小．我们要来寻找：h 达到怎样一个数值，日光的偏折便不显著？由此可见，在半径为 LB 的某个圆的周界之外，屏幕上的亮度便不因地球的存在而有所改变，可是我们不能给与本影以一个确定的界限．当我们进入半径为 LB 的圆内时，亮度逐渐变小，这变化开始是缓慢，继而迅速，接近本影中央时又缓慢了．为了给与这现象以一个理论，应当同时考虑在图所在的平面内，被折射的光线的发散度与光线经过大气时所受到的吸收度．在本影中心 L 处发生一种聚焦的效应，若大气吸收不致消没入射光线，则在 L 处可以看到一个光点．可见，在对应于象 EF 那样的光线的高度，大气的扰动对 L 处的阴影的物理情况可能有深刻的影响．

现在回来讨论月食的情况．将日面圆轮分为许多很小的单元．每个单元都起以上所假想的点光源那样的作用，则幕上的照度便象以上所说那样的分布．我们所观测到的是这些单元照度的总和，即累积照度．本影的周界如图 141 内的 CD 将为很显著的逐渐变暗的阴影所代替，其内部还有人眼所能觉察的亮度．容易证明，月亮不能进入完全黑暗的影锥里去．设（图 143）AB 为从日轮边沿上一点而来的光线，在 B 点与地球相切，假使没有大气折射，则这光线到 C 点时便有

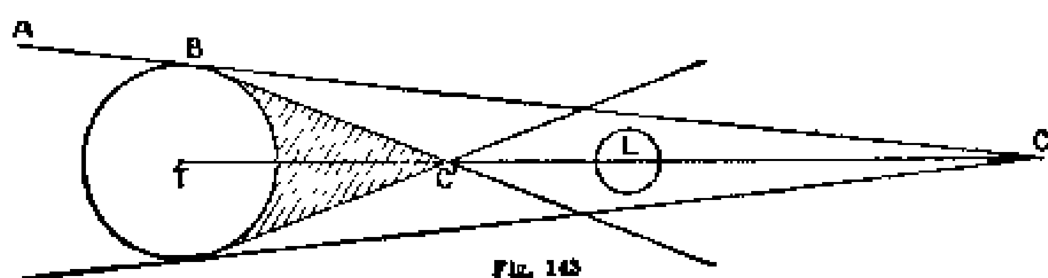


图 143

$$TC = R:\sin s = 215R$$

但是为了计入折射，应当将 s 增加 $70'$，于是被折射的光线过 C' 点，即

$$TC' = R:\sin(s+70') = 40B$$

因此月亮总是在以 C' 为顶点的完全黑暗的影锥之外．

地球的大气虽然没有确定的界限，但是我们可以假设有一个使光线偏折的极小高度 h，这以上折射便无显著的效应．为此，我们回头讨论点光源的情形，并转去看 142 图．假定地影的界限是一个圆周，由于大气的存在，这圆周上的照度减少 2%．据现今认识的大气密度在铅垂线上的分布，我们取 75 公里为这极限高度．换句话说，为计算月食，地球的半径应该增加 75 公里或相对值 1/85．另外，视差的表载值是对于地球赤道半径而计算的，为了转换为对应于纬度 45° 上的一点，应该减少 1/594．因此表上的视差应得的总改正值为

$$\frac{1}{85} - \frac{1}{594} = 0.0101$$

或很接近于 1/100．于是使视差系统地增加 1/100．就平均值言，ρ 增加 1/73，σ 增加 1/128．

大多数计算者墨守成规，将 ρ 与 σ 各增加 1/50．即使将这改正数作为对本影的观测结果（由于本影直径的测量很不确定，而且其解释亦很可怀疑），这结果是不可靠的；在半影的情形，也不能得到证实．应当给与 ρ 和 σ 的改正数是一个相同的绝对值而非相对值．因此，旧日的规则是没有意义的．

最接近本影中心的月面区域所接收的光通量，由于大气的吸收，大大地减少了．而且这区域里呈现红色，有时深红得象落日的颜色那样．可是本影的边沿区域很少或没有颜

色；在大约 4′ 的宽度处，常出现一种灰色．但被食的月面的情况，随从月面看地球周界上的区域气象情况而有变化．

图 144 表示月面照度随与本影中心的距离的变化，这是由 1931 年 9 月 26 日月全食的光度测量而求得的．纵标的单位为 $2.5\log e$，即尺度是以星等划分的．观测是透过有色滤光版(一红、一绿)而作的．图中本影部分曲线分为两支，显明地表示中央区域红色特别鲜明．

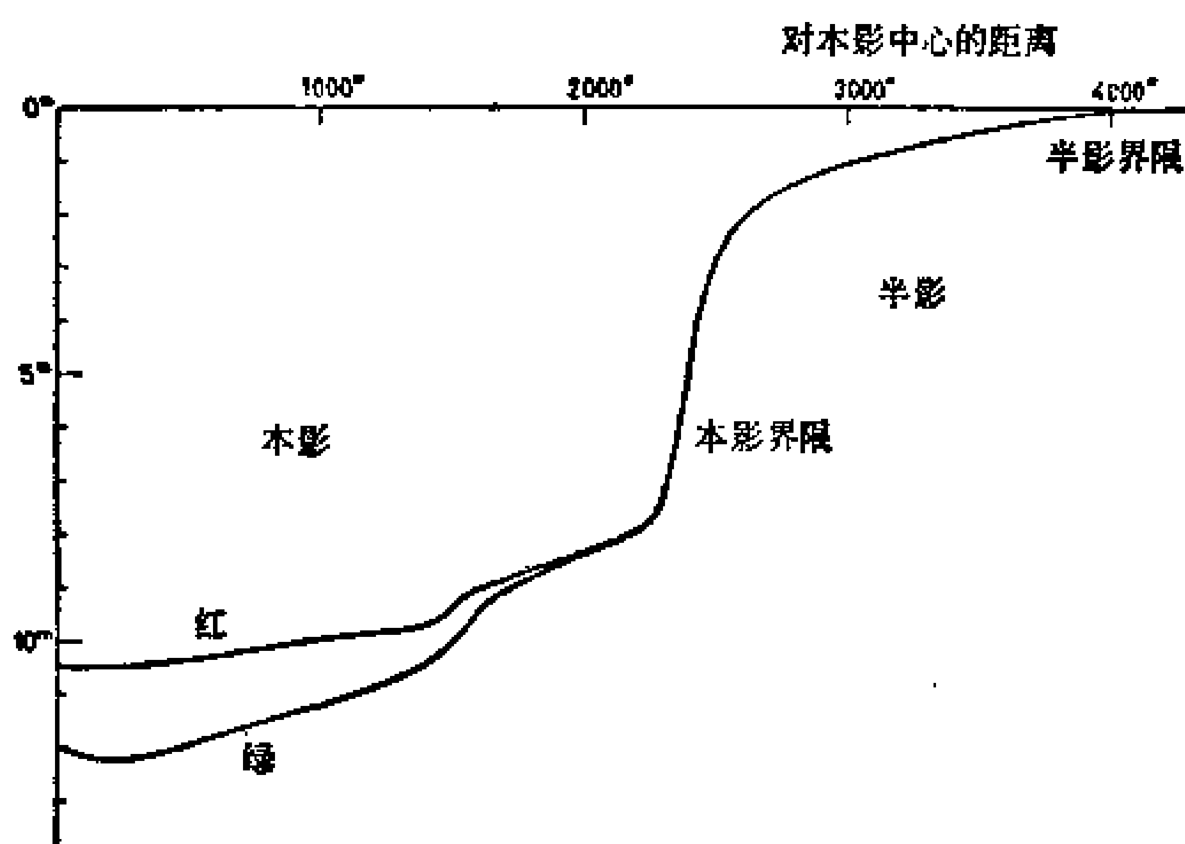


图 144　1931 年 9 月 26 日月全食的光度测量

§ 127　月食的条件与时间

要在冲时发生月食，月亮中心到本影中心的极小角距离 d_m 须小于某一极限值：

半影食	$d_m<\sigma+s'$
偏　食	$d_m<\rho+s'$
全　食	$d_m<\rho-s'$

使用 §124 里的数据，并将 P' 增加 1/100，便得两极端情况与平食的数值如下：

	近地食	平　食	远地食
ρ	2785″	2524″	2302″
σ	4673″	4444″	4254″
$\sigma+s'$	5676″	5381″	5135″
$\rho+s'$	3788″	3461″	3183″
$\rho-s'$	1782″	1587″	1421″

现在研究月亮的会合运动，或者说，月亮对于本影中心的运动．设 Ox 与 Oy 为黄道内的两正交轴，并取本影中心为其原点，令 β 表示白道与黄道的交角，且假设白道在 xOy 面内为一直线，则由图 145 得

$$\tan\beta=\frac{\Delta U}{\Delta L'-\Delta L}$$

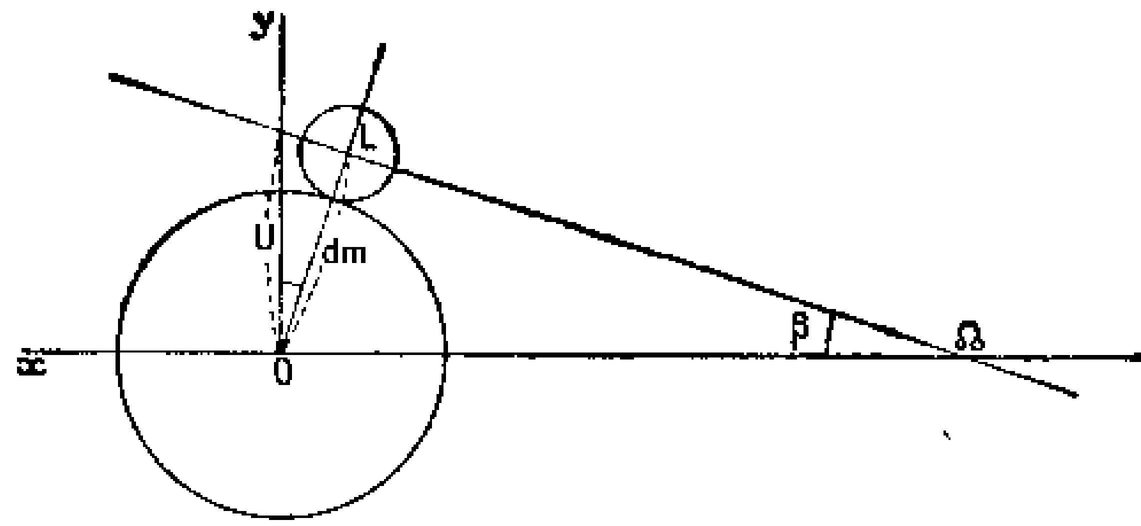


图 145

将这些量的数值代入便得

	近地食	平　食	远地食
ΔU	211.4″	185″.0	163″.9
$\Delta L'-\Delta L$	2140″	1849″	1618″
$\tan\beta$	0.09878	0.10005	0.10130
β	5°38′.5	5°42′.8	5°47′.0
$\cos\beta$	0.99516	0.99503	0.99491
合运动	2150″	1858″	1626″

表内末行所列的组合的会合运动之值来源于

$$(\Delta L'-\Delta L)\sec\beta$$

极短距离 d_m 与月亮的黄纬的关系，在黄经合时为

$$d_m=|U|\cos\beta$$

对于这三种食，可取 $\cos\beta$ 之值为 0.995. $|U|$ 的极限值便是[1]

食	近地食	平　食	远地食
半影食	1°35′4″	1°30′8″	1°26′1″
偏　食	1°3′26″	0°57′58″	0°53′19″
全　食	0°29′51″	0°26′35″	0°23′48″

为了判断有无月食，须在天文年历里取出黄经冲时(即满月)，月亮的黄纬 U，而将这数值和以上的极限值比较. 我们可以总结说：

食	一定有食 若 $\|U\|<$	可能有食 若 $\|U\|$ 在下列两数之间	不可能有食 若 $\|U\|>$
半影食	1°26′1″	1°26′1″ 与 1°35′4″	1°35′4″
偏　食	0°53′19″	0°53′19″ 与 1°3′26″	1°3′26″
全　食	0°23′48″	0°23′48″ 与 0°29′51″	0°29′51″

1) 我们可以对这问题作进一步的研究：为了确定月食可能发生的条件，应该将地球的极径代其平均径，因为食限发生于本影的北、南两部分. 但为了不使问题复杂化，我们不在此讨论了.

例 1 1940 年 3 月 23 日冲时有无月食？这冲发生于 19^h33^m (世界时)．天文年历给出的 U 之值如下：

12^h	$-1°57'42''$
18	1 37 54
24	1 17 41

于是求得冲时

$$U=-1°31'43''=-5503''$$

这是一个可疑的情形，只有计算了 σ 之后才能决疑，而且这是一个半影食．由天文年历取出冲时的数据如下：

$$P=9'' \qquad 1.01P'=3720'' \qquad s=964'' \qquad s'=1003''$$

$$\sigma+s'=4693''+1003''=5696''$$

$$d_m=0.995U=5475''$$

可见有一半影食发生，其食分为

$$g=\frac{\sigma+s'-d_m}{2s'}=\frac{221''}{2006''}=0.110$$

例 2 1935 年 1 月 10 日有无月食？对于冲时(世界时 15^h44^m)．天文年历给出

$$U=+0°13'38''=+818''$$

可见必然有一月全食．计算如下：

$$P=9'' \qquad 1.01P'=3286'' \qquad s=975'' \qquad s'=886''$$

$$\rho+s'=2320''+886''=3206''$$

$$d_m=814''$$

$$g=\frac{2392''}{1772''}=1.350$$

现在计算中心食($U=d_m=0$)的持续时间．食甚与

1．半影食初亏，

2．半影食食既

3．本影食初亏，

4．本影食食既

之间所经历的时间，再以下列的数量除组合的会合运动：

$$\sigma+s' \qquad \sigma-s' \qquad \rho+s' \qquad \rho-s'$$

便得如下的结果：

中　心　食	近地食	远地食
半影食初亏	2^h 38^m	3^h 9^m
半影食食既	1　42	2　4
本影食初亏	1　46	1　57
本影食食既	0　50	0　52
食的总时间	5^h 17^m	6^h 19^m
全 食 时 间	1　39	1　45
食　　分	1.888	1.806

最大食分发生于近地中心食的情形；而最长的食时属于远地食，这时月亮的视直径最

小、会合运动最慢．在这两种情形里，半影食食既("生光")发生于本影食初亏（复圆）前(后)几分钟．

最后，研究太阳应离交点多远，才能于冲时发生月食？由于黄白交角为$5°17'.5$，故

$$\sin(\odot-\Omega)=\cot i'\tan U=10.80\tan U$$

于是求得 $\odot-\Omega$ 的上限为

食	近地食	平　食	远地食
半影	17°23′	16°27′	15°40′
偏	11 29	10 29	9 39
全	5 23	4 47	4 17

§128　月食的计算

为了计算某一月食的情况，我们利用冲时月亮和太阳的赤道经纬．例如要计算1936年1月8日的月食．由天文年历取出如下的数据：

太阳	在 0^h(世界时)	$\alpha=19^h11^m\ 44^s.34$	时变化 $+10^s.940$
	12	13　55.55	10.929
	24	16　6.64	10.919
月亮	在 0^h(世界时)	$\alpha'=7^h\ 7^m\ 25^s.30$	分变化 $+2^s.2930$
	12	14　16.52	2.2762
	24	21　4.74	2.2593

由此推出下表，以便用内插法去求赤经冲的时刻：

在 15^h(世界时)	$\alpha'-\alpha+12^h=-7^m\ 3^s.03$	分变化 $+2^s.1109$
18	$-0\ 44.59$	2.0941
24	$+5\ 30.86$	2.0772

于是求得冲发生于

$$t_0=18^h21^m.30$$

这时

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=19^h15^m4^s.99 && \text{分变化}\ +0^s.1821\\&\delta=-22°19'35'' && +0''.326\\&P=9''\\&s=976''\end{aligned}\right\}\text{太阳}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha'=7^h15^m4^s.99 && \text{分变化}\ +2^s.2742\\&\delta'=+21°53'53'' && -7''.090\\&1.01P'=3423''\\&s'=923''\end{aligned}\right\}\text{月亮}$$

设 Ox 与 Oy 为两个正交的较差坐标轴，原点 O 在本影的中心(图146)，这两轴各与赤纬圈和时圈相切．再设 x 与 y 为月亮中心的较差坐标．这以后假设这些坐标是时间的线性函数，并假设太阳和月亮的视差与视半径都是常数．但是如需要考虑这些量的变化以及 x 和 y 的表达式里的二次项，也很容易计算进去

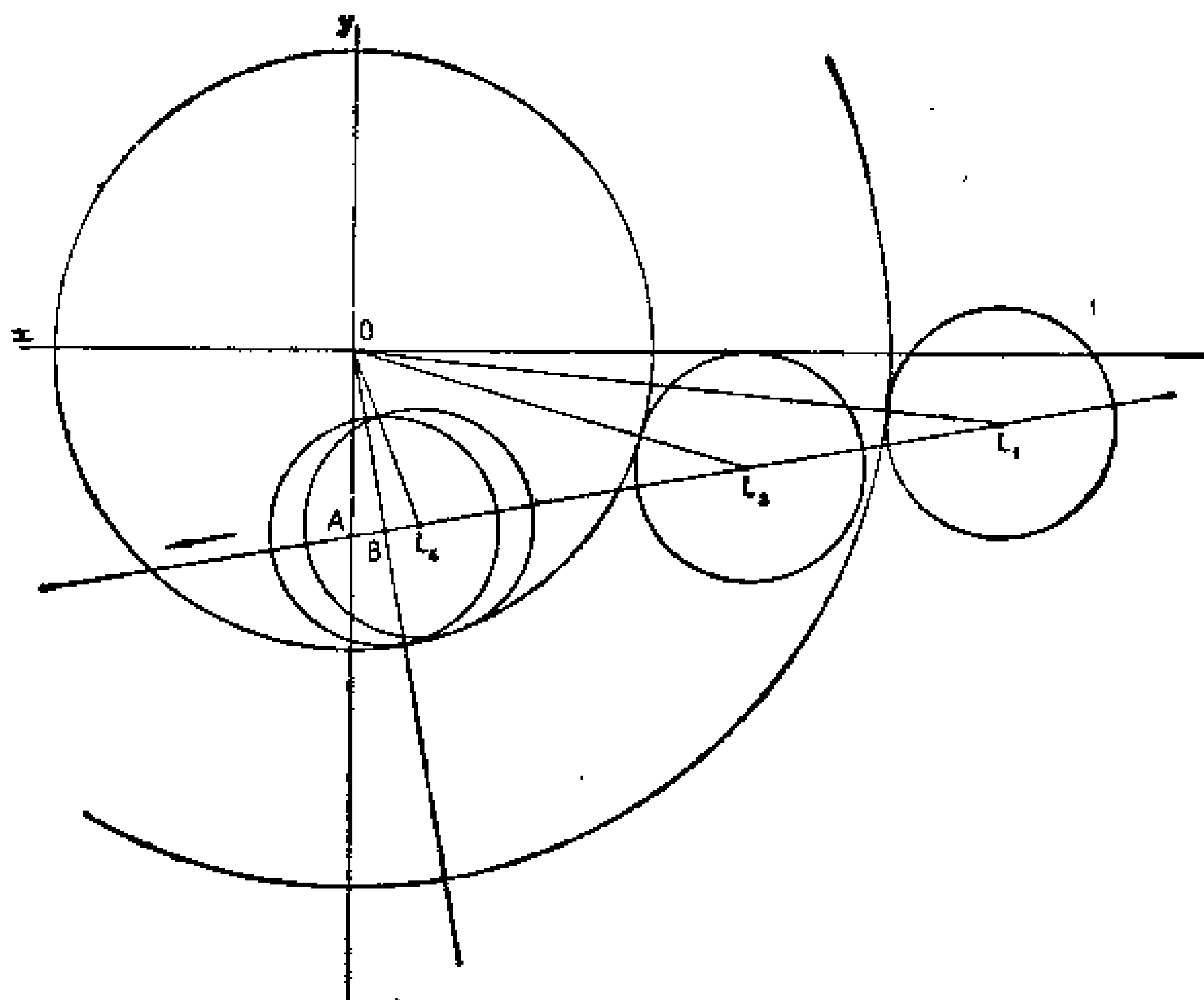


图 146　1936 年 1 月 8 日月全食的食相

冲时我们有[1)]

$$x_0=0$$

$$y_0=\delta+\delta'=-1542''$$

$$\varDelta x=15''(\varDelta\alpha'-\varDelta\alpha)\cos\delta=+29''.030$$

$$\varDelta y=\varDelta\delta+\varDelta\delta'=-6''.764$$

末后两行的变化是对于每分钟计算的. 若保留分为时间的单位, 则在 t 时,

$$x=29''.030(t-t_0)$$

$$y=-1542''-6''.764(t-t_0)$$

我们便据这两式来推算一切未知数.

令 θ 为月亮中心的相对轨迹 L_1B 与 Ox 轴之间的角, 则

$$\tan\theta=\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=-\frac{6.764}{29.030}=-0.2330$$

$$\theta=-13°7'$$

$$\sin\theta=-0.2269$$

$$\cos\theta=0.9739$$

组合的会合运动等于

$$\varDelta x\sec\theta=29''.81$$

这是月亮中心在其相对轨道上每分钟的位移. 其最短距为下式所给出:

$$d_m=y_0\cos\theta=1502''$$

这距离在食甚时, 即月亮中心过 B 点时达到. 因

$$AB=y_0\sin\theta=29''.81(t_m-t_0)$$

---

1) 不要忘记, 本影中心的赤经与和它相差 12^h 的太阳的赤经一样变化, 但本影的赤纬和它的变化是与太阳的赤纬的变化相反的.

由此便得与 d_m 对应的时刻 t_m 为

$$t_m = t_0 - 11^{m}.74 = 18^{h}9^{m}.56$$

还要计算各食相距离 t_m 的时间. 由于

$$\rho = P + 1.01P' - s = 2456''$$

食甚时

$$\sigma = P + 1.01P' + s = 4408''$$

$$d_m + s' = 2425'' = \rho - 31''$$

可见这是月全食，因而须计算半影食与本影食的各个食相. 在这些食相时距离 OL 有如下的数值:

半影食亏或(复圆)	$\sigma + s' = 5331''$
半影食食既(生光)	$\sigma - s' = 3385''$
本影食初亏(复圆)	$\rho + s' = 3379''$
本影食食既(生光)	$\rho - s' = 1533''$

设以 ω 表示 LOB 角，并令 $OL = d$，则

$$\cos\omega = \frac{d_m}{d} \quad BL = d_m \tan\omega$$

将 $29''.81$ 除对应于各食相的 BL，便得各食相与食甚之间的时间. 计算得的结果如下:

	ω	BL	$\lvert t - t_m \rvert$
半影食初亏(复圆)	73°38′	5116″	171ᵐ.6
半影食食既(生光)	64 28	3145	105.5
本影食初亏(复圆)	63 37	3027	101.5
本影食食既(生光)	11 32	306	10.3

由以下的计算可得各食相时月轮与地影的接触点的方位角(§11):

	外切	内切
初切	$-\theta + \omega$ (初亏)	$180° - \theta + \omega$ (食既)
末切	$-\theta - \omega$ (复圆)	$180° - \theta - \omega$ (生光)

总上所述，便得这次月食的全部情况如下:

	世界时	方位角
进入半影	15ʰ 18ᵐ.0	86°45′
与半影内切	16 24.1	257 35
进入本影(初亏)	16 28.1	76 44
全食始(食既)	17 59.3	204 39
食甚	18 9.6	
全食終(生光)	18 19.9	181 35
退出本影(复圆)	19 51.1	309 30
与半影内切	19 55.1	128 39
退出半影	21 1.2	299 29

食分

$$g = \frac{\rho + s' - d_m}{2s'} = 1.017$$

由上表可见，自 $16^{h}24^{m}$ 至 $16^{h}28^{m}$，又自 $19^{h}51^{m}$ 至 $19^{h}55^{m}$，月亮完全没入半影而未接触本影; 这时期中是半影里的全食. 在近地食便没有这种食相出现.

为了决定地球上看见月食的区域，我们计算在各食相发生时月亮在其天顶的地区的地理坐标．例如，食甚时在格林尼治月亮的时角为 $-5^h56^m.55$ 或 $-89°8'$ 赤纬为 $+21°55'$．因此要寻找的地点在东经 $89°8'$，北纬 $21°55'$．在地球仪上，我们容易看出，这一点为极的半球包括整个亚洲、大部分欧洲、非洲东北部、马达加斯加岛、澳洲等地．这些地区均能见到食甚．

在图 146 里，我们用相同的尺度绘出本影和半影的周界以及月轮初入半影 L_1，入本影 L_3（初亏），和食既 L_4 与食甚 B 的图．如果不追求很高的精确度的话，那么精细地描绘这幅图，便可省略以上的计算．

§129 月食续现的规则，食系

某一次月食之后，再经过若干朔望月才会有另一次月食？如果考虑到月亮运动的各种差项，来解决这个问题，那就会导至很麻烦的展开式．但是这个问题并不需要很精确的解决，我们可据平食发生的条件来求月食循环的规则．设以 ⊙ 表示满月时（黄经冲）太阳的黄经，并以 Ω 表示平交点（升或降）的黄经．假定月食发生的条件如下（按 §127 里的研究）：

$$\text{若}\quad |\odot-\Omega|<16°.5\quad \text{则发生半影食} \tag{1}$$

$$\text{若}\quad |\odot-\Omega|<10°.5\quad \text{则发生本影食} \tag{2}$$

再假设太阳对于交点作匀速运动，其速度在每会合周为

$$29.5306(n-v)=30°.6705$$

将月食发生的条件表为几何图形（图 147）；令 N 表示一个交点，在黄道上取两弧 NB 与 NC 各等于 $10°.5$ 和两弧 NA 与 ND 各等于 $16°.5$．出现半影食的条件是代表满月时太阳的 S 点须在 A 和 D 两极点之间；若 S 在 B 与 C 之间，则会出现本影食．

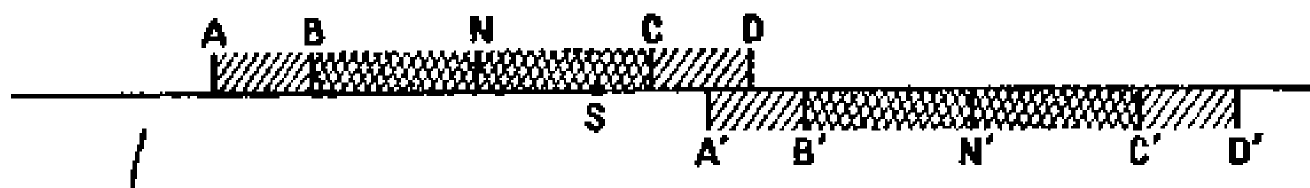


图 147

下一次满月时，交点循逆向离开 N 点 $30°.69$ 而来到 N' 点；将对应于 N' 的极限位置 $A'B'C'D'$，按 $ABCD$ 和 N 的关系那样绘出．这样便可立刻看出，继续两次满月不能发生两次本影食，因为 S（不论其位置在哪里）不能同时既在 BC 之间又在 $B'C'$ 之间．因此，在一个朔望月的期间，我们绝不能观测到两次本影食．即使将月亮运动的差项考虑进去，这结论也是正确的．

本影食之后也不能随即出现一次半影食，因为 $A'D'$ 与 BC 两区不能有共同的部分；同样半影食之后一个朔望月内，也不能立即出现一次本影食*．

但是在连续两个满月里，可以发生两次半影食，因为 AD 与 $A'D'$ 两区有一段公共的

* 在很罕见的情形，这规则会有例外（日食亦与此类似）．例如 1958 年 4 月 4 日的半影食（$g=0.013$）之后 5 月 3 日发生一次本影食（$g=0.009$）．可是这两次的食分都很小．

另外一个例子：2013 年 4 月 25 日的本影食（$g=0.028$）之后，5 月 25 日发生一次半影食（$g=0.039$）——译者注

弧 $A'D$. 这个比较稀少的情形发生于 1926, 1933, 1940, 1944 与 1951 等年. 图 148 表示 1926 年 6 月 25 日与 7 月 25 日两次降交点的半影食. 月轮的被食部分第一次在南, 第二次在北. 在升交点发生的半影食, 与这情形相反.

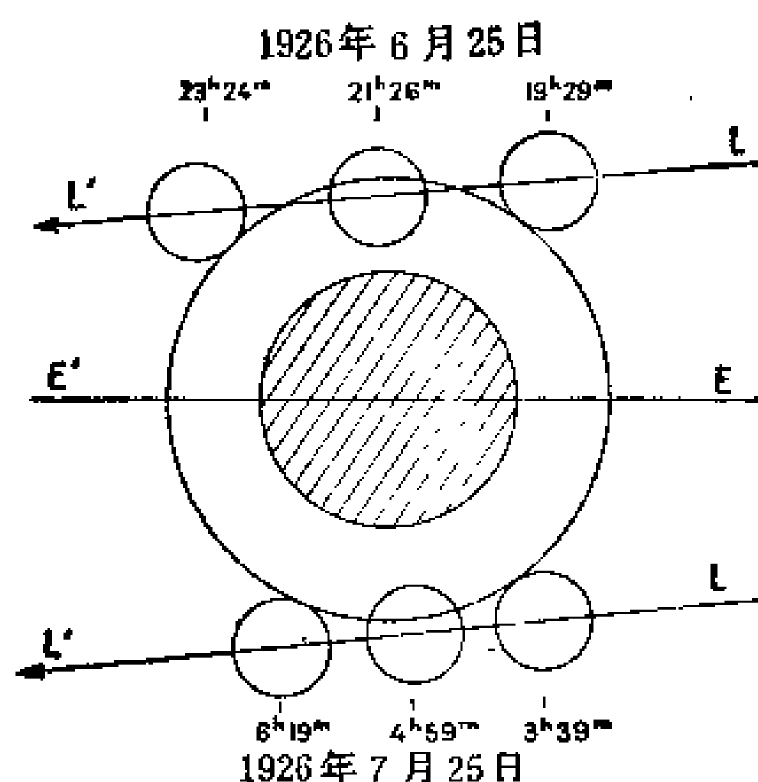


图 148　月亮的两次半影食

月食时 S 点在 $A'D$ 弧内的概率等于 $A'D:AD=0.070$. 由于一个沙罗周里平均有 43 个月食, 因此在这些月食中, 平均可能有 3 对半影食出现在 1 个朔望月的期间内. 这正是下列的表 (1923—1940 年间的月食表)里出现的数字.

为了将这讨论推广到 p 个朔望月, 我们将 $\odot-\Omega$ 的增数写为如下的形式:

$$30^{\circ}.6705p=180^{\circ}k+\varepsilon_p$$

k 表示整数, 其选定的方法在使 ε_p 的绝对值是尽量的小. 于是我们列出下表:

p	ε_p	p	ε_p	p	ε_p
1	+30°.7*	9	−84°.0	17	−18°.6*
2	+61.3	10	−53.3	18	+12.1*
3	−88.0	11	−22.6*	19	+42.7
4	−57.3	12	+8.0*	20	+73.4
5	−26.7*	13	+38.7	21	−75.9
6	+4.0*	14	+69.4	22	−45.3
7	+34.7	15	−80.0	23	−14.6*
8	+65.4	16	−49.3	24	+16.1*

先讨论一般的情形, 即不必区别本影食与半影食. 设在满月时下列的不等式:

$$-16^{\circ}.5<\odot-\Omega<+16^{\circ}.5 \tag{3}$$

得到满足, 便会发生月食. 为了在 p 个朔望月后发生另一次月食, 还须有下列的不等式:

$$-16^{\circ}.5-\varepsilon_p<\odot-\Omega<+16^{\circ}.5-\varepsilon_p \tag{4}$$

若 ε_p 超过 33°.0, 则这两个不等式不能同时得到满足. 因此, 这一讨论里只能保留 $p=1$, 5, 6 等几个数值(即表中以星点符号表出的). 对于这几个数值去解(3)与(4)两个不等式, 便得如下的条件:

$p=1$	$-16^{\circ}.5<\odot-\Omega<-14^{\circ}.2$
5	$+10^{\circ}.2<\odot-\Omega<+16^{\circ}.5$
6	$-16.5<\odot-\Omega<+12.5$

不须再向前推进, 因为可能发生月食的区域已经被填满了. 下表是将连续两次月食的时间表为 $\odot-\Omega$ 的初值的函数; 于是容易推出这些时间的每一个内见食的概率, 和一个沙罗周里月食的数目, 按这些概率怎样分布在以 1, 5, 6 个朔望月为区间的 223 个月的沙罗周之内.

	区　间	概率	平均数
−16°5			
	1 朔望月	0.07	2.9
−14°2			
	6 朔望月	0.74	30.2
+10°2			
	5 朔望月	0.19	7.7
+16°5			
		总共	40.8

这计算是按平食的数据作成的，提供一个沙罗周里的月食数为41. 按奥波泽尔(Oppolzer)的统计数字是43.3，比较大些. 对于一给定的沙罗周，这数字的变化在39至47之间，显然有很大的变化，而且这变化是相当地有规则性，周期约为590年. 最多食的沙罗周含准中心食之数最多. 我们现今正在一个比较少食的周期里，于二十世纪末后25年内达到极少.

令 x, y 与 z 各表示沙罗周里在6, 5与1个朔望月期间内发生的月食数，一般有下列的关系式：

$$6x+5y+z=223$$

这个方程式在可能的极限内有相当多的解，我们将在讨论日食里举例说明.

据同样的方式可以研究本影食，以食限10°5代16°5，便得一个沙罗周里本影食的次数. 我们只讨论 p 的数值在使 ε_p 的绝对值小于21°0的，即 $p=6$, 12, 17, 23… 对应于这些 p 值的双不等式如下：

$p=6$	$-10°5<\odot-\Omega<+6°5$
12	$-10°5<\odot-\Omega<+2°5$
17	$+8°1<\odot-\Omega<+10°5$
18	$-10.5<\odot-\Omega<-1.6$
23	$+4.1<\odot-\Omega<+10°5$

$p=12$ 或18的范围比 $p=6$ 更加窄狭，换句话说，若6个月后不再发生本影食，则12或18个月后更不会发生本影食了(除了例外). 但在17个月后又可以发生，否则便在23月后去了. 于是推得与以上一般月食类似之表如下：

	期　间	概率	平均数
−10°5			
	6 个朔望月	0.81	21.1
+ 6°5			
	23 个朔望月	0.07	2.0
+ 8°1			
	17 个朔望月	0.12	2.9
+10°5			
		总共	26.0

这里统计提供的结果还是比计算的结果大些，11个月为期的月食，虽不出现于表内，但不是完全没有的；因对应的 ε 之值很和这极限接近；这个补注也同样可用于12月为期的本影食. 我们可以找着这样的例子. 据统计月亮的本影平食在一沙罗周里为27.8. 事实上这数字可在25至29之间变化，而且这变化的周期性也和以上所讨论一般月食的情况相似.

因月全食时 $\odot-\Omega$ 的极限为4°8，一个简单的比例算出28次本影食里13次为全食

15 次为偏食. 这里还是有显著的变化. 下表(1923—1940 年间的月食表)内, 在 27 次本影食里有 14 次全食, 13 次偏食.

以 6 个月为期出现的月食,形成所谓短系食,以区别于 18 年 11 日为期的长系食. 下表便是一个例子:

年	月	日	食
1933	8	5	半影
34	1	30	偏
	7	26	偏
35	1	19	全
	7	16	全
36	1	8	偏
	7	4	偏
	12	28	半影

以 ε_6 除可能发生月食的总区间, 更将商取为整数, 便得同一短系里的最多月食之数. 这样求得在一短系里有 9 次月食, 平均 6 次本影食, 3 次半影食, 半影食常发生于一系的始与末. 事实上,系与系间并无一定规律,在系始或系末可能没有半影食,有时甚至无食(例如在 1940 年 3 月 23 日与 1941 年 3 月 13 日之间). 这种反常的原因可以解释食时所在的交点发生了更替;若发生于升交点的月食是近地食,则其他的月食是远地食与之相反的情形,结果亦属相反.

可见, 在继续两年里, 同一系的月食发生于次年的日期较前提早 11 日, 原因是 12 个朔望月是 1 年少 10.88 日.

17 或 23 个朔望月的本影食间的长周期(偶然也有 11 和 12 月的周期)发生于一系完成另一系开始之际. 这可由下列 1923--1940 年月食表看出.

18 年 11 日为期的食形成最长的系. 在一沙罗周里, 交点前进 $0\overset{\circ}{.}470$, 食区的总范围为 $33\overset{\circ}{.}0$, 交点将在 70 个沙罗周里经过. 故长系里平均有 71 次月食, 延续至 1262 年之久. 事实上,由于轨道偏心率的变化,各系里出现的月食数有相当大的差异.

长系以半影食开始, 其数目平均为 13; 在升交点处 1 月轮的南边沿被食; 在降交点处,北边沿被食. 跟着出现本影偏食,平均数为 12 或 13, 然后出现全食,平均为 20, 其中一个为准中心食. 这一系为新的偏食所完成;跟着有半影食,其被食边沿与开始的情形相反.

1890 年结束了两系本影食. 1890 年 6 月 3 日的偏食以前,有 56 次本影食,其第一次(这以前的半影食未经人计算)发生于 880 年 9 月 22 日(儒略历). 这一系里计有 18 次全食,然后为半影食 (1908 年 6 月 14 日, 1926 年 6 月 28 日, 1944 年 7 月 6 日……)续完这一系食.

另外一系演变比较迅速. 其第一本影食只上溯到 1118 年 8 月 7 日(儒略历), 1890 年 11 月 26 日的食是第 44 次; 这里只发生过 13 次全食. 以后的食是半影食, 即 1908 年 12 月 7 日, 1926 年 12 月 19 日, 1944 年 12 月 29 日,以续完这一系.

下表记载 1923—1940 年间的月食, 以短系分组, 分别列为两行. 若在表内的日期上加以 18 年 11 日,便可得下一沙罗周里的月食预报日期.

月食 (1923–1940)

年	月	日		食	食 分
1923	3	3		偏 0.37	
	8	26	6 朔望月	偏 0.16	
1924	2	20	6	全 1.60	
	8	14	6	全 1.65	
1925	2	8	6	偏 0.73	
	8	4	6	偏 0.74	
1926	1	28	6 ⎫	半影(0.56)	
	6	25	5 ⎪		半影(0.68)
	7	25	1 ⎬ 23	半影(0.36)	
	12	19	5 ⎪		半影(1.03)
1927	6	15	6 ⎭		全 1.01
	12	8	6		全 1.35
1928	6	3	6		全 1.24
	11	27	6		全 1.15
1929	5	23	6 ⎫		半影(0.94)
	11	17	6 ⎬ 17		半影(0.85)
1930	4	13	5 ⎭	偏 0.10	
	10	7	6	偏 0.02	
1931	4	2	6	全 1.50	
	9	26	6	全 1.32	
1932	3	22	6	偏 0.96	
	9	14	6	偏 0.97	
1933	2	10	5 ⎫		半影(0.02)
	3	12	1 ⎪	半影(0.59)	
	8	5	5 ⎬ 17		半影(0.24)
	9	4	1 ⎪	半影(0.67)	
1934	1	30	5 ⎭		偏 0.11
	7	26	6		偏 0.66
1935	1	19	6		全 1.35
	7	16	6		全 1.75
1936	1	8	6		全 1.01
	7	4	6		偏 0.26
	12	28	6 ⎫		半影 0.85
1937	5	25	5 ⎬ 17	半影(0.77)	
	11	18	6 ⎭	偏 0.14	
1938	5	14	6	全 1.10	
	11	7	6	全 1.35	
1939	5	3	6	全 1.17	
	10	28	6	偏 0.98	
1940	3	23	5 ⎫		半影(0.08)
	4	22	1 ⎪	半影(0.87)	
	10	16	6 ⎬ 17	半影(0.72)	
1941	3	13	5 ⎭		偏 0.32

注：表中半影食的食分放在括弧内，第四列载两次月食之间所经历的朔望月数．1941年3月13日的月食属下周．

但不应忘记，连续两次食的食分常有变化，平均变化率为 0.08，而且往常还要大些，这可由下表看出。因此某些月食可能改变其类型，更有新出现或不出现之食。下表记载 1923—1940 与 1941—1950 年两周期间的变化：

第一周					第二周				
年	月	日	食	食分	年	月	日	食	食分
1927	6	15	全	1.01	1945	6	25	偏	0.86
1929	5	23	半影	(0.94)	1947	6	3	偏	0.02
1930	10	7	偏	0.02	1948	10	18	半影	(1.02)
1932	3	22	偏	0.96	1950	4	2	全	1.04
1932	9	14	偏	0.97	1950	9	26	全	1.08
1933	2	10	半影	(0.02)	1951	2	21	无食	
1938	5	14	全	1.10	1956	5	24	偏	0.96
1939	10	28	偏	0.98	1957	11	8	全	1.04
1940	4	22	半影	(0.87)	1958	5	3	偏	0.01

第一周内有 15 次半影食，13 次本影偏食，14 次全食。第二周内对应的数字为 13，13 与 15；总计第一周内有 42 食，第二周内有 41 食。

在讨论日食与其循环的一节里（§ 133），我们还要说明一个民用年里的月食数。

奥波泽尔在其《食典》里列出自 −1206 至 +2163 年间的本影食的要素。这部著作不但是天文学家而且是年代学者的参考典籍。遗憾的是，书中完全略去了半影食*，但据物理学的观点而言，食分接近于 1 的半影食与食分为百分之几的本影食是没有什么差别的。如果观测者事先没有知道，这两种食一样会引起他们注意的；因此对于年代学而言，这两种食具有同样的价值。

§ 130　日食，发生的条件

日食发生于新月朔日，那时月球的阴影投射于地面。月影投射在过地心而与影锥轴正交的平面叫做基本面。影锥在这平面上的截口是一个圆；本影锥所截的圆在月心的视半径表为 ρ，半影锥所截的圆在月心的视半径表为 σ。为了计算这两个角，我们转去看 § 125 和图 138。设取地球的赤道半径为单位，则月球的半径为 $k=0.2723$**。为了在这里应用 § 125 里的公式(1)与(2)，应以 kP 代太阳的视差，kP'（即 s'）代月亮的视差，因月球没有大气不需对 P' 加以改正；但为决定太阳的视半径，却应考虑地–月间的距离，我们使其按 $r:(r-r')$ 之比增加（r 与 r' 分别表示太阳与月球对于地球之间的距离）。最后求得

$$\rho=kP+s'-\frac{rs}{r-r'}$$

$$\sigma=kP+s'+\frac{rs}{r-r'}$$

* 我国天文工作者计算了二百年的半影月食，参看：刘宝琳，1964—2163 年半影月食表，载天文学报 12 卷 1 期 61—67 页——译者注

** 现在所用的 k 是 0.2724807——译者注

使用 § 124 里的数值便得

食	近地	平均	远地
ρ	$+59''$	$-23''$	$-95''$
σ	$1951''$	$1901''$	$1861''$

按本影锥的顶点在基本面的后方或前方，ρ 分别为正或负．在前一种情形，它在这面上形成真实的影；在这影内的人会看见月轮完全盖着日轮，而且溢出日轮的外围，这样便形成了日全食．在后一种情形，实际并没有影．在影锥第二支内的人，看见月轮投在日轮上，但外边剩余一圈明亮的环；这样便形成了环食．最后，若观测者在本影锥两支之外，但在半影锥之内，将看见月轮投在日轮的一部分上，它们的视边缘是相割的，这样形成了日偏食．因此日食的情况基本上是与观测者的地位有关的．

所以日食的类型，必须表现在各食相出现的区域所组合的地图上．所谓中心食便是本影轴与地球相交的日食；对于地上某些地区出现全食或环食，其他地区则见偏食．非中心食亦可在高纬度（北或南）的狭窄地区内形成全食或环食，但除了这些例外的情形，非中心食只能被人看见为偏食．

一般言之，观测者在地面上之点，在基本面的前方．若被食的太阳出现在他的天顶，他对月球中心的距离便短了一个地球半径，于是月亮的视半径在上述三种情形应分别增加 $18''$, $16''$ 与 $14''$，因而 ρ 的数值便为 $+77''$, $-7''$ 与 $-81''$．考虑了以上的论点，在由地面上一点平行于基本面所作的平面上，本影圆对于月心的视半径，显然包含在如下两个极值之内：$+77''$（出现在天顶的近地全食）与 $-95''$（出现在地平的远地环食）．对应的月心距分别为 55.0 与 63.8 个地球半径．于是我们断定：在观测点与本影锥正交的平面上半影圆的直径常在 $+262$ 与 -374 公里之间．

由于月亮的会合运动与地球的自转，本影在地面移动，但只在一个狭窄带内扫过．这带内的观测者先见偏食，然后在短时间内见全食或环食，跟着再见偏食．对于一个给定地点，中心食是一个极罕见的现象，可能经过几个世纪还不能看见一次．就巴黎天文台而言，前一次日全食出现于 1724 年，更前一次在 1406 年．巴黎前次看见的环食在 1764 年．

半影内所见的食相是偏食，其扫过的区域范围宽广得多；基本面上半影圆的半径约为 3500 公里．一给定地点平均在两年半之内可见偏食一次．

地区见食的情况，特别是各种食相，可以作很精确的测定．因此应以精确的方法去计算这些现象，即须将地球的扁率、观测地的高度与蒙气差一并考虑进去．我们在下一节内便要作这样的计算．但是讨论月食的近似方法，亦可用以讨论日食可能发生的条件．

我们可以将日食的开始，假定为基本面上的半影与地球椭圆体的截面相切之时．由于食分小的偏食仅出现于极区，这里应当使用的是椭圆体的极半径．因此月亮的视差须减少 1/297，而将日食发生的条件写为

$$d_m < \sigma + 296P' : 297$$

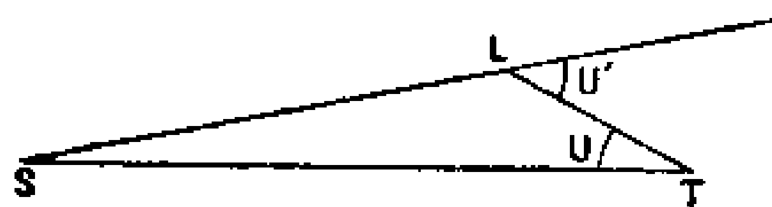


图 149

d_m 表示地心至本影中心在月心所张的最小角距离，于是求得

对于近地食，$d_m < 5620''$,

对于远地食，$d_m < 5085''$

设 U' 表示黄经合时（新月朔日）地心至本影中心的月心角距离．应用对月食所作的

推理容易证明 d_m 与 U' 的近似关系为

$$d_m = 0.9950U'$$

因此须决定 U'(图 149). 设 U 表示黄经合时月亮的地心纬度. 容易证明 $U'-U$ 之差不会超过 $15''$. 就绝对值言,可以足够的精度写

$$|U'| = 390|U|:389$$

将这些改正值考虑进去以后,若

$|U|>1°33'54''$, 便不会有日食;

若 $|U|<1°24'58''$, 必有日食,至少出现偏食.

若 $|U|$ 之值在这两个极限之间,便是一个可疑的情形,只能用精密的计算去解决它.

同样可得如下的结果,若

$$|U|>1°2'17'',$$

设有日食,则只能是偏食,但若

$$|U|<0°52'18'',$$

则总是中心食. 在这两数之间,则是可疑的情形.

将以上讨论的结果应用到一个例子上去. 1942 年 8 月 12 日朔日有无日食? 黄经合在 $2^h—27^m.5$(世界时), 那时月亮的黄纬 $U=-1°24'24''$, 因此一定有日食, 但是食分小的偏食. 黄经合时,

$$P=9'' \qquad s=949'' \qquad P'=3314'' \qquad s'=904''$$

月日两球的视差之比,给出

$$r:r'=382$$

于是 $|U'-U|=13'' \qquad |U'|=5077'' \qquad d_m=5052''$

$$kP=2'' \qquad 382s:381=951''$$

$$\rho=-45'' \qquad \sigma=1857''$$

当 d 是极小时, 地上照明圈内见到日面食甚之点至本影之内的本影边沿在月心所成之角距离为

$$\sigma+296P':297-d_m=108''$$

容易证明,用 $\sigma-\rho$(即 $1902''$)除这距离便得食分. 于是求得这次日食的最大食分为 0.057 (法国天文年历里更精确的数字是 0.056).

读者学习了 § 131 内白塞耳的理论与 § 132 内的日食图之后, 对以上的几行, 才会更加了解.

将日食的条件和我们已经建立的月食的条件加以比较是有趣的. 我们将会发现, 日偏食的概率与月亮的半影食的概率大约相等,不过前者稍小一点而已;太阳的中心食的概率也大约与月亮的本影食的概率相同,自然日食的条件总是窄狭一些. 就平均言,日月食之比为 89:90, 这里日食包含偏食, 月食包含半影食; 这其中太阳的中心食与月亮的本影食(偏食或全食)之比为 59:60.

这些比较的数字之接近是可以预见的. 假使与地球外切和内切的两个影锥有相等的顶角(事实上它们之差仅等于地球的日心视直径的两倍, 即 $36''$), 而且假使地球的大气不影响月食的情况,则这两个概率当是严格地相等.

若本影锥在基本面之前不超过一个地球半径,则日食出现的次序,先环食、继全食、然

后再出现环食. 1912 年 4 月 17 日日食中心线经过巴黎附近; 这次日食在大西洋为环食, 在西欧为全食, 在西伯利亚又为环食. 在距巴黎约 20 公里的圣-日耳曼-昂-勒城, 在两秒钟内看见黑暗的月轮周围有一串明亮的念珠(倍里珠); 这是日轮边缘透过月轮的凹凸部分被人看见的日光.

日全食最长可以经历许久? 我们已经说过, 当月球在近地点, 太阳在远地点, 而日食又发生在某处的天顶之时, 则在从该处所作的平行于基本面的平面上, 本影圈的半径将是极大. 这其中的第二条件出现于 7 月 2 日, 第三条件规定见全食处的纬度应等于太阳那时的赤纬, 即 $+23^\circ$. 若月亮在升交点, 它的赤纬差不多停留不变, 本影的中心由西向东移动; 但应该从它的速度里减去地球的自转速度, 在所指的纬度处, 这是 427 米/秒(这是对于太阳, 每平日一周的速度).

月亮会合运动的每时运行对于近地食是 $2150''$. 于是据已知对应的视差 $3681''$ (§ 124), 容易推出月亮的会合速度为 1035 米/秒. 本影在基本面上的速度, 按日地与日月之距离的比例增大, 即 1037 米/秒. 本影对于地面的速度因此是 610 米/秒; 因本影的直径是 262 公里, 全食时间延续 430 秒, 或 7 分 10 秒.

但上面为便利计算所假定的条件不是最优惠的条件. 若不改变其他数据, 而只将纬度降低, 则全食时间开始增加, 到了纬度为 $+5^\circ$ 处, 它可达 7 分 30 秒; 因为日食将不出现于天顶, 本影的直径将变短, 但它的速度先迅速地变小, 这样我们可以对于全食的最长时间, 得看一个很近似的估计.

1955 年 6 月 20 日的日食, 有关食期、见食处的纬度以及日食发生在天顶三个条件都很接近于最优惠的条件; 只是发生在降交点. 因此那次日全食延续了 7 分 8 秒, 发生于中国南海 $+15^\circ$ 地区, 全食带的宽度达 254 公里. 这一次全食时间之长是几个世纪以来所罕见的.

相同的方法可以计算环食的时间. 第二支本影锥的截口的直径, 对于发生在 1 月 2 日的远地食为极长. 在 -23° 的纬度地区, 环食将出现于天顶, 在降交点时可延续 11 分 20 秒. 但是若计算较此更北的地区环食的时间, 它将迅速地变长, 因为本影的直径变长, 而速度减少. 对于纬度 $+4^\circ$ 的地区, 食时最长, 可达 12 分 30 秒. 1937 年 12 月 2—3 日, 日环食发生在纬度 $+4^\circ$ 处, 延续了 12 分 0 秒, 18 时后月亮过远地点; 但这次日环食发生于升交点.

至于整个日食的时间, 即地球与月亮的半影锥两次外切中间所经历的时间, 和以上对月食所求得的数字相差甚少, 只是略短一点而已; 因为一方面日食与地球的大气的厚度无关, 另一方面地球的半影锥的顶角比其本影锥的顶角稍大. 于是求得近地食的时间为 5 时 14 分, 远地食为 6 时 15 分. 1940 年出现两次中心食, 在交点与拱线两方面都很相同, 4 月 7 日的远地食长 6 时 7 分, 而 10 月 1 日的近地食只延续了 5 点 11 分.

§ 131　一定地点的日食的计算

由于可以计算日月合时前后一些时刻(例如每 10 分钟), 太阳和月亮的地面坐标以及这两个天体受了视差影响的视直径, 因而我们能够精密地决定一给定地点的日食的情况. 我们先列出一张表达月亮中心对于太阳中心的较差坐标表, 以及日月两心之间的角距离.

为了计算两次外切(即偏食的初亏与复圆)，我们用逆内插法在表中决定这距离等于日月两视半径之和的时刻；至于两次内切(全食或环食的起迄，在全食称为食既与生光)的时刻，便等于这距离对于这两个视半径之差的时刻．也很容易列出另一张表去计算每瞬间的食分，被食日轮的弦角线(即尖点的联线)的方位角与其长度等．以上数据的求得，只须根据天文年历里月亮和太阳的赤道坐标和观测站的地理坐标．

事实上，天文年历里载有每次日食的白塞耳根数，使用这些根数可以大大地便利计算的工作．我们按常用的符号将白塞耳根数解释于下．长度的单位取为地球的赤道半径，则月亮的半径将是 $k=0.272274$.

白塞耳取过地球中心 T，而与本影锥轴正交的平面为基本面 xTy(图150).

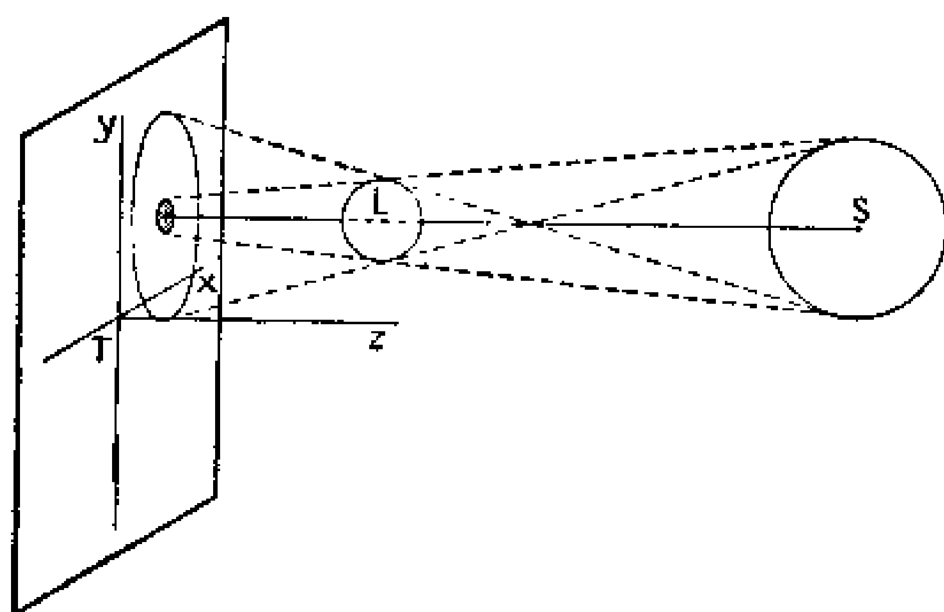
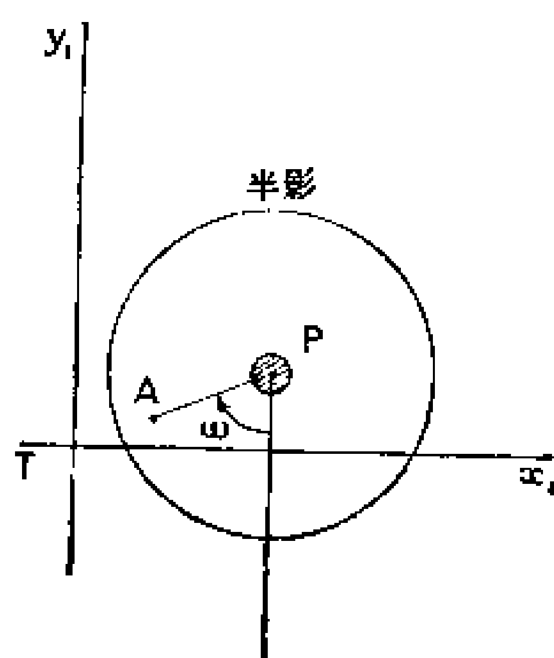


图 150

x 轴是基本面与地球赤道面的交线．y 轴与 x 轴正交，以指北的方向为正．z 轴平行于本影锥轴，以指向太阳为正．这样的三面形是顺向的，它规定了 T_z 轴的正方向，而地球的自转轴在 Tyz 面内．在这坐标系里，设 x, y 与 z 为月心 L 的坐标，则日心 S 的坐标为 x, y 与 $z+q$, q 表示 LS 之间的距离．



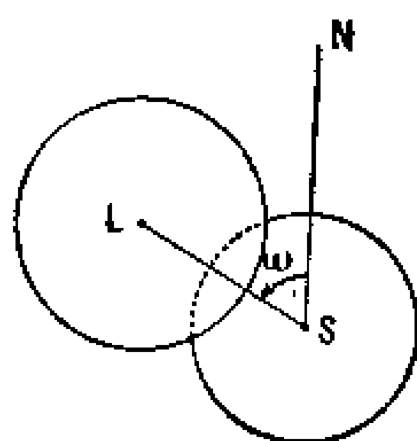


图 151

令 f_i 与 f_e 分别表示本影锥与半影锥的半顶角；按习用法，以 f_i 为负，f_e 为正．基本面上两影锥的截口是两个圆，其半径分别为 u_i 与 u_e，可用下式算出：

$$u=z\tan f+k\sec f$$

设 ξ, η, ζ 表观测站 A 对于三面形 $Txyz$ 的坐标．在由 A 点平行于基本面所作的平面上(图151)，两影锥的圆锥口共以 P 点为中心，其半径分别为 l_i 与 l_e，则

$$l=u-\zeta\tan f$$

自 A 点至两圆中心的距离 p 为下式所给出：

$$p=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

外切时，A 点在半影锥的表面上，故

$$p=l_e$$

内切时，

$$p=|l_i|$$

若 l_i 为正，则 A 点在本影锥的第一支上，日食为全食．若 l_i 为负，则 A 点在本影锥的第二支上，日食为环食．若 p 在下列两值之间：

$$|l_i|<p<l_e$$

则发生偏食．最后，当 $p=0$ 时，则发生中心食．

对于每个日食，天文年历里载有x, y, z, u_i, u_e, f_i, f_e等量每10分钟的数值. 为了计算p, 应当作出一张表列出A点在这些时刻的坐标，于是便容易计算l_i, l_e与p的数值.

为了计算ξ, η, ζ, 应当知道观测站的地理坐标和$Txyz$三面形的排列方向. 这方向由Tz轴的时角坐标而确定. 除了以上的数量之外，天文年历还载有这方向的赤纬d与其在格林尼治的时角H. 若观测站的经度以向西计算为正，则Tz对于该点的时角为$H-L$.

将观测站A表为对于另一参照系的直角坐标，这参照系是将$Txyz$坐标系绕Tz旋转，使Ty与地轴重合而得出的. 于是A点的坐标，用§18里的符号表为

$$\left.\begin{aligned}x'&=\rho\cos\varphi'\sin(H-L)\\y'&=\rho\sin\varphi'\\z'&=\rho\cos\varphi'\cos(H-L)\end{aligned}\right\}$$

为了回到原来的参照系，只须将这三面形绕T_x绕过d角:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\rho\cos\varphi'\sin(H-L)\\\eta&=\rho\sin\varphi'\cos d-\rho\cos\varphi'\sin d\cos(H-L)\\\zeta&=\rho\sin\varphi'\sin d+\rho\cos\varphi'\cos d\cos(H-L)\end{aligned}\right\}$$

据§18里的公式与附表XIV，我们可从测站的纬度与高度推出ρ与φ'. 若日食发生于地平附近，则为了计入蒙气差的效应，须对ρ加以§79里的高度改正. 这一改正值的求得是将ρ乘以由下表取出作为月亮的天顶距的函数的因数:

天顶距	因　数	天顶距	因　数
70°	1.00000	88°	1.00011
80	1.00001	89	19
85	4	89.5	24
86	5	90	1.00035
87	7		

据与月亮的天顶距的余弦相差不远的ζ的数值，不须特殊计算便可判断这改正值是否必需. 如认为有必要时，可根据以上的公式计算ξ, η, ζ, 然后乘以蒙气差因数.

设Tx_1y_1(图151左)为过A点平行于基本面的平面，并设P为本影锥轴与这平面的交点. P便是本影圈和半影圈的中心，其半径分别为l_i与l_e(l_i的符号随情形而异). 设以ω表示PA与Ty_1的负方向之间的角. 这是月心对于日心在观测者A眼里的方位角(图151右)，按习惯从北点起算. 因此两个外切点(初亏与复圆)的方位角，从北点计算到日面的边缘，等于与之对应的ω角的数值. 同样对于环食可以计算两个内切点的方位角. 至于全食的两个内切点(食既与生光)的方位角之求得，当在ω上加180°. 总之，在一切情形，

$$\tan\omega=\frac{x-\xi}{y-\eta}$$

若A点在半影圈上($p=l_e$)，则食分为零; 若A在本影圈上($p=|l_i|$)，则食分为1在任一瞬间，食分

$$g=\frac{l_e-p}{l_e-l_i}$$

这是 TSL 面上太阳的直径被食的分数．这公式也规定了全食或环食期间的食分．在全食期内，g 总是大于 1；环食期内，g 总是小于 1．对于一给定地点，日食的重要性常表现在 g 的数值上．

总之，为了用白塞耳根数计算日食，我们先写出一张表，以载下列各量每 10 分钟的数值：

$$x-\xi,\qquad y-\eta,\qquad z-\zeta$$

$$p,\qquad l_e-p;\qquad \text{有时 } |l_i|-p,\ l_e-l_i$$

$$\omega,\qquad g$$

用逆内插法在这张表内去决定对应于 l_e-p 为零的条件发生的时刻．若所讨论的地点在中心食(全食或环食)带内，我们还须由对应于 $|l_i|-p$ 为零的条件，去计算两内切(食既与生光)的时刻．这些切点的方位角，可由 ω 数字表的内插而求得；在这样求得的数值上加 180°，便得全食时的两次内切的方位角．最大时分大约等于 p 的极小值．

了解任一瞬间太阳和月亮由地面看的半径对于日食的计算是有用的．太阳的地面视半径很接近于从天文年历里所取出的数值．至于月亮的地面视半径可由下式算出之：

$$\sin s'=\frac{k}{\sqrt{(z-\zeta)^2+p^2}}$$

法国天文年历里所列出的公式，可以略述于此：令 t_0 表示一切点(食相)附近的时刻，$t_0+\tau$ 为该食相发生的时刻．先计算 t_0 时本影中心的坐标 x_0y_0 和测站的坐标 $\xi_0\eta_0$，以及这些量的导数．该食相发生时，便有下列的很近似的关系式：

$$l^2=[(x_0-\xi_0)+\tau(x_0'-\xi_0')]^2+[(y_0-\eta_0)+\tau(y_0'-\eta_0')]^2$$

使用三角学的方法去解这个含 τ 的二次方程式，可得 τ 的两个根；若要的是外切，则取绝对值较小的一根，另一根是与同类的切点对应的数值．对于这第二切点，我们应该根据比较更近似的 t_0 的数值，再去计算一次．至于两内切相距的时间相当短暂，方程式的两个根一般是可以用的．天文年历里日食界限图上所提供的初亏与复圆的时刻 t_0，是足够使用的近似值．

数字的例子

计算 1939 年 4 月 19 日在斯特拉斯堡所见的日食的情况*．

$$L=-7°46'.1$$

$$\rho\cos\varphi'=0.66280$$

$$\rho\sin\varphi'=0.74631$$

据日食界限图，这次日食在斯特拉斯堡见偏食；初亏在 17^h30^m 与 17^h40^m 之间，食甚大约在日没之时(18^h24^m)．利用天文年历里的下列一表的数字：

t	x	y	$\log\sin a$	$\log\cos a$	H	u_e	u_i
$17^h\ 20^m$	+0.05112	+0.98623	$\bar{1}$.28186	$\bar{1}$.99190	80°11.2	0.55500	0.00904
30	13695	1.00946	28196	99190	82 41.2	55498	901
40	22277	1.03268	28205	99189	85 11.2	55495	899
50	30860	1.05590	28214	99189	87 41.3	55493	897
18 0	39444	1.07911	28223	99189	90 11.3	55491	894
10	48027	1.10232	28232	99188	92 41.3	55488	891
20	56610	1.12552	28241	99188	95 11.4	55486	889

* 我国天文年历里载有我国地区见食情况的实际例子，读者可取作参考——译者注

$$\log \tan f_e = \bar{3}.66789 \qquad \log \tan f_i = \bar{3}.66572$$

现在计算观测地点的坐标. 一个补助的计算提供应乘在 ξ, η, ζ 上的因数，以期计入蒙气差的改正. 下表内的坐标已经经过了这个改正.

H–L	sin(H–L)	cos(H–L)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	蒙气差因数	ξ	η	ζ
87°57′.3	+0.99936	+0.03568	0.19136	0.98152	1.00001	+0.66238	+0.72800	+0.16602
90 27.3	0.99997	−0.00794	19141	98151	2	66279	73354	13768
92 57.3	0.99867	0.05155	19145	98151	2	66193	73907	10934
95 27.4	0.99547	0.09510	19149	98150	3	65982	74459	08104
97 57.4	0.99037	0.13842	19152	98150	5	65645	75011	05288
100 27.4	0.98339	0.18149	19156	98149	11	65187	75562	+0.02489
102 57.5	+0.97454	−0.22424	19160	98148	23	64608	76111	−0.00289

还须计算 l_e 与 l_i. 因

$$\tan f_e = 0.00465 \qquad \tan f_i = -0.00463$$

	$\zeta \tan f$	l_e	l_i	$l_e - l_i$
$17^h\ 20^m$	±0.00077	0.55423	−0.00827	0.56250
30	64	55434	837	56271
40	51	55444	848	56292
50	38	55455	859	56314
18 0	25	55466	869	56335
10	±0.00012	55476	879	56355
20	∓0.00001	55487	890	56377

然后先算 $x-\xi$, $y-\eta$ 之差；再算 ω 与 g:

	$x-\xi$	$y-\eta$	$\tan\omega$	ω	P	$l_e - P$	g
$17^h\ 20^m$	−0.61126	+0.25823	−2.3671	292°54′	0.66357	−0.10934	—
30	52584	27592	1.9058	297 41	59383	−0.03949	—
40	43916	29361	1.4957	303 46	52827	+0.02617	0.046
50	35122	31131	1.1282	311 33	46933	+0.08522	0.151
18 0	26201	32900	0.7964	321 28	42058	+0.13408	0.238
10	17160	34670	0.4949	333 40	38684	+0.16792	0.298
20	07998	36441	0.2194	347 38	37308	+0.18179	0.322

初亏发生在 17^h35^m 与 17^h36^m 之间. 对于这两个时刻，在上表内作内插，求得(考虑了二次差):

	$x-\xi$	$y-\eta$	$\tan\omega$	ω	p	l_e	$l_e - p$
$17^h\ 35^m$	−0.48266	+0.28476	−1.6950	300°32′	0.56040	0.55439	−0.00601
36	47398	28653	−1.6542	301° 9′	55386	55440	+0.00054

在这表内作线性内插，求得初亏的时刻为

$$17^h35^m55^s.1$$

方位角为
$$\omega = 301°5'$$

为了确定食甚是否在日落前可以看见(由日食界限图上不能确定这一食相)，先计算对应于 p 的极小值的时刻. 将 τ 从 18^h20^m 起以分为单位计算，因为 τ 是小量，故可以设

$$x-\xi = -0.07998 + 0.00922\tau$$
$$y-\eta = +0.36441 + 0.00177\tau$$

与 p 的极小值对应的时刻，可由下列含 τ 的方程式算出：

$$\frac{x-\xi}{y-\eta}=-\frac{177}{922}$$

由是算出 $\tau=+1^m.05$

食甚与极大食分出现的时刻极为接近，因此在 $18^h21^m3^s$，即在日落以前不久可以看见食甚。于是

$$x-\xi=-0.07034$$
$$y-\eta=+0.36626$$
$$p=0.37295$$
$$l_e-p=0.18193$$
$$l_e-l_i=0.56379$$
$$g=0.323$$

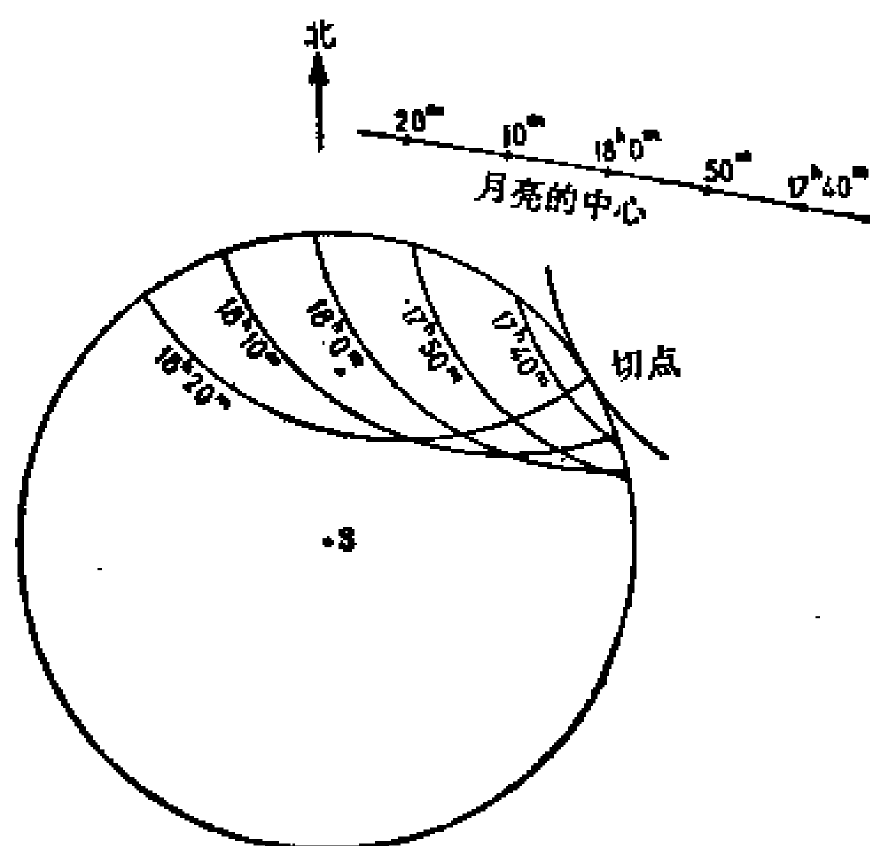


图 152

容易看出在一给定时刻月亮与太阳两体的地面视直径之比，为下列的近似关系式所规定：

$$\frac{l_e+l_i}{l_e-l_i}=1+\frac{2l_i}{l_e-l_i}$$

在 1939 年 4 月 19 日的日全食期中，平均

$$\frac{l_e+l_i}{l_e-l_i}=0.969$$

这一数据与对 ω 和 g 所得的数值联系，可以绘出图 152，即每 10 分钟内日食的情况和与月面中心的对应位置。

§132 日食界限图

天文年历里载有每次日食地面各处见食情况图或月影经过地面图。为了帮助读者了解并使用这幅图，我们作如下的解说。

由于中心食在地面的一带很狭窄，故应当精密地绘制。对于偏食近似的方法已能满足需要。但欲将结果加以改进，须作第二次近似计算。

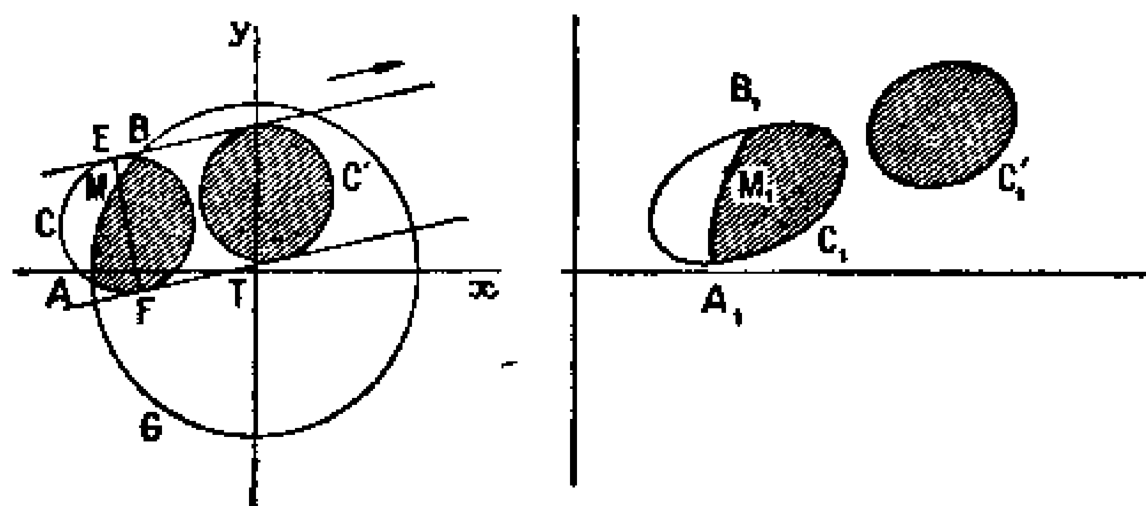


图 153

在基本面上绘出本影的草图(地球的扁率与蒙气差校正一概略而不计)，并以基本面上的半影 C 为底圆的旋转圆柱去代替半影锥(图 153 左)。每一瞬间地球向着太阳的部分大致和地球与基本面相交的大圆 G 所界限的半球相同。将 G 圆的半径取为单位。半影圈的半径便是 u_e。以 C 为底的圆柱和地面的交线沿着 C 正交地投射在基本面上，它在地图上的投影便是曲线 C_1(图 153 右)。应分两种情形讨论于下：

(1) C 与 G 两圆相割的情形。在一给定的瞬间，地上见偏食的区域 C_1 为两段弧所

围成：即 C 圆的一段弧的投影 C_1 和 G 圆的 AB 弧的投影 A_1B_1 所范围的区域.

(2) C 在 G 内的情形(即右图内的曲线 C'). 圆柱与地球的交线分为两条闭合曲线，其中之一即属于被照明的半球的一条，适合于本问题. 它在地图上的投影为 C'_1.

地面上能见偏食之处皆在曲线 C_1 的包线之内. 决定这包线之时应计入本影在基本面上的移动与地球的自转. 不应忘记，G 在地图上的投影是移动的，虽然它和两纬度圈的投影总是相切的.

整个日食的开始与结束发生在 C 与 G 两圆外切之时. 设 x 与 y 为这时本影中心的坐标，则

$$x^2+y^2=(1+u_e)^2$$

这方程可用逐渐逼近法去解，便可求得 C 与 G 两圆接触的时刻. 于是接触点的坐标 ξ, η 可由下列两式求得之：

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y} \qquad \xi^2+\eta^2=1$$

再和 $\zeta=0$ 相联系，便得整个日食开始与结束发生的地理位置.

现在讨论食相是 C 与 G 相割的情形；并设这两圆的交点 A 与 B 位于地轴在基本面上的投影的一边，而且在日出之时. A 点的观测者这时看见的食相是复圆，即本影 C 离开这一点向东而去. 反之，B 点的观测者看见日出时初亏，日食将继续发展. 假设 C 圆的半径不变，并设其中心在基本面内作匀速直线运动(这两个假设是与事实相近的). 在这些条件下，C 在 E, F 两点和两纬度圈相切. 对于坐标轴为固定的观测者，看见食甚与极大食分 g 之际，便是直径 EF 经过他所在地之时. 一般地说，对于为地球自转所带动的观测者，情形不是这样的，因为他的速度在平行于基本面上的分量并不与本影中心的速度平行，于是极短距离与经过直径 EF 的时刻并不相合. 可是这分量在 G 圆上是可以忽略的，因此可以假定食甚发生于 EF 与 G 圆相交之点 M. 所以在 M 点的观测者于日出时看见食甚.

考虑到本影在基本面上的移动和地球的自转，我们可以在地图上绘出 B, M 与 A 三点. 这样便可给出以下的三种曲线：

曲线 1：日出时初亏；曲线 2：日出时食甚；曲线 3：日出时复圆. 同样可以绘出日落时的食相曲线：

曲线 4：日落时复圆；曲线 5：日落时食甚；曲线 6：日落时初亏.

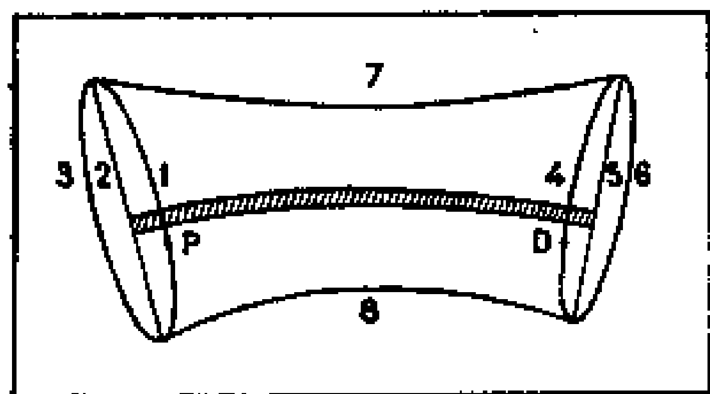


图 154

整个日食的初亏发生于曲线 1 上的 P 点，面复圆发生于曲线 4 上的 D 点.

为了完全规定见食区域，还须绘出日食的南北两个界限. 在整个日食的食甚之际，半影圆 C 在地球轮廓 G 之内，曲线 C_1 的包线便分解为 7 与 8 两条(图 154)，它们与 E 和 F 的轨迹相当接近. 这便是要寻找的南北两个界限. 若要将它们描绘在地图上，应用逐渐逼近法，对各时刻去解下列的联立方程式：

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=l_e^2$$

$$(x-\xi)(x'-\xi')+(y-\eta)(y'-\eta')=0$$

第一方程表示距离 p（见上节）等于半影的半径，第二方程表示 p 对于坐标 ξ, η 是极小值.

设 C 与 G 两圆在任何时总是相割的，7, 8 两曲线中只有一条，与 1, 3, 4, 6 等弧组成一条有二重点的曲线，这曲线与南北界限便划出了见食区的范围. 还须在这些界限上加入地面纬度圈的弧 9, 它与 G 在地图上的投影总是相切的. 按地极 P 是否在见食区之内，这段 9 对于二重点的位置有两种不同的方式(图 155). 若极点在食区之外，则弧 9 组成食区的界限. 这段弧与 3, 6 两弧之间有一狭窄的区域，那里太阳带食而出与落，区内只能见食甚. 若极点在食区之内，则弧 9 不是一条界限. 9 与 3, 6 两弧之间仍组成一个狭窄的区域，那里太阳带食而落，带食而出，食甚发生于夜里，故不能见. 到底这些近极地区里的食相的观测是有问题的.

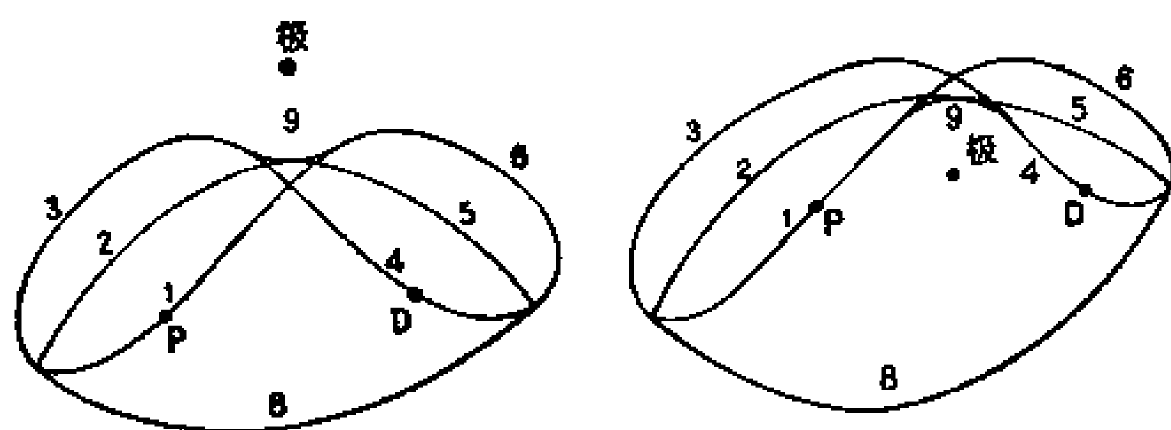


图 155

全食或环食的南北界限可用以上的方程去求出，只须将 l_i 代 l_e. 中心线便是同时合于：

$$\xi=x \qquad \eta=y$$

两条件之点的轨迹. 中心线终止于其与 2, 5 两线的交点之处. 在大尺度的地图上可以绘出 1, 3, 4, 6 等弧，即连接日出、日落时全食(或环食)初亏或复圆的地区的曲线. 在小尺度的地图上，它们便和 2, 5 两曲线分辨不清.

我们从我国天文年历里取出的 1974 年 6 月 20 日和 1975 年 11 月 3 日的两幅日食界限图(图 156 与 157)*. 除了以上所说的作为界限的曲线之外，图上还绘有每小时的半影轮廓，即曲线 C_1 点线是偏食的同时初亏线，虚线是同时复圆线. 食区内一地的初亏与复圆的时刻可于图中加以大略的估计，以为上节所讲的详细计算之用.

观测处与南北界限和中心线的相对位置，可以为该处见食的食分提供一个近似值；但日食只是偏食的情形，在图上去作这样的估计，是有相当困难的. 在这情形下，我们可以利用等食分线，这些线的描绘是以 $l_e-g(l_e-l_i)$ 代 l_e, 去解以上两个方程式所求出之点.

一般言之，中心食的绝对极大食分在中心线上的某一点，所谓中心线即地面与本影锥轴的交点的轨迹. 若没有中心线（偏食或掠地面而过的全食或环食)，则极大的食分在日出或日落见食甚之点的轨迹上，即 2 或 5 曲线上的某一点处. 这可从割线 FM(图 153)的极大值而决定之. 读者可参考法国天文年历里 1950 年 3 月 18 日非中心的日环食的数据**.

* 我国紫金山天文台编的《中国天文年历》，绘有当年的可见日食界限图，读者可随时注意参阅——译者注

** 并可参看 1957 年中国天文年历 4 月 30 日非中心日环食的数据——译者注

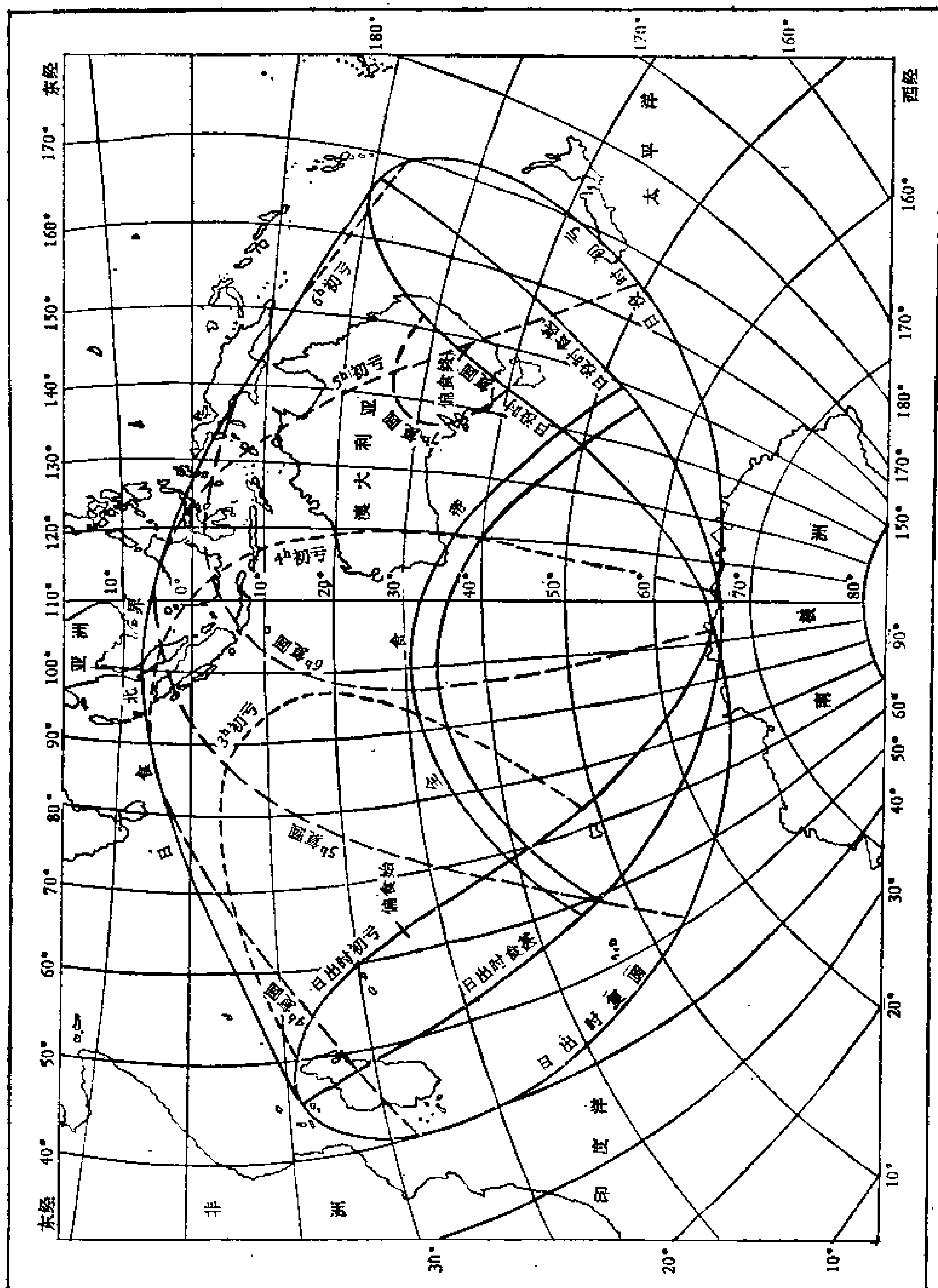


图 156　1974 年 6 月 20 日日全食图*

* 图 156，157 选自“1974 年中国天文年历”和“1975 年中国天文年历”——译者注

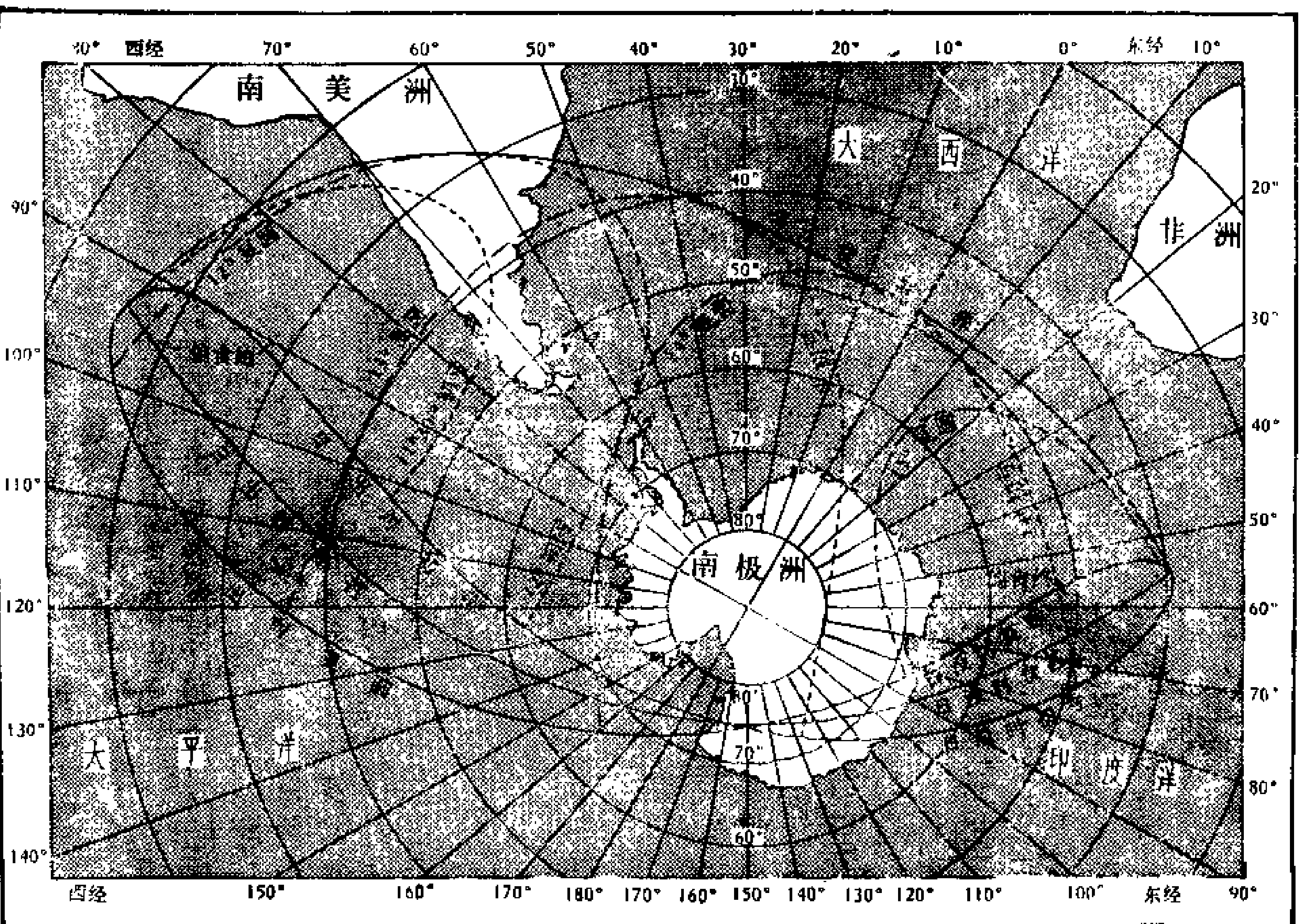


图157 1975年11月3日日偏食图

§133 日食的继续与循环

日食的条件与月食的条件大约相同，因而不须在此重新讨论日食继续出现的规则．一般地说，每隔6个朔望月(很少是5个月，更少是1个月)发生日食一次．

隔6个月出现的日食形成短期系，与以上所说的月食的短期系类似．这些系里至多包含9次日食；最长经历4年．最常见的系是开始于北半球高纬度处的偏食，若这些食是发生在升交点的话；若发生在降交点，则出现于南半球高纬度处．这一系食也是同样地结束，但在相反的半球上；这一系的中间出现中心食，即全食或环食．

同系的日食发生处的交点轮次更换，这也是显著不规则的原因．1928年5月19日的日全食开始了一个短期系，跟着出现的是11月12日的偏食．前者是近地食，后者是远地食．5月19日本影并没有整个落在地面上，甚至不是中心食．因此这是一个极限的情形．

就一般的规则说，只有偏食才每隔5个月或1个月出现一次．这里，1928年5月19日的日食，也作为一个例外而出现．这以前的一次，相隔5个月，发生于1927年12月19日，是日偏食；其后一次发生于1928年6月17日，也是偏食，食分异常之小(0.04)[1]．

短期系里的食发生的日期逐年提早约11日．这可于本节结尾的一张表去核验的．

如在讨论月食的情形那样，我们计算一个沙罗周里日食的近似数目．据奥波泽尔的《食典》统计，这数目平均是42.8，其中15.1是偏食，11.9是环食，1.9是环全食．但总数可能是39至47之间的任何一个数字．下表载一个多食和一个少食的系里各种时期的分布：

	1953—1971		1977—1995
6月期的	24	6月期的	32
5月期的	14	5月期的	6
1月期的	9	1月期的	1
	47		39

在前一情形里，短期食多，使人想到非中心食的比例应当大些．事实上，最少日食的沙罗周有13个偏食，26个中心食；最多日食的沙罗周有19个非中心食的偏食和28个中心食．一个沙罗周里日食的数目，与月食的数目同有一个近似的周期，大约是590年．

现在研究日月食的分布情况．容易说明一次日食的前后半个月期内，可能出现一次月食；我们将这样的食当作相伴的一对．若两次日偏食，发生在连续的两个新月里，一在北半球，一在南半球，则中间的一次满月便很接近白道的交点，而造成一次准中心的月全食．下面便是一个例子：

1935年6月30日	日偏食在北半球($g=0.34$)
7月16日	月全食($g=1.76$)
7月30日	日偏食在南半球($g=0.23$)

与此相关的，若在一个月内连续出现两次半影月食，则其中间的一次太阳的中心食，便出现在赤道附近：

1) 关于这题目，参看§129的脚注．

1933年8月5日	半影月食，北边沿($g=0.24$)
8月21日	日环食
9月4日	半影月食，南边沿($g=0.67$)

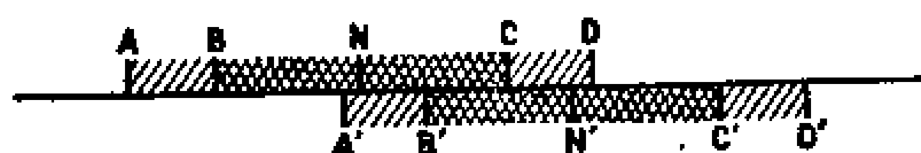


图 158

为了说明相继而来的日月食，这里绘出一幅与图147类似的图，但将时间的区间缩短一半($NN'=15^\circ\!.3$)(图158)。从图里不难发现如下的结果(可如§129里那样，用不等式去讨论)：

(1) 一次日食之后必有一次月食，至少是半影食。这是因为ND区在$A'D'$区内；或$N'A'$在AD区内。

(2) 日偏食之后必有一次本影月食(因CD在$B'C'$之内)，绝不会有一次半影食(因CD和$C'D'$或$A'B'$没有共同的区域)。

(3) 半影月食之后必有一次中心日食，但绝不会有一次日偏食(与2相关的情形)。

(4) 中心日食之后必有一次月食，可能是本影食(NC和$B'C'$的共同区域)或半影食(NC和$A'B'$的共同区域)，本影食比半影食出现的次数较多。

(5) 与之相关的，月亮的本影食之后出现一次太阳的中心食或偏食，其中中心食出现的次数较多。

(6) NB'的间距是$4^\circ\!.8$，这正是月全食的平均食限。因此太阳的中心食之后必有月全食，但这是一个例外的情形，只发生于同类型的极限处。例如，1935年12月26日的日食，作为环食出现于南极大陆，跟着于1936年1月8日出现月全食，其食分只有1.02。

由以上的研究可以得出如下的几点结论：食常在半个朔望月内，作为两个一组而出现，3个一组的较少。因此在12个朔望月组成的太阴年里，至少有4次食，即2日食与2月食；至多有6次食，即2日食4月食或4日食2月食，因为在6个月内相继而来的3个一组的食，必须有相同的结构。事实上，如上所说，每一组里中间的一次食，发生在很接近于交点之处。也容易证明一次月亮的中心食前后不可能在6个月的期间内出现一次在赤道区内出现的全食或环食。故中间的两食必然是同类的。

由于民用年比太阴年多11日，因此在一个民用年里只能有7次食，第一次须出现在年初11日之内，第七次在年终11日之内。图159表示各种可能的情形。

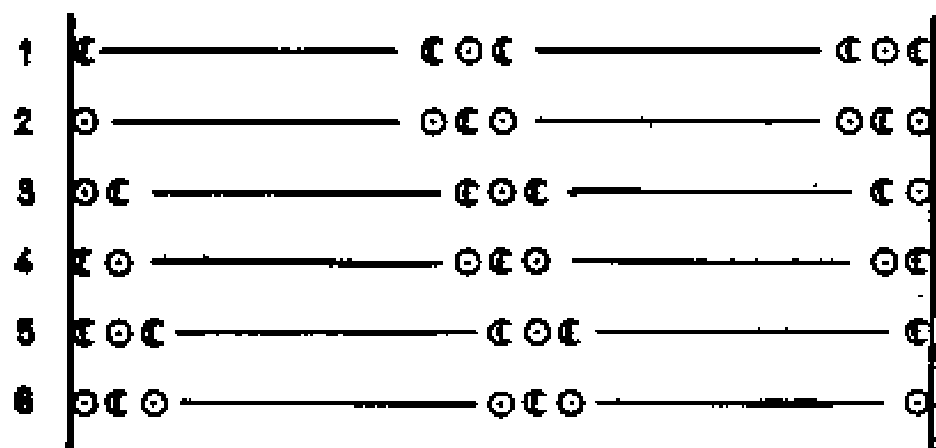


图 159

1. 这7次食可能包含两个以3为一组的食，再加上属于第三组之食一次，这一次可能出现于年初(图中1与2)或年终(5与6)。于是计算得5次月食(其中4次是半影食)和2次日食(中心食)(1与5)；或5次日食(其中4次是偏食)和2次月全食(2与6)。

2. 这7次食亦可能包含发生在年中的具有3食的一组，和两个不完全的组(3与4)。

因此造成4次月食，其中至少两次是半影食和3次日食，其中至少一次是中心食(3)；或者4次日食，其中至少2次是偏食和3次是月食，其中至少1次是月全食(4)。

下表是3与6两情形的例子：

1908年		1935年	
1月3日	日全食	1月5日	日偏食
1月18日	月半影食	1月19日	月全食
6月14日	月半影食	2月3日	日偏食
6月28日	日环食	6月30日	日偏食
7月13日	月半影食	7月16日	月全食
12月7日	月半影食	7月30日	日偏食
12月23日	日环全食	12月25日	日环食

总之，一个民用年里见食之数至少是4(2日食，2月食)，至多是7(4或5月食和3或2日食，或者反过来，月日两食之数互易)。

若将半影食一并计入月食之数字内，则在一个沙罗周内日食的长系与月食的系大约有相同的数目：平均是70次食。开始出现偏食，平均有13次，跟着是中心食，平均44次，最后再出现偏食，数目平均等于开始的偏食，但见食区移到另一半球去了。若食发生在升交点，则前者在北半球，后者在南半球见食；若食发生在降交点，则出现相反的情形。如在月食里所说过的，这些食系的演变很不相同，食时的久暂亦有相当的差异。包括1912年4月17日环-全食在内的一系食，是具有这种混合特性的食，在次数上算最多的。它开始于1389年，其中有8次偏食，跟着10次全食；自1713年以后这一系食是环食与全食。下表载最后6次食的日期，并附以见最大食分的地区：

1835年3月16日	加斯科尼湾[1]
1876年3月25日	加里福尼亚州
1894年4月6日	蒙古
1912年4月17日	葡萄牙
1930年4月28日	加里福尼亚州
1948年5月9日	朝鲜

沙罗周表为日数有一个大约是1/3的分数，因此见最大食分的地区的经度自一沙罗周到下一沙罗周，常向西移120°。故对于一个给定地点而言，食之循环的视周期应是3个沙罗周。

下表载1923—1940年间日食的日期，按短系的分布排列在两行内。我们可以根据这个表去推1941—1958年间的日食，但可能有如下所说的变化：

第一周		第二周	
1928年5月19日	非中心全食	1946年5月30日	偏食
1931年9月12日	偏食	1949年9月	无食
1932年3月7日	中心环食	1950年3月18日	非中心环食
1935年1月5日	偏食	1953年1月	无食
1939年4月19日	中心环食	1957年4月29日	非中心环食
1939年10月12日	全食	1957年10月23日	偏食

1) 在法国与西班牙交界的大西洋海边。

这样，1923—40 年的一周里将包括 43 次日食，其中 14 次偏食，14 次全食(其中 1 次不是中心食)，14 次环食；1 次环全食；1941—58 年的一周里只包括 41 次日食，其中 14 次偏食，12 次全食，14 次环食(其中 2 次不是中心食)，1 次环-全食. 另外的长系于 1942 与 1971 年结束，于是沙罗周里只有 39 次日食，直到 2011 年新系的出现.

图 160 表示自 1923—1940 年，即一个沙罗周里日月食的日期. 图中标出每年太阳与远近线(拱线)和交点线相合的日期. 这些代表相合期之点为斜行直线所连接. 不应忘记，月食发生的交点与太阳合月的另一交点是相对的. 代表日月食的符号汇聚在太阳的合点线与交点线附近. 图中容易认出近地食与远地食. 图中的解说使我们认识属于开始的或结束的长系之食. 这些标志对于决定偏食的食分在一沙罗周到次一沙罗周是增加或减少，哪些长系接近结束，以及属于新系之食出现的日期，皆是有用的.

在一切短系里前面的几次食属于结束的系，其食分由一沙罗周到次一沙罗周逐渐减少；后面的几次食属于开始的新系，其食分是逐渐增加的. 这对于日食和月食一样地适用.

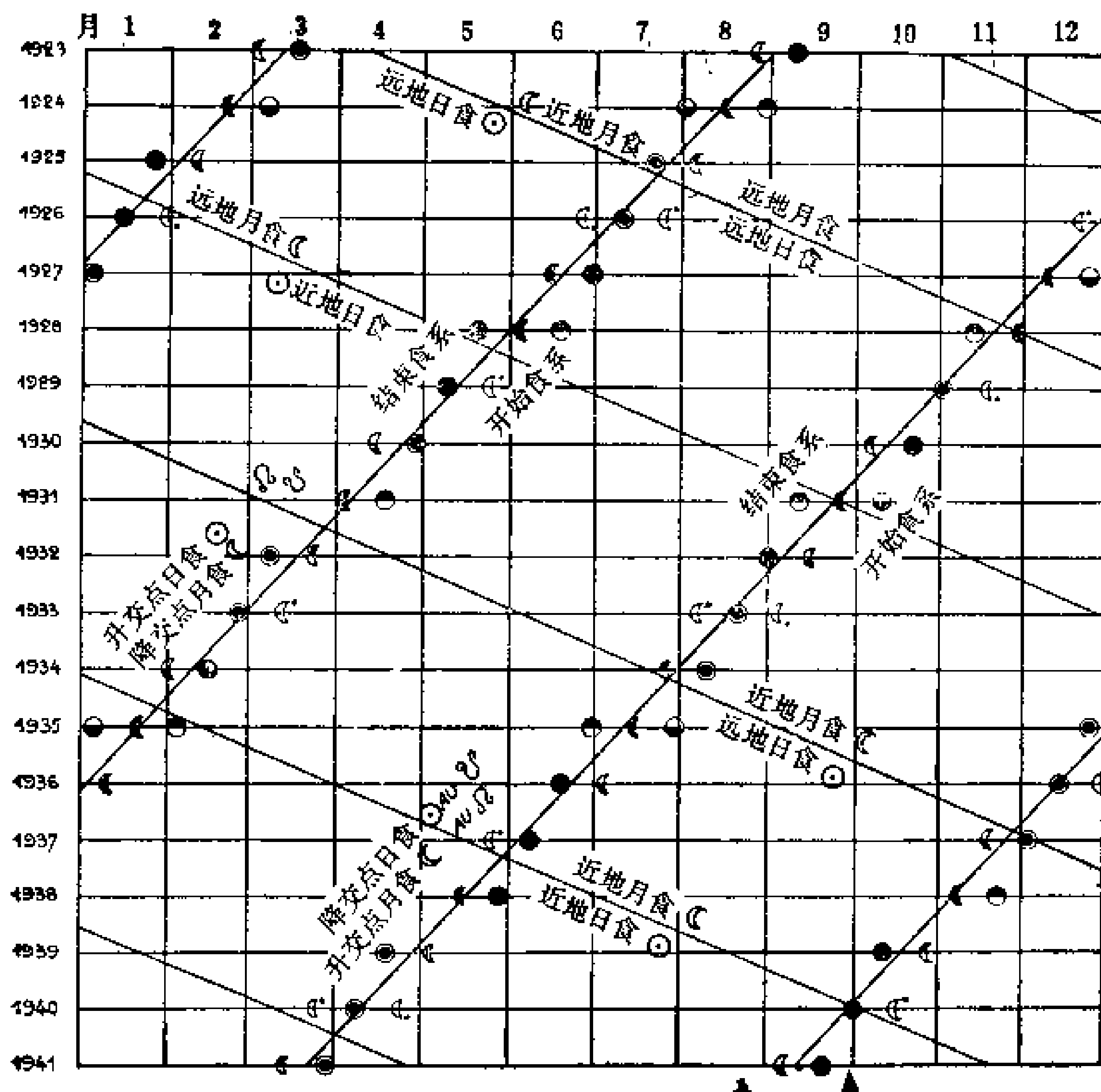


图 160　1923—1940 年一个沙罗周里的日月食图. 更加上 1941 年的食，表示 1923 年之食的重现. 对于每一民用年，水平线上表示食的日期，以及太阳与白道的交线和拱线相合的日期. 各种食以习用的符号表示. 至于太阳与交线或拱线相合之点为斜行直线所连接，交点的连线是由右向左，拱点的连线是由左向右.

图中的一切月食将再出现于下一沙罗周(1941—1958)，其中几个将改变它们的种类. 日食也是这样的，只是 1931 年 9 月 12 日与 1935 年 1 月 5 日两次日食除外不再出现，它们都是其所属的食系的最末一次.

日食：● 全食；⊙ 环食；◐ 环全食；◓◒ 偏食(北或南)

月食：☾ 全食；☾☾ 偏食(北或南)；☾˙ ☾˙ 半影食(北或南)

日　食 (1923—1940)

年	月	日		食	
1923	3	17	6朔望月	环7.8分	
	9	10	6	全3.6分	
1924	3	5	5	偏(南)0.58	
	7	31	1		偏(南0.19)
	8	30	5	偏(北)0.42	
1925	1	24	6		全2.5分
	7	30	6		环7.2分
1926	1	14	6		全4.2分
	7	9—10	6		环3.8分
1927	1	3	6		环0.9分
	6	29	6		全0.8分
	12	24	5		偏(南)0.55
1928	5	19	1	全(非中心食)	
	6	17	5		偏(北)0.04
	11	12	6	偏(北)0.81	
1929	5	9	6	全5.1分	
	11	1	6	环4.0分	
1930	4	28	6	环-全	
	10	21—22	6	全1.9分	
1931	4	17—18	5	偏(北)0.51	
	9	12	1		偏(北)0.05
	10	11	5	偏(南)0.90	
1932	3	7	6		环5.3分
	8	31	6		全1.7分
1933	2	24	6		环2.0分
	8	21	6		环2.3分
1934	2	13—14	6		全2.9分
	8	10	5		环6.6分
1935	1	5	1	偏(南)0.001	
	2	3	5		偏(北)0.74
	6	30	1	偏(北)0.34	
	7	30	5		偏(南)0.23
	12	25	6	环1.6分	
1936	6	19	6	全2.5分	
	12	13—14	6	环7.4分	
1937	6	8	6	全7.1分	
	12	2—3	6	环12.0分	
1938	5	29	6	全4.1分	
	11	21—22	5	偏(北)0.78	
1939	4	19	6		环1.9分
	10	12	6		全1.5分
1940	4	7	6		环7.5分
	10	1	6		全5.6分
1941	3	27			环7.7分

表中环食或全食后载有中心食经历的时分；偏食附有食分．相连两次食相距的时间以朔望月表示在食期后一行内．

§ 134 月 掩 星

月掩星的计算与日食的计算有其类似之点，亦有相异之处．由于星是点光源，故无半影，而本影所占的空间是与月球外切、半径为 k 的旋转圆柱．这里白塞耳的方法还是可用，但应加以很大的简化．

月掩星的两相是"掩始"，即星消逝在月面的边沿处和"复现"，即星再从月面的边沿出来．在上弦月之时，掩始差不多均发生于因灰光而可分辨的暗边沿处，等候这现象的观测者可以安全地估计星刚被掩的时刻．从阳光照亮的月面边沿出现时，除了亮星之外，常会漏掉观测．在下弦月之时，掩始发生于明亮的边沿，观测经常发生失误；从暗边沿出来时，若观测者不知道将眼光注视哪一点，亦有失掉观测的可能；换言之，若事先没有准备，当看见星时，星已从月面出来几秒钟了．

为决定月亮的位置，月掩星的观测差不多完全代替了月亮的中天观测．人们借月掩星的观测去决定历书时（七章）与月角差（八章）．一个晴明的晚上，可以观测到比 10 等亮的星几颗，若月亮经过密布的星野，可观测到几十颗之多．有些人只观测方位很确定的亮星．月掩星的观测总不免有偶然误差，这是由于月面边沿有无规的凹凸起伏，对于其平均半径的差异可达 $1''$ 至 $2''$ 或更大．月面边沿的较大起伏已经为人测出，但对局部的小变化则无法考虑进去（对于相对位置很确定的密近双星，归算其两个成员的观测时，也会发现这种困难）．只有借多颗星的观测，面且其中须包括暗星，并均匀分布在月面边沿上，才可能使这些不规则起伏所引起的残差互相抵消．

若星从暗边沿发生掩始，观测者不须先作计算，只在望远镜里等待[1]．使用一张较大尺度的星图，例如《照相星图》(Carte du Ciel)，观测者很容易证认出他所观测的对象．

从暗边沿复现的情形是两样的．若观测者没有事先准备，当他看见一颗星忽然出现在月面边沿未知的某一点，总不免引起一点惊诧；但是如果他早知道这一点的所在，面加以仔细的守候，则复现可能和掩始一样，精确地被记录下来．作者设计的下述观测方法，曾经实验有效．先绘月亮出现的星区图，其尺度与望远镜里的焦面相相等；在一页薄纸版上，被月掩的星和月亮行径附近的另外几颗星的位置处，刺上一些圆形小孔．然后将这张纸幕放在大视野的目镜前方的焦面上，使星出现在与它们对应的孔上，观测者注视即将发生复现的圆孔，月边沿因灰光是可以被看见的．这样，一切引起惊诧的效果便被消除了．

若望远镜的装置不便使用这种设计，一般可用动丝测微器，观测者须事先算出星在月面边沿复现处的方位角，而将动丝放在该处去等候它．有许多种方法计算复现的时刻与方位角．下面要讲的方法可以使用于短时间内连续观测的若干月掩星，而且可能达得所需的精确度．

取在地心与星的方向正交的平面为基本面．坐标三面形的规定与日食的计算里相同：x 轴是基本面与地赤道的交线，z 轴指向星，y 轴与北极的方向成一锐角，面且这三面形是顺向的．设 Δ 表示月亮的地心距；α, δ 与 α', δ' 分别表示月亮与恒星的地心赤道坐标，则月心的直角坐标可以表为

1) 作者曾经观测过一千多次掩始，从未预先计算过一次．

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta\cos\delta\sin(\alpha-\alpha') \\ y &= \Delta[\cos\delta\sin\delta - \sin\delta'\cos\delta\cos(\alpha-\alpha')] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里长度的单位为地球的赤道半径. 设 P' 表示月亮的视差,则

$$\Delta = \operatorname{cosec} P'$$

另一方面，设以 T 表示地方恒星时，ρ 与 φ' 表示观测站的地心坐标(如 § 18 所规定的),则该站的直角坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= \rho\cos\varphi'\sin(T-\alpha') \\ \eta &= \rho\sin\varphi'\cos\delta' - \rho\cos\varphi'\sin\delta'\cos(T-\alpha') \end{aligned}$$

观测站与本影圆柱之轴的距离 p 可以表为

$$p = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

当

$$p = k$$

时,便发生掩始与复现.

在以上的公式里,若将 $(\alpha-\alpha')$ 与 $(T-\alpha')$ 的正弦和余弦展开，则可将 $x-\xi$ 与 $y-\eta$ 写为如下的形式:

$$\left.\begin{aligned} x-\xi &= B\cos\alpha' - A\sin\alpha' \\ y-\eta &= C\cos\delta' - A\sin\delta'\cos\alpha' - B\sin\delta'\sin\alpha' \end{aligned}\right\}$$

式内

$$\left.\begin{aligned} A &= \Delta\cos\delta\cos\alpha - \rho\cos\varphi'\cos T \\ B &= \Delta\cos\delta\sin\alpha - \rho\cos\varphi'\sin T \\ C &= \Delta\sin\delta - \rho\sin\varphi' \end{aligned}\right\}$$

A, B, C 是月亮的坐标、地方恒星时与观测者地心坐标的函数,可以对于整个观测之夜列为数字表. 一般只对预定观测的时间作出这个表,然后用它去计算 $x-\xi$ 与 $y-\eta$ 之差,以求每颗星的 p 值. 月掩星的时刻可由方程式 $p=k$ 之解而求得. 这里使用内插法比较迅速. 星和月亮边沿接触点的方位角可由下式求得:

$$\tan\chi = \frac{x-\xi}{y-\eta}$$

至于 χ 所在的象限可据 $\sin\chi$ 与 $\cos\chi$ 的符号(它们和 $x-\xi$ 与 $y-\eta$ 的符号相反)决定*.

例　1935 年 1 月 14 日午后与上半夜月亮经过昴星团，有 10 颗亮星和许多肉眼不能看见的星被月亮掩蔽. 为这个观测所作的准备: 1. 先计算 A, B, C 三个因数; 2. 每颗星接触月面的时刻与方位角. 可用 6 位三角函数表计算正弦与余弦，这些因数表示的时间间距为一个小时,然后用附录里的公式将它折半. 在巴黎:

$$L = 9^{\mathrm{m}}20^{\mathrm{s}}.93 \text{ 东}$$
$$\rho\sin\varphi' = 0.74920$$
$$\rho\cos\varphi' = 0.65948$$

从天文年历中取出下表,以备对月亮的位置和视差作内插之用:

* 这种预备工作亦可用月掩星的机械模型去完成. 格林尼治天文台制造有这样的模型为世界各地月掩星工作者提供观测预报——译者注

	α	δ	$\sin P'$
16ʰ(世界时)	$3^h36^m\ 10^s.85$	$+24°13'31''.2$	0.0163242
17	38 27.67	19 38.2	163172
18	40 44.59	25 37.1	163103
19	43 1.63	31 28.0	163034
20	45 18.78	37 11.1	162966
21	47 36.03	42 46.0	162898

再据年历中的表去计算巴黎的地方恒星时．经过一切计算之后，求得

	A	B	C
16ʰ(世界时)	+32.1430	+45.2725	+24.3869
17	31.6886	45.4072	24.4971
18	31.2756	45.5461	24.6049
19	30.9006	45.7006	24.7106
20	30.5569	45.8805	24.8141
21	30.2361	46.0936	24.9153

这表内的时间间距缩小一半以后，再开始计算每颗被掩的星．例如要决定金牛座η星(昴宿六)的掩始与复现：

$$\alpha' = 3^h43^m38^s.95 \qquad \delta' = +23°54'31''.2$$

先造下表：

	$x-\xi$	$y-\eta$	p
$18^h.0$	−0.3750	+0.1022	0.3944
18.5	− 1742	1694	2430
19.0	+ 0222	2322	2333
19.5	+ 2156	2905	3618

由简易的图解求得掩始与复现的大约时刻为：$18^h.36$ 与 $19^h.20$．为了求出更精确的数字，利用白塞耳的公式作内插，对于掩始求得

	$x-\xi$	$y-\eta$	p
$18^h.30$	−0.2539	+0.1431	0.2914
18.35	2339	1497	2777
18.40	2140	1563	2650

由内插法求得 $p=k=0.2725$ 的时刻在 $18^h.3701=18^h22^m12^s$，即掩始的时刻．此时，

$$x-\xi=-0.2259; \qquad y-\eta=+0.1524$$

$$\tan\chi=-1.4823$$

这方位角在第二象限，故

$$\chi=124°.00$$

同样可求复现的时刻与方位角：

	$x-\xi$	$y-\eta$	p
$19^h.15$	+0.0804	+0.2502	0.2628
19.20	0999	2560	2748
19.25	1192	2620	2878

这里，$p=k$ 在 $19^{h}.1904$ 或 $19^{h}11^{m}25^{s}$，于是

$$x-\xi=+0.0962; \qquad y-\eta=+0.2549$$
$$\tan\chi=+0.3774$$
$$\chi=200^{\circ}.68$$

方程式 $p=k$ 之解，以用内插法为最迅速.

对于证认被掩的星以为制备上述观测而用的屏幕，使用图解法是有帮助的(若欲知道精确的方位角，图解法不能代替计算). 先在纸上绘出月亮中心在观测者眼里的视行径并在其若干点绘上月面的轮廓，但为此须先决定其视半径；必须作出的视差改正的计算，已经详细叙述在第八章内. 若在月亮的行径上仔细地标出其中心在例如每5分钟的位置，我们可以甚至决定掩始与复现的近似时刻：将两脚规的一脚尖放在星相上，使开口等于月亮的视直径；另一脚尖放在中心行径之上，便可从图上读出掩始与复现的时刻. 这种绘图法经过一会儿摸索，便可得出适合于待寻时刻的两脚规的开口的大小. 这里使用《照相星图》也很方便，但不应忘记图上的照相星等与目视星等常有相当大的差异，可惜还没有为月掩星观测使用的载有仿视星等的大尺度星图.

从一夜或连续几夜所作的月掩星观测，可利用以改正月亮的表载位置，或者说，求出历书时与世界时之差(§ 63). 设 σ 表示基本面上本影圈的月心视半径，则

$$\sin\sigma=k\sin P' \quad (k=0.272496)$$

设 σ' 为下式所规定之角：

$$\sin\sigma'=p\sin P' \quad \left(p=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)$$

假使月面的轮廓是严格的正圆，假使布朗的月离表完全的正确，而且假使世界时与历书时绝对地相合，则 $\sigma'=\sigma$. 为了计算 p，我们从表内取出现象发生之时月亮的坐标与恒星时，这些数据都是根据世界时的尺度计算的. 将 $\sigma'-\sigma$ 的离差分析为两个成分：Δv 表示应给与月亮的表载黄经上的改正数，以便将其表为用世界时所记录的观测，$\Delta\beta$ 表示与之对应的黄纬上的改正数. 令 χ 表示月面边沿发生掩星之点的方位角；ρ 表示月亮在天球上的视运动的方位角[1)]，则

$$\tan\chi=\frac{x-\xi}{y-\eta} \qquad \tan\rho=\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta}\cos\delta$$

$\Delta\alpha$ 与 $\Delta\delta$ 表示每分钟里月亮的地心赤经与赤纬的变化，并表为相同的单位，例如角分. Δv 对于联接星月的大圆的移位角大约等于 $\chi-\rho$；$\Delta\beta$ 对于同一大圆的移位角为 $\chi-\rho+90^{\circ}$. 由射影定理得出以下的关系式：

$$\sigma'-\sigma=\Delta v\cos(\chi-\rho)-\Delta\beta\sin(\chi-\rho) \tag{2}$$

一个晚上所作的每个观测可以写成这样的一个方程式. 使用最小二乘法便可求出未知数 Δv 与 $\Delta\beta$.

在实际的计算里，我们使用下列公式去求 σ'. 令

$$x_1=x\sin P' \qquad y_1=y\sin P'$$
$$\xi_1=\xi\sin P' \qquad \eta_1=\eta\sin P'$$

但由关系式 1，

1) 这是习用的符号，不应将代表这方位角的符号 ρ，与上面所说的观测处的地心距 ρ 弄混淆.

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\cos\delta\sin(\alpha-\alpha')\\y_1&=\sin(\delta-\delta')+2\cos\delta\sin\delta'\sin^2\frac{\alpha-\alpha'}{2}\end{aligned}\right\}$$

第二式还可写为下面的近似形式：

$$y_1=\sin(\delta-\delta')+\frac{1}{2}\frac{\sin\delta'}{\cos\delta}x_1$$

因 $1-\cos\frac{\alpha-\alpha'}{2}$ 之差比较 1 所小之量是 6 阶的(即 10^{-6})．于是

$$\sigma'=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(y_1-\eta_1)^2}$$

按第一章里的规则将小角的正弦表为角秒，而且照 § 4 里的方法计算 x_1^2.

例　1931 年 12 月 20 日世界时 $19^h38^m55^s.5$，即地方恒星时 $2^h3^m41^s.7$，在斯特拉斯堡天文台观测到白羊座 27 号星的掩始写出这一观测的方程式(2)．因这个天文台的地心坐标为

$$\rho\cos\varphi'=0.66280\qquad\rho\sin\varphi'=0.74631$$

(这里，ρ 的意义与 § 18 里的相同)．

若掩星的观测靠近地平，还须将这两个乘积乘以蒙气差因数，其数字表已载于 § 131 之内；但是本问题并不须作这一种改正．

计算时须用的数据如下：

月亮(布朗表)：

$$\begin{aligned}&\alpha=2^h25^m55^s.58\\&\delta=17^\circ46'23''.47&&\cos\delta=0.95227&&\sin\delta=0.30525\\&P'=3278''.55&&\sin P'=3278''.41\\&\Delta\alpha=+1^s.9495=+29''.243\\&\Delta\delta=+11''.603\end{aligned}$$

白羊座 27 号星：

$$\begin{aligned}&\alpha'=2^h27^m8^s.50\\&\delta=+17^\circ24'23''.6&&\cos\delta'=0.95420&&\sin\delta'=0.29915\\&H=-0^h23^m26.8&&\cos H=0.99477&&\sin H=-0.10212\end{aligned}$$

按如下的次序计算：

$$\begin{aligned}\alpha-\alpha'&=-1093''.80 & \delta-\delta'&=+1319''.87\\\sin(\alpha-\alpha')&=-1093''.79 & \sin(\delta-\delta')&=+1319''.86\\\xi&=-0.06769 & \eta&=+0.51489\\x_1&=-1041''.58 & y_1&=+1320''.69\\\xi_1&=-\ \ 221''.91 & \eta_1&=+1688''.01\\\text{差数}&-\ \ 819''.67 & \text{差数}&-\ \ 367''.32\end{aligned}$$

$$\sigma'=898''.21$$

$$k\sin P'=\sigma=893''.35$$

$$\sigma'-\sigma=+4''.86$$

$$\tan\chi=2.2315\qquad\tan\rho=2.4000$$

$$\chi=65^\circ.86\qquad\rho=67^\circ.38$$

$$\chi-\rho=-1^\circ\!.52 \qquad \cos(\chi-\rho)=1.00 \qquad \sin(\chi-\rho)=-0.03$$

要寻找的方程式可以写为

$$1.00\Delta v+0.03\Delta\beta=-4''86$$

注 1．一般习惯须改正月亮的表载平黄经，来尽量减小 $\sigma'-\sigma$ 的数值．这改正在每年的数值是根据前一年月掩星观测的结果而定出的．1931 年这改正值是 $+6''\!.00$．因月亮每分钟的平均运动为 $32''\!.94$，故应将观测的时刻加上 $0^m\!.182$，或者将由年历里取出的月亮的坐标增加 $0.182\Delta\alpha$ 与 $0.182\Delta\delta$．对于本问题，由计算求得

$$\sigma'-\sigma=-0.''61$$

但应在由全部观测所推出的 Δv 之值上加 $6''$．

注 2．为作月掩星的归算，我们取月亮的半径：

$$k=0.272496$$

而不象在日月食的计算里取为 0.272274．日食时日面边沿须被月面边沿的凹凸处完全遮盖，才能算是全食；月掩星亦可能发生在月面的山峰或谷底的后面，因此应将月亮的半径取为稍大一点，峰巅与谷底之差大约是 1400 米．

月掩行星亦可以象日食那样计算，但须将行星的视差与视半径及其地心运动一并考虑进去．如果还要计算行星的扁度与位相，问题就更复杂化了．由于这现象的观测没有什么实际意义，我们便不在此详细讨论了．

有时行星或卫星也能掩着明亮的恒星．这些现象的观测可能对于行星或卫星的直径与其大气，提供有趣的资料．这种掩星的理论，容易据月掩星的理论去推阐的．

§ 135 内行星凌日 [1]

1．凌日的计算

水星与金星在太阳面上经过的现象已经在 § 88 内叙述过了．1631 年加桑迪(Gassendi)第一次观测水星凌日，以后这现象曾经被观测了十几次．勒威耶依靠这些宝贵的记录才证明水星的近日点有一种奇特的运动，最近又根据水星的运动确定了地球的自转有变化(§ 62)．至于金星凌日，于 1639 年首先为霍罗克斯(Horrocks)与克拉布特里(Crabtree)所观测，以后 1761，1769，1874 与 1882 等年，为了太阳视差的测定，许多国家派遣远征队去观测这个现象．

在一次凌日里，可以记下行星圆面与太阳圆面四次相切(即两次外切与两次内切)的时刻．第一次外切经常是观测不到的，因为行星圆面与日面外切时，完全被日光所掩没了．第四次相切时没有那样不确定，观测者看见两圆面的公弦迅速地变短．可以比较确切测定的是两次内切，但是水星凌日的观测偶然误差仍然可达几时秒之多．可见凌日远远不是象掩星那样明晰的现象．

为了决定地心所看见的两圆面相切的时刻，应当将行星对于太阳的较差赤道坐标以及行星与太阳的视半径表为时间的函数．我们要寻求的是这两个天体的中心的距离等于其半径之和或差的时刻．这里叙述一个使用内插的方法．

设 α, δ 与 α', δ' 分别表示太阳与行星的地心视坐标，P 与 P' 表示它们的视差，s 与 s' 表示它们的视半径．行星的地心较差坐标便是(§ 11)

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-y\tan\delta)\cos\delta\tan(\alpha'-\alpha) \\ y &= \delta'-\delta+x\sin\delta\tan\frac{\alpha'-\alpha}{2} \end{aligned}\right\}$$

地心所看到的两圆面相切发生于

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=s\pm s' \quad \text{（外切时取 + 号，内切时取 − 号）}$$

之时．计算者首先编制 x, y 与其一阶导数每小时的表，以及其视半径的表．最短距 d_m 发生于

$$xx'+yy'=0$$

之时．由计算容易求出 d_m，然后推算行星中心在日面所走的弦的半长度．至于凌日经历的时间之一半，可以 $\sqrt{x'^2+y'^2}$ 除这半弦的长度而求得之．由此便可推算两圆面相切的近似时刻，这些时刻较精确的数字可由其附近几个时期的 d 值而求得之．至于日面边沿上的切点的方位角容易由此推出．

设观测者的地理坐标为 L 与 φ，则行星对于他的较差坐标为

$$x+\Delta x \qquad y+\Delta y$$

更设 H' 为行星对于值的时角，δ' 为其赤纬，则(§ 69)

$$\Delta x=-\rho(P'-P)\cos\varphi'\sin H'$$

$$\Delta y=-\rho(P'-P)\left[\sin\varphi'\cos\delta'-\cos\varphi'\sin\delta'\cos H'\right]$$

设 Δt 为将地心所见的相切时刻化为地面所见的时刻应加的改正数，则 Δt 为以下方程式所给出：

$$(x+x'\Delta t+\Delta x)^2+(y+y'\Delta t+\Delta y)^2=(s'\pm s)^2=x^2+y^2$$

若将含增量的平方项略去，则

$$\Delta t=-\frac{x\Delta x+y\Delta y}{xx'+yy'} \tag{1}$$

介入偏心纬度 u(§ 18)：

$$\rho\cos\varphi'=\cos u \qquad \rho\sin\varphi'=(1-\varepsilon)\sin u$$

$$\tan u=(1-\varepsilon)\tan\varphi \qquad (\varepsilon=1/297)$$

并设

$$A=\frac{y(1-\varepsilon)(P'-P)\cos\delta'}{xx'+yy'}$$

$$B\cos\omega_1=-\frac{y(P'-P)\sin\delta'}{xx'+yy'}$$

$$B\sin\omega_1=\frac{x(P'-P)}{xx'+yy'}$$

B 的符号肯定后便可决定 ω_1 角．再设

$$\omega=H_1'-\omega_1$$

H_1' 是相切时行星在格林尼治的时角．于是(1)式可以写为

$$\Delta t=A\sin u+B\cos u\cos(\omega-L)$$

这式可用以计算由地面看的相切时刻；反之，亦可用以将观测改为地心所看见的情形，以便和理论比较．

例 计算 1940 年 11 月 11—12 日水星凌日的相切时刻．从纽康表取出如下的数据：

太　　阳

	α	δ	s	P
11 月 11 日 18^h	$226°45'22''.0$	$-17°31'52''.1$	$969''.66$	$8''.89$
21	226 52 58.8	17 33 55.3	969.69	8.89
12　0	227 0 35.8	17 35 58.3	969.72	8.89
3	227 8 13.1	17 38 1.0	969.75	8.89

水　　星

			s'	P'
11 月 11 日 18^h	$227°18'24''.9$	$-17°39'13''.6$	$4''.94$	$13''.02$
21	227 8 59.8	17 34 1.5	4.94	13.02
12　0	226 59 35.5	17 28 49.2	4.94	13.01
3	226 50 12.3	17 23 36.9	4.94	13.01

使用以上的公式，先编制较差坐标 x 与 y 的表：

	x	y
11 月 11 日 18^h	$+1889''.56$	$-442''.23$
21	+ 916.19	− 6.84
12　0	− 57.52	+429.10
3	−1031.39	+863.28

用这表作内插，得 x, y 每小时之值，并算出导数 x' 与 y'，时间的单位是小时(见附录里求导数的公式)，然后再算补助量 $xx'+yy'$ 与 $\sqrt{x'^2+y'^2}$

	x	x'	y	y'	$xx'+yy'$	$\sqrt{x'^2+y'^2}$
11 月 11 日 20^h	$+1240''.7$	$-324''.5$	$-152''.5$	$-105''.7$	−4248	$355''.7$
21	+ 916.2	324.5	− 6.8	145.6	−2983	355.7
22	+ 591.7	324.6	+138.7	145.4	−1719	355.7
23	+ 267.1	324.6	+284.0	145.2	− 455	355.6
12 日　0	− 57.5	324.6	+429.1	145.1	+ 809	355.5
1	− 382.1	324.6	+574.0	144.9	+2071	355.4
2	− 706.8	324.6	+718.8	144.6	+3335	355.4

表内第 6 行给出 $xx'+yy'$ 被 100 除后的数值，x, x', y, y' 均表为角秒. 由线性内插法求得 $xx'+yy'$ 在

$$23^h.3600=23^h21^m36^s$$

之时为零，即在地心看见的两心距离最短的时刻. 于是

$$\left.\begin{array}{l} x=+150''.2 \\ y=+336''.2 \end{array}\right\} d_m=368''.2=6'8''.2$$

再计算在地心所看见的这个现象. 因太阳的视半径为 $969''.7$，水星的中心所走的弦的半长度便等于

$$\sqrt{969.7^2-368.2^2}=897''$$

因水星的速度为每时 $355''.6$，故水星凌日所经历的时间之半为 $2^h.523$；因此凌始约在 11 日 $20^h.84$，凌终约在 12 日 $1^h.88$. 为了寻求更精确的数字，计算 $20^h.80$ 与 $20^h.85$ 的 x 与 y：

	x	y	d
$20^h.80$	$+981''.1$	$-35''.9$	$981''.8$
85	$+964.9$	-28.7	965.3

在这两个时刻，$s+s'=974''.63$，$s-s'=964''.75$. 在表中作 d 的线性内插，可以求得相切的时刻，并顺便算出方位角 χ:

		x	y	χ
第一次切:	$20^h.8217=20^h49^m18^s$	$+974''.1$	$-32''.8$	$91^\circ.93$
第二次切	$20^h.8517=20^h51^m6^s$	$+964''.4$	$-28''.5$	$91^\circ.69$

因 $\tan\chi=x:y$，其所在的象限由 x 与 y 的符号决定. 同样对于水星出日面:

	x	y	d
$1^h.85$	$-657''.9$	$+697''.1$	$958''.6$
.90	-674.2	$+704''.3$	975.0

又 $s+s'=974''.68$，$s-s'=964''.80$. 由内插法求得:

		x	y	χ
第三次切:	$1^h.8689=1^h52^m8^s$	$-664''.1$	$+699''.8$	$316^\circ.50$
第四次切:	$1^h.8990=1^h53^m56^s$	$-673''.9$	$+704''.2$	$316^\circ.26$

这样便完全定出了从地心所看见的这现象的过程. 图 161 是以较差赤道坐标表示的水星在日面所坐的视行径.

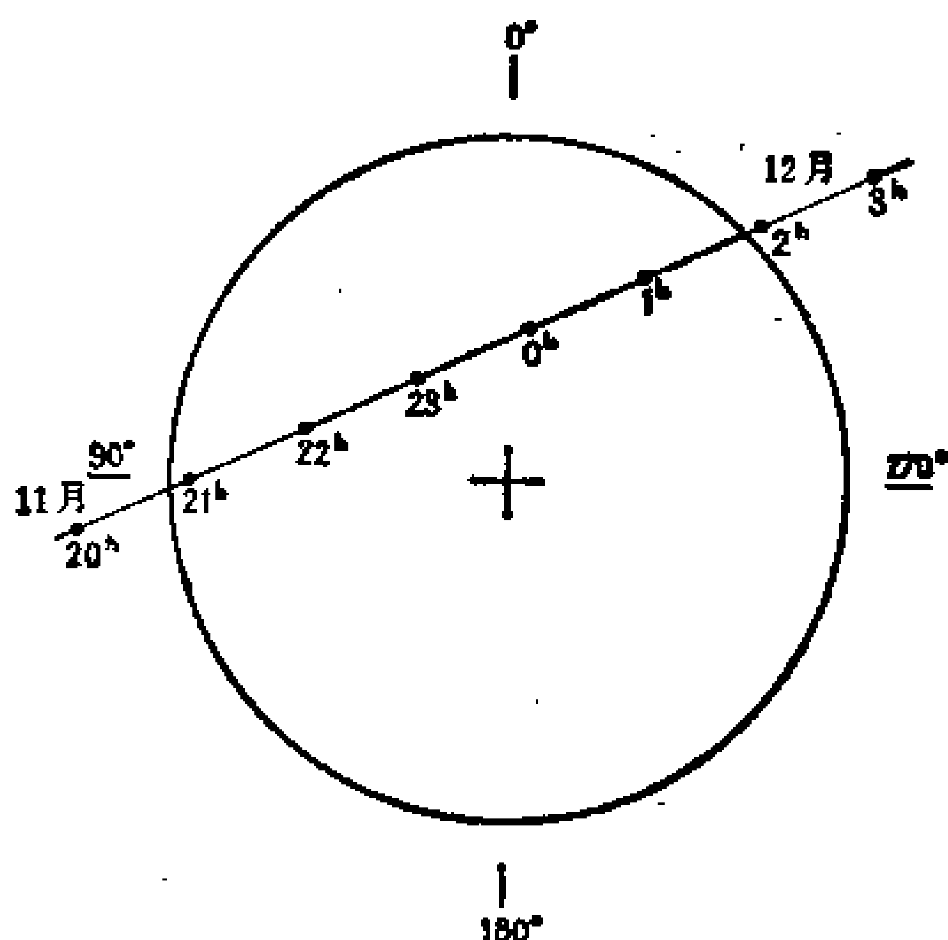


图 161

剩下的是计算视差的改正值. 在进入日面时可取 $P'-P=4''.12$，出去时可取 $4''.10$. 由于改正值是对每时秒而定的，故以上 x' 与 y' 的数值应以 3600 除之.

切次	A	$B\cos\omega_1$	$B\sin\omega_1$	B	ω_1	ω
1	$+1^s.43$	$+0^s.46$	$-45^s.02$	$-45^s.02$	$90^\circ.58$	$+45^\circ.42$
2	$+1.26$	$+0.40$	-45.11	-45.11	90.51	$+45.94$
3	$+31.00$	-9.76	-30.94	$+32.44$	287.51	-75.32
4	$+30.82$	-9.70	-31.03	$+32.51$	287.37	-74.73

因此利用下列的公式，可以计算地面看见的相切时刻：

1	11 月	$11^{\text{日}}20^{h}49^{m}18^{s}+1^{s}.4\sin u-45^{s}.0\cos u\cos(L-45^{\circ}.42)$
2	11 月	$11^{\text{日}}20^{h}51^{m}6^{s}+1^{s}.3\sin u-45^{s}.1\cos u\cos(L-45^{\circ}.94)$
3	11 月	$12^{\text{日}}1^{h}52^{m}8^{s}+31^{s}.0\sin u+32^{s}.4\cos u\cos(L+75^{\circ}.32)$
4	11 月	$12^{\text{日}}1^{h}53^{m}56^{s}+30^{s}.8\sin u+32^{s}.5\cos u\cos(L+74^{\circ}.73)$

$$\tan u=0.9966\tan\varphi$$

这里，经度的计算以向西为正.

水星凌日开始时，地面看见其发生于天顶之处的地理坐标为

$$L=H_1'=136^{\circ}.2 \text{ 西经} \qquad \varphi=\delta'=-17^{\circ}.6$$

于是我们可以肯定首两次相切，在以这一点为极的半球上可以看见．同样，水星出日面时，在以

$$L=147^{\circ}.6 \text{ 东经} \qquad \varphi=-17^{\circ}.4$$

之点为极的半球上可以看见．在地球的平面图上(图 162)作为水星出入日面可见区的界限是这两个大圆的投影，它们将地图分为 6 个区域：

1．1 区内可见全部凌日现象；

2．2 区内只见进入日面，水星落下地平时还在日面上；

3．3 区内只见水星从日面出来，出地平时它已经在日面上了；

4．4 区内可见水星出入于日面，但不能见凌甚；

5．5 区内水星出入日面均不能见，只见凌甚；

6．6 区内完全看不见凌日现象．

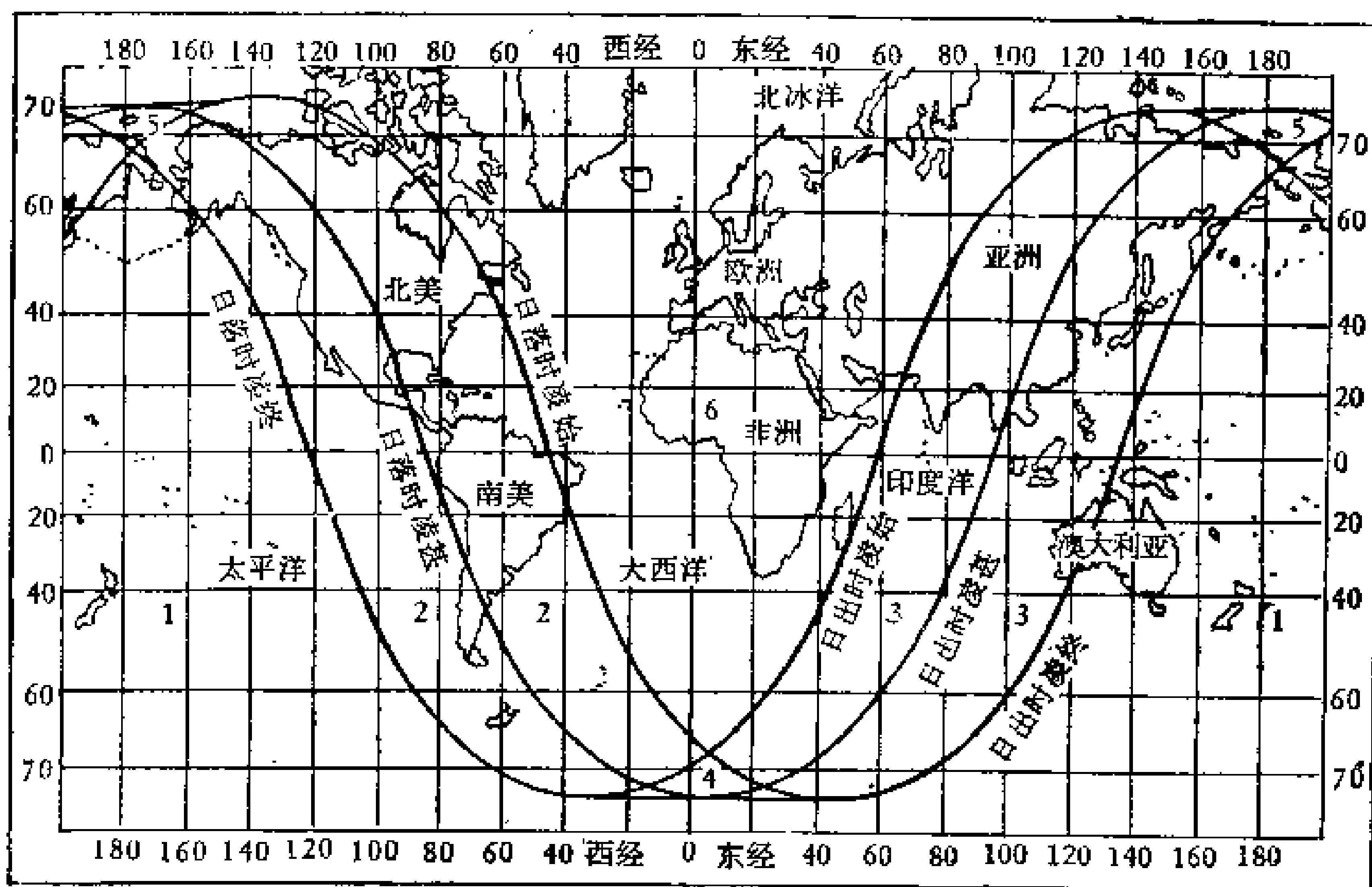


图 162

4 和 5 两区的界限分别是南北两纬圈上与地上照明圈相切的两段弧．日落或日出时见凌始、凌甚与凌终的地区，皆分别以曲线绘于图上．由图可见，这一次水星凌日，见到全

部现象的有：大洋洲东部、新西兰与大部分太平洋群岛；见其一部分的有：南北美洲、大部分亚洲、巽他群岛与大洋洲西部；至于欧洲、非洲，近来各地与西伯利亚西半部，均看不到凌日.

§136　内行星凌日 2

2. 一般情况的研究

在确定水星和金星出现凌日的条件与其继续出现的规则以前，我们先仔细研究水星凌日的情况，至于金星凌日因其罕见，只简略地叙述于后.

水星升交点的黄经现在是 47°.74；太阳于 11 月 10—11 日过这一点，并于 5 月 8—9 日过其降交点. 因此水星凌日必然发生于这两个日期. 试计算对于这两个日期的最大离差. 交点黄经的长期变化使这两个日期逐渐推迟，每世纪约一天多.

设 L_m, Ω_m, ω_m 分别表示水星本身、其升交点与近日点三者的平黄经；L_t, ω_t 表示地球与其近日点的平黄经. 略去二阶项，则据纽康的研究有

$$L_m-\Omega_m=135°7'31''.71+538\,102\,388''.05t$$

$$L_t-\Omega_m=53°32'10''.85+129\,598\,501''.38t$$

这里时间 t 是以儒略世纪，从 1900 年 11 月 1 日正午(世界时)开始计算. 我们从这两式推出水星的交点周 D 和地球对于水星交点运动的周期 T:

$$D=87.969\,131\,97\ 日$$

$$T=365.254\,223\,60\ 日$$

但这不是这两个行星复回到其一交点的真周期，因为它们的近日点是移动的，偏心率是变化的. 以 v 表示行星或地球与升交点相合时所对应的真近点角，则与降交点对应的真近点角为 $180°+v$.

$$v_m=\Omega_m-\omega_m=331°14'46''.46-1333''.01t$$

$$v_t=\Omega_m-\omega_t=306°55'30''.35-1922''.28t$$

$$e_m=0.20561421+4''.22t$$

$$e_t=0.01675104-8''.62t$$

当 D 或 T 完成一个周期之后，真近点角与偏心率所发生之变化为

$$dv_m=-3''.2105 \qquad de_m=+0''.0102$$

$$dv_t=-19''.2230 \qquad de_t=-0''.0862$$

试决定这些变化在 D 与 T 之值上的效应.

(1) 当真近点角变化时，设偏心率不变，则在中心差上的对应变化为面积定律所给出：

$$d(v-M)=\left(1-\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\right)dv$$

M, r 与 a 分别表示平近点角，向径与半长轴. 当 v 增加 360° 时，M 只增加

$$360°-d(v-M),$$

而周期减少了 $d(v-M):n$，n 表示平均运动. 因此得出的改正数，对于两个交点各有不同：

$$d_1D=+0.00007130\text{ 日}\qquad d_1T=+0.00011191\text{ 日}\quad(11\text{ 月})$$

$$-\quad 8603\qquad\qquad -\quad 10605\quad(5\text{ 月})$$

(2) 设只是偏心率变化，v 回到原来的数值时，M 却不回来．由开普勒方程得

$$dM=\frac{r}{a}du-de\sin u$$

另外 $$\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}\qquad du=-\frac{\sin u de}{1-e^2}$$

终于 $$dM=-\sin u\left(1+\frac{r}{p}\right)de$$

周期应受的第二改正，等于 $dM:n$．这次求得

$$d_2D=+0.00000051\text{ 日}\qquad d_2T=-0.00003825\text{ 日}\quad(11\text{ 月})$$

$$-\quad 88\qquad\qquad +\quad 3943\quad(5\text{ 月})$$

故改正后的周期的数值如下：

D	T	
87.969 203 78 日	365.254 297 26 日	(11 月)
87.969 045 05	365.254 156 98	(5 月)

这些数据对于 1900 年有效，是略去二阶项而求得的，事实上它们随时间作很缓慢的变化．

现在研究水星过日面中心的情形时，它对地心的会合运动．换句话说，即假设水星的中心投影在日面的中心时，计算水星对于以日心为原点，和黄道较差坐标为轴的角速度．

面积定律立即提供日心运动：

$$\frac{dv}{dt}=n\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$$

于是得 $$\frac{dv_m}{dt}=21896''\qquad\frac{dv_t}{dt}=3621''.5\quad(11\text{ 月})$$

$$10562\qquad\qquad 3478.6\quad(5\text{ 月})$$

设 i 表示水星轨道的倾角(7°0′10″)；会合运动的平均运动于是分为两份：

$$\text{黄经上：}\quad\frac{dv_m}{dt}\cos i-\frac{dv_t}{dt}$$

$$\text{黄纬上：}\quad\frac{dv_m}{dt}\sin i$$

设上两式以日为时间的单位，则这两分量在

黄经上：	黄纬上：	
+18112″	+2670″	(11 月)
+ 7005	−1288	(5 月)

为了将日心运动转化为地心运动，应当以水星的向径 ρ 与它的地心距之比去乘这些改正数，并改变其黄经上运动的符号．因

$$\rho=0.4649\quad(11\text{ 月})$$

$$8110\quad(5\text{ 月})$$

我们终于确定了水星过日面中心时，它对于每小时的位移，以角速度表之为

黄经上：	黄纬上：	
−350″.8	+51″.7	(11 月)
−236.7	−47.7	(5 月)

由此可以推算水星过日面的路径与黄道的交角 I，水星在这路径上每时的移动率，以及中

心凌日经历的时间和水星圆面在日面进出所经历的时间．为计算这些时间，对于 11 月取 $s=970''$, $2s'=9''.9$；对于 5 月取 $s=951''$, $2s'=12''.0$.

	11 月	5 月
相对路径的交角	$-8^\circ.38$	$+10^\circ.42$
每时移动率	$354''.6$	$240''.7$
中心凌日经历的时间	$5^h.50$	$7^h.95$
进或出日面的时间(中心凌日)	1^m41^s	$3^m.0^s$

非中心凌日所经历的时间比中心凌日短，但进或出日面所经历的时间比中心凌日长．

为了确定发生凌日的条件，试寻找当行星与交点相合之时，地球的日心黄经与交点黄经相差之数．水星和日心的最小角距离不应超过 $s+s'$；因此水星与地球的日心角距离不应超过 $(s+s'):\rho$．当水星与其一个交点相合之时，这两个行星的日心距离不应大于 $(s+s'):\rho\sin I$．为了将这个极限值表为时间，应以地球的角速度 dv/dt 去除它；这样我们求得水星和地球通过一个交点之间的时间的上限：

角上限：	表为时间：	
$\pm 14380''(3^\circ.99)$	± 3.97 日	(11 月)
$\pm\ 6527\ (1^\circ.81)$	± 1.88 日	(5 月)

5 月凌日的条件比 11 月凌日的条件更加狭窄．这差异是起源于行星的偏心率，由此可见为什么在 § 88 里我们特别注重说明这一根数在行星运动上所引起的差数．

不须说，若用精确的方法去研究这个问题，我们还可得出稍微不同而且不对称的两个极限；但是这里所作的一般情况的研究和一世纪来观测到的情况，是相合得令人满意的．11 月的凌日曾发生于 4 至 14 日之内，由于民用年与回归年之差和凌日长期推迟的合拍，说明以上所求得 ± 4 日的限度是合适的．5 月的凌日曾发生于 6 至 11 日之内，这也是与 ± 2 日的限度相适合的．

为了结束水星凌日的讨论，试寻找其相续发生的规则．§ 88 里我们证明水星运动大约为 13, 33, 46 与 217 年的周期所规定．使用这一节开始所推出的 D 与 T 的改进的数值计算 $qT-q'D$ 的残差，q 与 q' 表示对应于以上几个周期的整数部分：

		$qT-q'D$	
q	q'	11 月	5 月
13	54	-2.03114 日	-2.02439 日
33	137	$+1.61089$	$+1.62801$
46	191	-0.42025	-0.39639
217	901	-0.07011	$+0.04247$

假设 11 月的凌日是过中心的，而且发生于时期 t_0，在 t_0+54D 的时期，水星再与同一交点相合，但地球复返这一交点，还需 2.03114 日．将这个差数乘以 dv/dt，便发现地球距离这交点为 $-7356''$．这次将发生凌日现象，但不是中心的，两心的极短距为

$$d_m=-7356''\rho\sin I=+499''$$

再过去一个 13 年的新周期，距离 d_m 将是 $+998''$，凌日便不会重演．当水星在太阳中心之南经过时，应将 d_m 作为负数计算．

以上的例子提供继续两次凌日之间 d_m 的变化．同样，我们可以计算别的周期里的变化：

d_m 的变化

周期	11月	5月
13年	+499″	−1033″
33	−396	+ 830
46	+103	− 202
217	+ 17	+ 22

217年的周期比较确切得多，但以其太长，根据它所算出的结果，没有什么实际意义．而且在这情形下，还须作一种更完备的理论．

图163表示1800—2100年间水星凌日时两心之间的极短距的数值．图中之点形成三角形的网眼的结．因46年的周期是13与33年两个周期之和，每一个三角形的三边对应于这三个周期[1]．这个图可用以对凌日的时期作长期的预测，只是对于几个可疑的情形，须作特别的讨论（例如1999年的凌日在图上便是一个可疑的情形）．

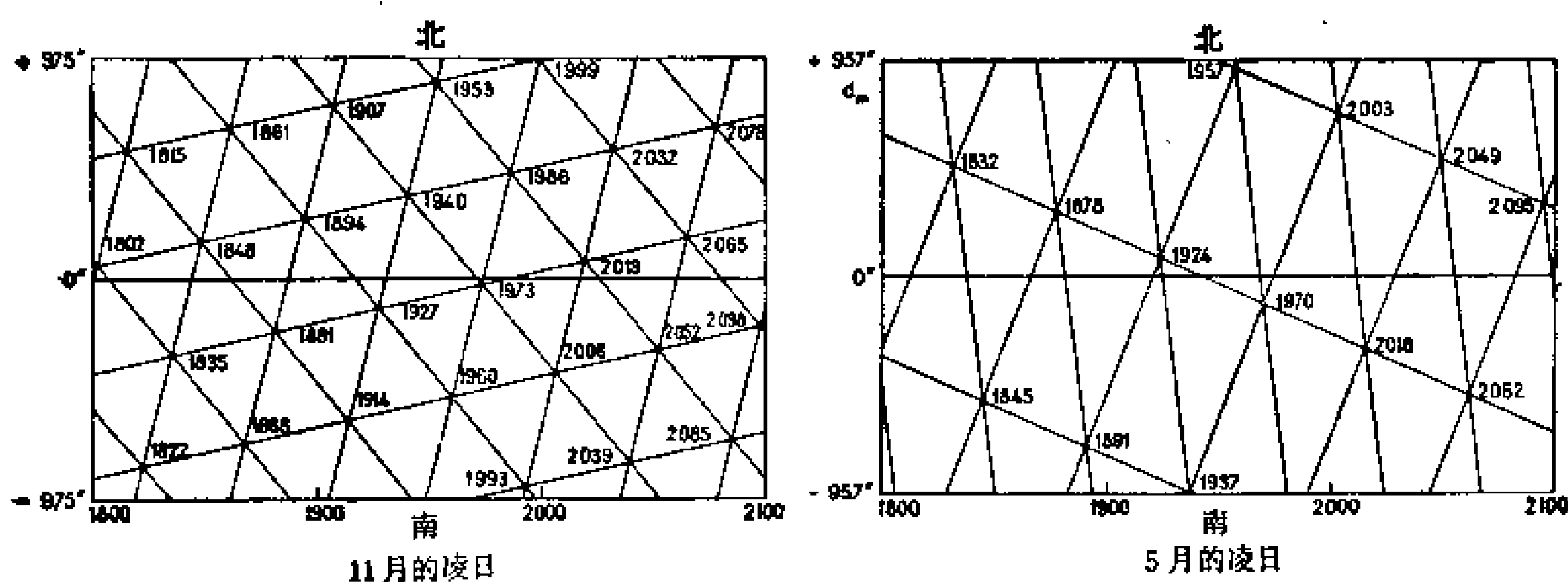


图 163

若将视直径之和 $2(s+s')$ 以某一组凌日之 d_m 的变化除之，便立刻求得这一系统内可能包含的凌日的最多次数 N，以及这一组凌日所经历的时间；有效数可能只是 $N-1$．

11月凌日

周期	$\frac{2(s+s')}{d_m}$	N	极长的期间
13年	3.91	4	39年
33年	4.91	5	132年
46年	18.9	19	828年

5月凌日

周期	$\frac{2(s+s')}{d_m}$	N	极长的期间
13年	1.85	2	13年
33年	2.31	3	66年
46年	9.5	10	414年

1) 古代天象家主张的周期：263=217+46年；事实上，它远不如217年的周期那样确切（参看：Lalande, Astronomie, Livre XI）．

对于长周期的凌日系，其持续期间可能达两万年，但亦有如上的保留情形.

一世纪内，水星凌日 13 或 14 次，11 月在升交点凌日之数平均 9.0 次（以 9 次为最常见，有时 8，10 或 11 次），5 月在降交点凌日之数 4.3 次（4 或 5 次常见，3 或 6 次是例外）．由于一世纪内水星回到每个交点 416 次，与交点相合时 46 次中有一次在升交点发生凌日，97 次中有一次在降交点发生凌日.

1937 年 5 月的一次凌日值得特别叙述：这是一次部分凌日，水星和太阳两中心的地心最短距离与这两个天体的视半径之和相差很少．在凌日过程中，水星的圆面没有全部投射在日面上，北半球的许多地方并不曾看见凌日现象．可是在法国日中峰天文台，李约(Lyot) 使用他的日冕仪拍照得水星圆面投影在低层日冕之上．1937 年的凌日结束了 13 年与 46 年为期的两个系，1983 年便不会再有凌日出现．可是它开始了 33 年为期的另一系凌日，也可能开始另一长期系凌日，这可由 1720 年未曾出现凌日去判断的.

金星凌日的理论可借与水星凌日类似的推理去建立，因而不再详细讨论．金星凌日的主要结果列入下表，计算的方法与水星凌日相同：

		升交点	降交点
		12 月 9 日	6 月 8 日
相对路径与黄道的交角		$-\ 9^\circ\!.11$	$+\ 8^\circ\!.49$
每时位移：	黄经上	$-243''\!.6$	$-237''\!.7$
	黄纬上	$+\ 39.1$	$-\ 35.5$
	总量	246.7	240.3
中心凌日的时间		$8^h\!.16$	$8^h\!.11$
进出日面的时间(中心凌日)		15^m28^s	14^m32^s
凌日限度(表为黄经)		$0^\circ\!.648$	$0^\circ\!.729$
凌日限度(表为时间)		0.637 日	0.763 日

金星凌日的条件比水星狭窄得多，虽然金星轨道的倾角只有 $3°24'$．可是其日心距与地心距之比 ρ，金星比水星却大得多(11 月为 2.725，6 月为 2.514)．而且一世纪里金星只有 163 次与其一交点相合，可见金星凌日是很稀罕的现象.

以 D' 与 T' 分别表示金星和地球与金星交点相合的周期，将交点与偏心率的变化考虑进去以后，求得

$$D'=224.698\,892\,6\text{ 日}\qquad T'=365.251\,557\,6\text{ 日}\quad(12\text{ 月})$$
$$224.698\,895\,7\text{ 日}\qquad 365.251\,096\,0\text{ 日}\quad(6\text{ 月})$$

计算对应于 8 年与 243 年两个周期（这是 § 88 里讨论金星的地心运动时所求得的）的残差 $qT'-q'D'$：

		$qT'-q'D'$		d_m 的变化	
q	q'	12 月	6 月	12 月	6 月
8	13	−0.92686 日	−0.92313 日	$-1463''$	$+1180''$
243	395	−0.06592 日	+0.04747 日	$-\ 104''$	$-\ \ 61''$

现在说明表内末后两行里数值的意义：8 年内我们只能看见两次相继出现的金星凌日，其视直径之和在 12 月为 $2014''$，在 6 月为 $1950''$．因此最常见的凌日是在 8 年内以 2 为一组而出现，这些组经过 243 年再度出现．下表记载 1500—2500 年间已经和将要发生的金

星凌日组：

	升交点		降交点
12月	1631—1639	6月	1518—1526
	1874—1882		1761—1769
	2117—2125		2004—2012
	2360 2368		2247—2255
			2490—2498

可见金星凌日平均每 243 年 4 次，或金星与其一个交点相合 197 次里有一次凌日.

哈雷(Halley)对于金星凌日写了几篇论文，其最重要的一篇发表于 1716 年，他提出据金星凌日的观测可以很确切地决定太阳的视差. 由金星圆面与太阳圆面相切的观测可以得出金星在日面所走的弦的长度，因面算出两圆面中心间的最短距离(中心凌日的情形除外). 可是这距离，因金星对于太阳的相对视差，随观测者在地上的位置而有不同；因此，根据地面各处的观测，可以推算这个视差. 为了这个原故，1761, 1769, 1874, 1882 等年，曾有许多远征队被派到世界各处去观测金星凌日. 哈雷以为，人们可以很精确地测定切点，但实践没有证实他的希望. 两次外切很难观测，第一次常被失误. 只有依靠两次内切的精密测量去解决问题，但由于星相的摇动与仪器的衍射所造成模糊现象，使得两次内切的观测也不很确定. 为了这些以及其他种种原因，现今天文工作者对于太阳视差的测定，宁肯使用小行星，而放弃了金星凌日的观测(§ 70).

第十五章　月亮，太阳，行星与卫星，自转，位相

§137　月球的自转，卡西尼定律

月球常以相同的一面对着地球，这是由观测熟知的现象；换句话说，我们所看见的月面斑痕(错误地被叫做海)，常在月面的相同位置上．至于月球的另一面是不能观测到的*．

我们应当将这现象解释为由于月球的自转轴与其轨道面几乎正交，而且自转周期严格地等于其恒星周期．卡西尼由观测推出月球自转的定律．拉格朗日与拉普拉斯将这些定律纳入天体力学，认为月球的形状是一个长轴指向地球的长椭球．事实上，月球不是围绕这个轴的旋转体，而是一个具有三个不等轴的椭球，围绕其最短轴旋转．但是这个椭球却与正球相差不远，因此，在讨论月球的位相与天平动等问题时，我们均把月球当成正球体．

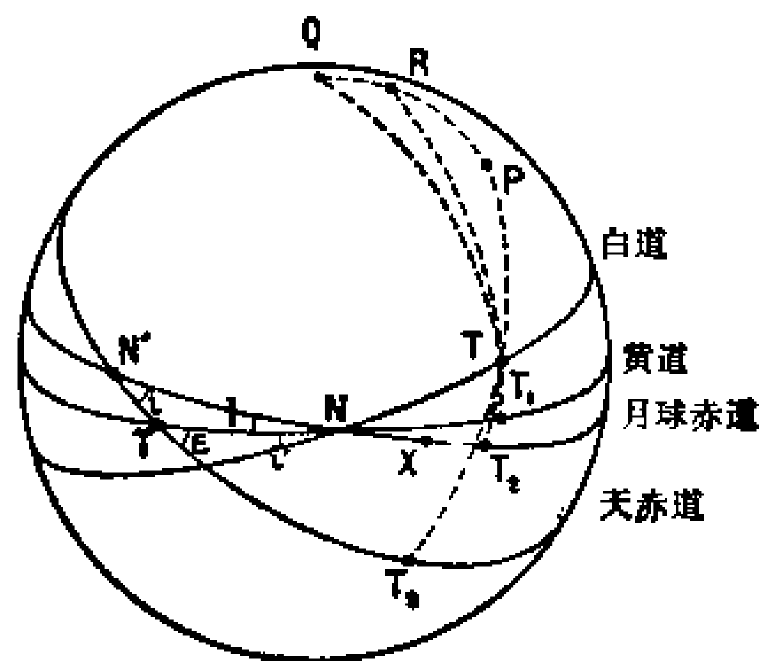


图　164

设 N 表示月面赤道对于黄道的升交点(图164)．卡西尼定律可以陈述如下：1．交点 N 大约与白道的平均升交点相合．2．月面赤道与黄道的交角 I，大约是常数；据海因(Hayn)计算，这个角等于 $1°32'6''=1.°535$．月面赤道与白道的平均交角因此是

$$i'+I=5°9'+1°32'=6°41'$$

3．还须规定这个椭球的三轴的位置．上面说过，月球围绕其短轴自转，因而它是与月面赤道正交的．设 X 表示长轴所指的方向点，则 γN 与 NX 两弧之和大约等于月球的平黄经减180°．

这些定律都是近似的，月面赤道和白道与黄道的两个交点并非严格地重合，而交角 I 也有很小幅度的变化．至于长轴的方向可以和上面所规定的那个方向偏离百分之几度．这些微小的偏离构成物理天平动，这种天平动之存在早为天体力学所证明，但其大小还没有为观测决定到所希望的精确度．若某种摄动使 X 点离开它的平均位置，则这一点在这位置附近作小幅度的振动，可能因受长期的阻尼而归于停止．月球的自转与公转的恒星周期之相合不是偶然的现象，它是月球的长轴对着地球必然的结果，这种伸长的形状，造成一个力偶矩，在使月球的长轴与其向径倾向于重合．

星历表提供规定月面赤道的位置的根数如下：

$$\Delta=N'N+180°$$

$$\Omega=\gamma N$$

* 现在人们发射火箭，使其绕过月球，已经能够拍照地上看不见的月球的背面，并将照片用无线电传真的方法，传送到地球上来——译者注

$$\Omega' = \gamma N'$$

还有月球赤道与黄道的交角 i. 为了计算 Δ, Ω' 与 i, 我们可用以下的关系式去解 $\gamma NN'$ 三角形(须注意采取的正方向):

$$\cos i = \cos\varepsilon\cos I + \sin\varepsilon\sin I\cos\Omega$$
$$\sin i\cos\Delta = \cos\varepsilon\sin I - \sin\varepsilon\cos I\cos\Omega$$
$$\sin i\sin\Delta = -\sin\varepsilon\sin\Omega$$
$$\sin i\cos\Omega' = \sin\varepsilon\cos I - \cos\varepsilon\sin I\cos\Omega$$
$$\sin i\sin\Omega' = -\sin I\sin\Omega.$$

因 Ω' 角经常很小,于是近似地有

$$\Delta \pm 180° + \Omega' = \Omega$$

这两个注解对于 Ω 与 Ω' 的测定,消除了一切含糊的情形.

例 1937 年 1 月 1 日 0 时(世界时):

$\Omega = 263°.537$ $\cos\Omega = -0.11256$ $\sin\Omega = -0.99365$

$\varepsilon = 23°.488$ $\cos\varepsilon = 0.91743$ $\sin\varepsilon = 0.39791$

上面说过: $I = 1°.535$ $\cos I = 0.99964$ $\sin I = 0.02678$

于是 $\cos i = 0.91590$ $\tan\Omega' = 0.06644$ $\Omega' = +3°.801$

$\sin i\cos\Delta = 0.06934$ $\tan i = 0.43827$ $i = 23°.666$

$\sin i\sin\Delta = 0.39538$

$\sin i\cos\Omega' = 0.40053$ $\cot\Delta = 0.17538$ $\Delta = 80°.053$

$\sin i\sin\Omega' = 0.02661$

(校算: $\Delta + 180° + \Omega' = 263°.85$).

这些数据将介绍到有关月球的问题里去.

§ 138 月球的天平动

望远镜里观测月亮,可以发现其表面的细节在月面上的位置并不是严格地没有变化,但在其平均位置的附近,作小幅度的摆动,我们将这现象叫做天平动.

先规定一种月面上的坐标系统, 以便决定月面上之点的位置以及地球与太阳对于月心的方向. 这坐标系的三轴即以上所规定月球的椭球体的三轴. X 轴以图 164 中 X 点为其方向点; Z 轴为月球的自转轴, 与其赤道正交, 指北为其正向; Y 轴亦在月球的赤道面上, 其方向在使坐标系为顺向. 对于月面或月心的经度, 在月面赤道上自 X 点起循顺向,在月面赤道上量度;月面或月心纬度,从月面赤道起向北为正量度. 据卡西尼第三律, X 点的方向为

$$NX = L_m - \Omega - 180°$$

L_m 表示月球的平黄经.

设 T 表示地心的月心方位在天球上的一点, 则它的黄经度(在黄道上从春分点量度)等于月球的黄经减去 180°, 而其黄纬等于月球的黄纬,而改变其符号:

$$\left.\begin{aligned}\gamma T_1 &= L - 180° \\ T_1 T &= -V\end{aligned}\right\}$$

这一点的坐标与地心的观测者看见月球上投射在月面中心之一点的月面坐标相同. 令 λ 与 β 表示这一点的月面坐标, λ 称为经天平动, β 称为纬天平动:

$$\left.\begin{aligned} XT_2 &= \lambda \\ T_2T &= \beta \end{aligned}\right\}$$

这两个分天平动的组合叫做光学天平动, 以区别于前节所讲过的物理天平动.

由于 I 是一个小角, 我们可用较差关系式来计算光学天平动. 设 NTT_1 直角三角形的要素如下:

$$NT = a \qquad NT_1 = b = L - \Omega - 180° \qquad T_1T = c = -V \qquad i' = J$$

设给与 J 角以增量 $\delta J = I$, 三角形仍然是直角的, 于是

$$\lambda = L - L_m + \delta b$$

$$\beta = -U + \delta c$$

便得

$$\tan b = \tan c \cos J$$

$$\sin c = \sin a \sin J$$

$$\cos a = \cos d \cos c$$

微分之

$$\delta b = -\tan c \cos b \delta J$$

$$\delta c = \sin b \delta J$$

最后

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= L - L_m - I\cos(L-\Omega)\tan U \\ \beta &= -U - I\sin(L-\Omega) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

为了求出整个天平动, 应在这些量上加入物理天平动, 其数值可由天体力学得来.

λ 式里的末一项对于交角 I 与 i' 是二阶的, 因此很小, 故经天平动与月球的黄经的差数 $L - L_m$ 的总和相差很少. 天体力学表明: 这和的主要部分的周期是月球的近点周的中心差所构成的. 经天平动的绝对值可以达到 $8°$.

至于纬天平动, 其主要部分是 $-(i'+I)\sin(L-\Omega)$, 这个量的周期等于交点周. 纬天平动的绝对值可以达到 $7°$.

由于光学天平动的两个分量周期不同, T 点绘出一条非闭合曲线, 其形状类似里萨如(Lissajous)曲线(图 165). 这曲线使我们同时知道: 1. 由地心看月面投射于月轮中心之点在月面上的移动; 2. 地球中心对于与 X 点和月球的极点相联的坐标系在月面上的轨迹.

例 计算 1937 年 1 月 1 日 0 时(世界时)的天平动. 从年历取出

$$L = 149°.045 \qquad L_m = 142°.850 \qquad \Omega = 263°.535$$

$$U = -4°.770$$

另外, 由理论给出物理天平动: 黄经上为 $+0°.01$, 黄纬上为 $+0°.03$. 利用上式求得

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= +6°.19 - 0°.05 + 0°.01 = +6°.15 \\ \beta &= +4°.77 + 1°.40 + 0°.03 = +6°.20 \end{aligned}\right\}$$

为了完全决定月球对于地心观测者所表现的情况, 还须计算月球的自转轴的方位角. 这个角是 $C = PTR$(图 164), 以习用的方向为正(§ 11). 以 α 表示月球的赤经, 则

$$\sin C = -\frac{\sin i \cos(\alpha - \Omega')}{\cos\beta} \tag{2}$$

对于 1937 年 1 月 1 日 0 时(世界时),

$$\beta = +6°.20 \qquad i = 23°.67 \qquad \alpha = 149°.50 \qquad \Omega' = +3°.80$$

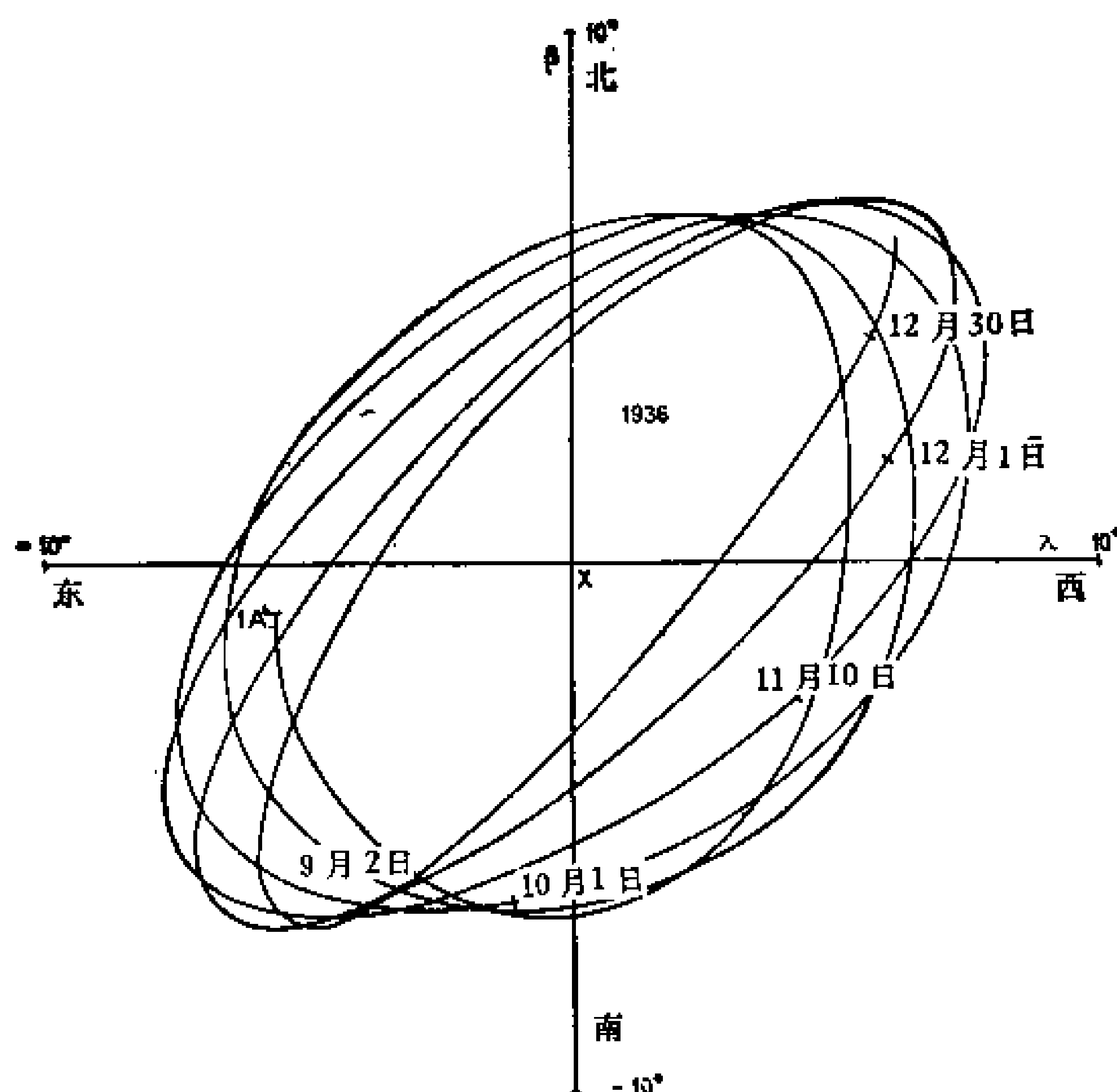


图 165　月球的光学天平动(1936 年 8 月 1 日至 12 月 31 日)

$$\sin C = +0.3335 \qquad C = +19^{\circ}\!.49$$

对于地面的观测者，由于不在地心，故月面坐标为 λ 与 β 之点一般不投射在月轮的中心．我们将与此对应的视差效应叫做周日天平动．由月心与地心和观测者连接的两个直线所夹之角，等于月球的视差(§ 71)．因此周日天平动可以达到、甚至超过 1°．以上几种天平动之和，在经度上达 ±9°，在纬度上达 ±8°，因此人们看到的月面达 60%，其余的部分则不能见．

周日天平动的计算容易作为赤经、赤纬上的视差的计算(§ 72)．令 $\Delta\lambda$ 与 $\Delta\beta$ 分别表示黄经和黄纬上的周日天平动，$\Delta\alpha$ 与 $\Delta\delta$ 表示月球在赤经与赤纬上的周日视差．对于图 164 中的 T 点，代表观测者的月心方向之较差坐标为

$$\Delta\lambda\cos\beta, \qquad \Delta\beta \quad (\text{月心坐标})$$
$$\Delta\alpha\cos\delta, \qquad -\Delta\delta \quad (\text{赤道坐标})$$

这些坐标间的近似关系，可以写为下式：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\lambda\cos\beta &= \Delta\alpha\cos\delta\cos C - \Delta\delta\sin C\\ \Delta\beta &= -\Delta\alpha\cos\delta\sin C - \Delta\delta\cos C\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

α 与 δ 表示月球的赤经与赤纬，C 表示其自转轴对于地心的方位角．

总天平动由 $\Delta\lambda$ 与 $\Delta\beta$ 分别加在 λ 与 β 上而求得．至于 C 角对于地面的数值，可以 α 与 β 的地面数值代替公式(2)里的地心数值而求得之．

§ 139　月亮的位相

天文年历里载有关于月相的朔、望、两弦发生的时期，这表示月亮与太阳的视黄经之

差，达到如下的数值：

$$\text{朔望}\begin{cases}\text{新月(朔)}\cdots\cdots\ 0^\circ\\ \text{满月(望)}\cdots\cdots 180^\circ\end{cases}$$

$$\text{两弦}\begin{cases}\text{上弦}\cdots\cdots\cdots\cdots\ 90^\circ\\ \text{下弦}\cdots\cdots\cdots\cdots 270^\circ\end{cases}$$

但月相不单是随这两个黄经之差而变化，且与月亮的黄纬和观测者的地面位置有关．其实，月相为一个名叫相角的参数所决定．所谓相角，是太阳与地球在月心看的两个方向之间的角．还应该区别地心相角与地面相角，前者是对地球中心，后者是对地面观测站而言．

上一节里已经推出地心的月心坐标 λ 与 β 和观测站的月心坐标 $\lambda+\Delta\lambda$ 与 $\beta+\Delta\beta$．现在还要计算日心的地心坐标 l_0 与 b_0

设以 $\odot$ 与 R 表示太阳的黄经与向径；L, U 与 N 表示月亮的黄经，黄纬与向径；Λ, B 与 R' 表示月亮的日心黄经、黄纬与其对于太阳的距离．Λ 和 $\odot+180^\circ$ 相差很少，不会超过 $9'$.；B 常小于 $1'$．我们可以写出这些量之间的关系式如下，以表示直角坐标之间的转换：

$$R'\cos B\cos\Lambda=-R\cos\odot+r'\cos U\cos L$$

$$R'\cos B\sin\Lambda=-R\sin\odot+r'\cos U\sin L$$

$$R'\sin B=r'\sin U$$

由前两式消去 $R'\cos R$，便得

$$\sin(\Lambda-\odot)=-\frac{r'}{R}\cos U\sin(L-\Lambda)$$

若以视差的反比 P/P' 代 r'/R，则产生的误差可以略而不计；又以角代小角的正弦亦属合理．因此，在足够精确度的情况下，可以写

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda=\odot+180^\circ-\frac{P}{P'}\cos U\sin(L-\odot)\\&B=\frac{P}{P'}U\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

由此据上节求地球的月心坐标相似的计算，可以推出太阳的月心坐标，由于 B 是小角，故可略去黄经的二阶项；于是得

$$\left.\begin{aligned}&l_0=\Lambda-L_m=\odot-L_m+180^\circ+\frac{P}{P'}\cos v\sin(\odot-L)\\&b_0=-B-I\sin(\Lambda-\Omega)=-\frac{P}{P'}U+I\sin(\odot-\Omega)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这两个等式是很近似的公式．这里没有考虑物理天平动，这是因为它是小量，亦如在 l_0, b_0 和 λ, β 的计算里一样，我们将其略去．这样，我们求得月面上太阳在其天顶之点（即照明的半球的极点）的月面坐标．由月面上一点看太阳的天顶距，若以月面坐标表示这一点，则可由相当于坐标为 l_0, b_0 之点的角距离而求得之．

以 a 表示月亮的地心相角，以 ξ 表示太阳对于月心的方位角，这里例外地从月球的北极开始计算，这两个角可解以下的方程式而求得之：

$$\left.\begin{aligned}&\cos a=\sin\beta\sin b_0+\cos\beta\cos b_0\cos(l_0-\lambda)\\&\sin a\cos\xi=\cos\beta\sin b_0-\sin\beta\cos b_0\cos(l_0-\lambda)\\&\sin a\sin\xi=-\cos b_0\sin(l_0-\lambda)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

在这些公式里将周日天平动 $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$ 加在天平动 λ, β 里便得对于地面的相角 $a+\Delta a$ 与其对应的方位角 $\xi+\Delta\xi$. 由于 Δa 是小角，所以可取下列的较差关系:

$$\Delta a=\Delta\lambda\cos\beta\sin\xi-\Delta\beta\cos\xi$$

或写为

$$\Delta a=\Delta\alpha\cos\delta\sin(C+\xi)+\Delta\delta\cos(C+\xi) \tag{4}$$

$\Delta\alpha$ 与 $\Delta\delta$ 是赤经与赤纬上的周日视差, C 表示月球的自转轴的方位角，其数值已于上节求出. $C+\xi$ 角是太阳对于月亮的方位角，按习用法以天北极为起点计算. 天文年历里所载的，不是 $C+\xi$, 而是与它相差 $90°$ 的弦月北角的方位角 ω:

$$\omega=C+\xi\pm 90° \quad \begin{matrix}\text{(望前月取 + 号)}\\ \text{(望后月取 − 号)}\end{matrix} \tag{5}$$

直接使用月亮与太阳的赤道坐标，亦容易计算 $C+\xi$ 与 ω.

有些天文年历里载有 l_0 与 b_0, 但亦可不用它们去计算相角. 因为以黄道坐标表示，有

$$\cos a=\sin U\sin B+\cos U\cos B\cos(\varLambda-L)$$

这公式的实际意义，由于 B 角是一小量，右端第一项在第五位小数上绝不超过 4 个单位，因而可以略去. 同样我们将以 1 代 $\cos B$. 于是

$$\cos a=-\cos U\cos\left[\odot-L+\frac{P}{P'}\cos U\sin(\odot-L)\right] \tag{6}$$

由此式计算 a, 并由(4)式求视差的改正值 Δa. 例如若欲归算月亮的精密光度观测，便须使用以上的几个公式.

例 1937 年 1 月 1 日 0 时(世界时)

$$L=149.^\circ05 \qquad L_m=142.^\circ85 \qquad \odot=280.^\circ17$$
$$U=-4.^\circ77 \qquad \Omega=263.^\circ54 \qquad P/P'=0.0026$$
$$P=\;8.''95 \qquad P'=3405'' \qquad =0.^\circ15$$

若不考虑物理天平动，由公式(2)得

$$l_0=317.^\circ32+0.^\circ11=317.^\circ43$$
$$b_0=0.^\circ01+0.^\circ44=+0.^\circ45$$

若将这两个坐标和由前节得出的 λ 和 β 的数值一并代入(3)式，则得

$$\cos a=\;0.6570 \qquad a=\;48.^\circ93$$
$$\sin a\sin\xi=\;0.7514 \qquad \cot\xi=-0.0837$$
$$\sin a\cos\xi=-0.0629 \qquad \xi=\;94.^\circ78$$

弦月北角的方位角由(5)式给出，由于那时在望以后，我们采用负号. 上面已求得 C 角为 $19.^\circ49$, 故

$$\omega=+24.^\circ27$$

在年历里可以找着 l_0, b_0, ω 等角.

使用公式(6), 从月亮与太阳的黄道坐标出发可捷速地求出地心相角. 对于与以上相同的时期，我们有

$$\cos U=0.9965$$

$$\odot-L+\frac{P}{P'}\cos U\sin(\odot-L)=131.^\circ23$$

$$\cos a = 0.6568 \qquad a = 48.^\circ 94$$

一般地说，相角与$|\odot - L \pm 180^\circ|$相差很少；在朔望附近特别显著．当月亮与太阳相合之时，相角经过小于 180° 的极大值(中心食的情形除外)；同样在冲时，相角经过非零的极小值(同样月亮的中心食除外)．

有时我们给与相角一个符号，以区别望前月(负号)或望后月(正号)． 这个习用法有时不很恰当，因为角上加以符号，则从负到正时并不经过零．这样好象有不连续性．为了避免这种不便，我们不将符号放在角的数值前面，如象代数学上的符号那样，而放在它的后面，例如，对于上面的例子，我们不写为 $+48.^\circ 94$，面写为 $48.^\circ 94^+$．

所谓月龄，即从新月开始计算到某一月相所经历的时间． 有些天文工作者不以相角而以月龄表示月相． 从前的人常在新月后的黄昏里一丝蛾眉月出现之后开始，去决定月龄．但是由于：1．月亮的黄纬不是零；2．黄经亦非均匀地增长，因此相角绝不是时间的线性函数，特别是在朔望之时，当月龄为零时，由于纬度的原故，月亮可距离太阳 7°，而它的相角那时约为 173°，而非 180°．以月龄代相角，虽然是传统的、但却不是合理的方法，即使我们只取很粗的近似值．

设不计太阳的视直径和月面起伏的效应，则人们看见月面的照明部分的分数为

$$k = \frac{1}{2}(1 + \cos a) = \cos^2 \frac{a}{2}$$

但当月亮表现一丝蛾眉之时，月面凸出之处，使视月面减少，一方面由于月面山峰的阴影，另一方面由于凸出处遮掩了阳光照明的一些部分．特别是理论的月角为其附近凸出处遮掩之时，望月前月角间的弧线常小于 180°． 当月亮距离太阳 20° 时，这弧线不过 160°；距离太阳 9° 时只有 90°．当月亮距离太阳只有 7° 之时，蛾眉月便消逝不见了，我们不能在月面上看见直接为太阳照明的任何部分，它上面只有由于地球散射日光而成的灰光[1]．

满月前后，相的效应还是可以觉察的，即便是相角很小．在半影食期间，还很容易分辨出由于月面凸出处所投射的阴影在为月相所影响的边沿附近．

§ 140 太 阳 的 自 转

望远镜发明后不久，1611 年便有人发现太阳表面上有移动的黑子*，因而表现太阳有自转的运动．这运动是顺向的，围绕一个可以假定为绝对不变的自转轴而进行；行星的摄动不足以使这个轴发生显著的进动．

日面赤道为其对于黄道的升交点的黄经 Ω 与其对于黄道面的交角 i 所决定(图 166)．根据卡灵顿(Carrington)，这两个角对于 1850.0 的春分点之数值为

$$\Omega = 73.^\circ 667 \qquad i = 7.^\circ 250$$

§ 86 里的公式可用以计算任何时 t (表为年与其小数) 的 Ω 与 i，并将行星步差考虑进去为

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 74.^\circ 962 + 0.^\circ 01295\,(t - 1950.0) \\ i &= \ \ 7.^\circ 252 + 0.^\circ 00002\,(t - 1950.0) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

1) 参看 *L' Astronomie*, 1936, p 57.

* 据《汉书·五行志》的记载，我国人在公元前 28 年已经发现太阳黑子，早于欧洲人 1600 多年——译者注

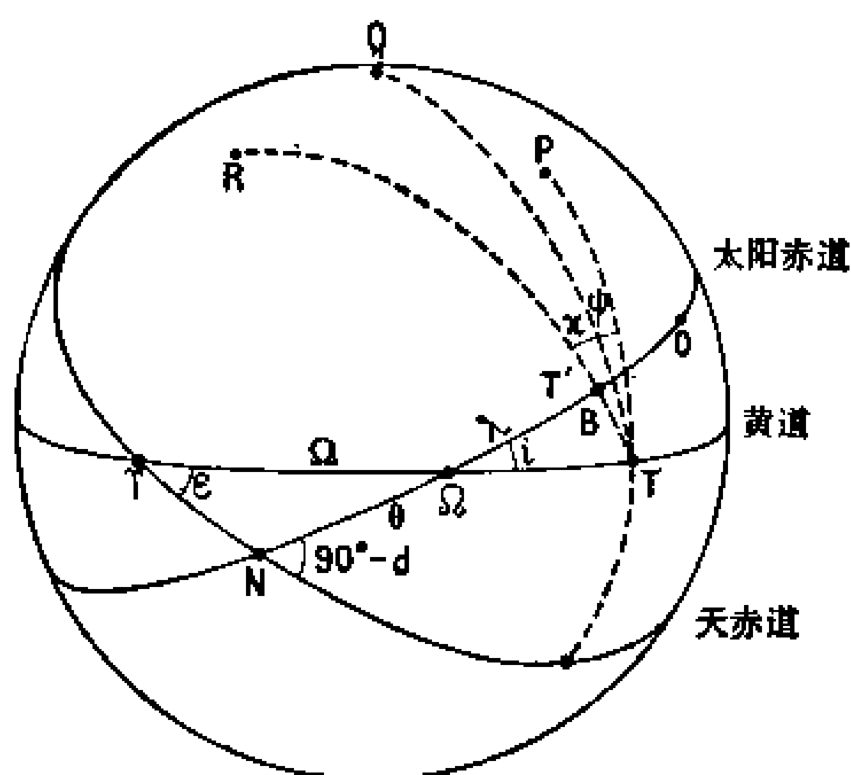


图 166

可是天文年历里的日面赤道是根据下列卡灵顿公式算出的(没有将黄道的长期位移考虑进去):

$$\left.\begin{aligned}\Omega &= 75^\circ\!.063 + 0^\circ\!.01396\,(t-1950.0)\\ i &= 7^\circ\!.250\end{aligned}\right\}$$

没有计入这一校正,在实际上并无影响,因为交点黄经之差每世纪不过 $0^\circ\!.1$,而且这两个根数本身也决定得不很好.

若欲计入章动的效应,还须将黄经 Ω 加以下列的改正:

$$\Delta\Omega = 0^\circ\!.00028\,\frac{N}{1''}$$

N 表示黄经上的章动,以角秒表示,载于天文年历内. 用以上的公式可将其转换为度的小数. 这一章内所讲的章动都应作与此相同的改正.

我们还可用太阳的北极 R 的赤经 a 与赤纬 d, 去规定日面赤道. 设 N 表示日面赤道对于天赤道的升交点(图 166), 则

$$\gamma N = a - 270^\circ$$

因此,解三角形 $\gamma N\Omega$:

$$\cos d\cos a = \sin i\sin\Omega$$

$$\cos d\sin a = -\sin\varepsilon\cos i - \cos\varepsilon\sin i\cos\Omega$$

$$\sin d = \cos\varepsilon\cos i - \sin\varepsilon\sin i\cos\Omega$$

式内 $$\varepsilon = 23^\circ\!.446 - 0^\circ\!.00013\,(t-1950.0)$$

由以上的关系式与其微分式求得

$$\left.\begin{aligned}a &= 286^\circ\!.015 + 0^\circ\!.00194\,(t-1950.0)\\ d &= 63^\circ\!.775 + 0^\circ\!.00154\,(t-1950.0)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

及其章动的改正值:

$$\Delta a = 0^\circ\!.00004\,\frac{N}{1''} + 0^\circ\!.00016\,\frac{\beta}{1''}$$

$$\Delta d = 0^\circ\!.00003\,\frac{N}{1''} + 0^\circ\!.00027\,\frac{\beta}{1''}.$$

同上 N 仍表示黄经上的章动, β 表示改号后的黄赤交角上的章动,即习用以 B 字表示的白塞单数(§ 58),其数值和其他"白塞耳日数"一样,载于天文年历里,以为计算视坐标之用[1].

寻求日面赤道和天赤道与黄道的两个升交点之间所夹的弧长 θ, 有时亦很有用. 不难求得

$$\theta = 60^\circ\!.410 + 0^\circ\!.01110\,(t-1950.0)$$

$$\Delta\theta = 0^\circ\!.00024\,\frac{N}{1''} - 0^\circ\!.00017\,\frac{\beta}{1''}$$

日面上之点的位置可以对于日面上的一种坐标系面决定,这系的基本面是日面赤道,

1) 这里我们没有用 B 字,因为后面这个字母有其他的含义.

并在这面上选出一点 O 作为起算的原点，这一点为太阳自转所带动．太阳的自转不象一个刚体，角速度随其与赤道的距离而不同．因此 O 点的定义与自转运动的决定，都是约定的．据定义，这原点选择为 1854 年 1 月 1 日平午(世界时)的升交点，而且以复回这一点的周期为 25.38 日．原点 O 与交点的相合仅是对于地面的现象，而且没有将太阳的周年光行差考虑进去．若以儒略日(J. J.)表示日期，O 点与交点之间的距离(不计入光行差的改正)便是

$$\Omega O=\frac{360^\circ}{25.38}(\text{J. J.}-2433282.5)-179^\circ\!.575$$

$$=14^\circ\!.184397(\text{J. J.}-2433282.5)-179^\circ\!.575^{1)} \tag{3}$$

日面一点的日面经度，在赤道上从 O 点循顺向计算；日面纬度从赤道起算，以向北为正．

一个自转的天体的中央子午线，是它的表面与其自转轴和地心所定的平面的交线；因此，从地上看，这条线象是日面上的一个直径．设 T 表示地球对日心的方位点，R 表示太阳自转轴的北极，则中央子午线在图上(图 166)表现为 RT，日轮的中心即是 T 点．

设 α 与 δ 表示太阳的视赤经与赤纬，$\odot$ 表示其黄经，则 T 点的赤道坐标为 $\alpha+180^\circ$ 与 $-\delta$，其黄经为 $\odot+180^\circ$．三角形 PRT 之解提供以下的关系式，式内 λ 表示中央子午线与升交点 Ω 的日面经度之差，B 表示日轮中心的日面纬度：

$$\left.\begin{aligned}\cos B\cos(\lambda+\theta)&=\cos\delta\sin(a-\alpha)\\ \cos B\sin(\lambda+\theta)&=-\sin\delta\cos d+\cos\delta\sin d\cos(a-\alpha)\\ \sin B&=-\sin\delta\sin d-\cos\delta\cos d\cos(a-\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

更由下式求中央子午线的日面经度 L：

$$L=\lambda-\Omega O=\lambda+179^\circ\!.575-\frac{360^\circ}{25.38}(\text{J. J.}-2433282.5)$$

注意 L 是时间的减函数，换句话说，即日面上之点按日面经度减少的方向经过中央子午线，这是由于日面坐标系选为顺向的效果．

太阳自转轴的方位角 C 即上述的三角形在 T 点的角：

$$\sin C=\cos d\,\frac{\sin(a-\alpha)}{\cos B} \tag{5}$$

由于地球的大小对于日地间的距离，是一个很小的量，所以刚才所讨论的根数不须加以视差的校正．

使用黄道坐标以求 λ 和 B 的公式比(4)式较为迅速，因为这里可以合理地略去太阳的黄纬：

$$\left.\begin{aligned}\sin B&=\sin i\sin(\odot-\Omega)\\ \tan\lambda&=\cos i\tan(\odot-\Omega)\\ C&=\psi+\chi\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

而

$$\tan\psi=-\tan\varepsilon\cos\odot$$

$$\tan\chi=-\tan i\cos(\odot-\Omega)$$

当太阳的赤经等于 a 或 $a+180^\circ$，即在 1 月 6 日或 7 月 8 日之时，C 角为零(公式 5)．至于 C 的极大绝对值，大约与 $\sin(a-\alpha)$ 的极大值相合，因为 $\cos B$ 的变化既缓慢而其

1) 从 J. J. 减去的常数相当于 1950 年 1 月 1 日零时(世界时)的儒略日．

变幅又很小(0.992至1)；因此这些极值发生于4月8日($C=-26^{\circ}.39$)与10月12日($C=+26^{\circ}.39$)。

当太阳的黄经等于Ω或$\Omega+180^{\circ}$，即在6月6日或12月8日之时，日轮中心B的日面纬度为零(公式6)。在这两天里，黑子象在日面的弦线上移动。当太阳的黄经等于$\Omega\pm 90^{\circ}$之时，B达到它的极值，即在3月6日，$B=-7^{\circ}.25$，9月8日，$B=+7^{\circ}.25$；在这两天里，黑子的视轨迹好象是椭圆的一段弧线，这椭圆的两轴之比为$1:\sin i$或$1:0.1262$。

与25.38日的自转恒星周对应的会合周是27.275日。这是卡灵顿坐标系里一个定点连续两次经过中央子午线的平均时间，大约是日面纬度16°的自转情况。赤道上黑子的自转略微迅速，高纬度黑子的自转较为缓慢。我们可以下式表示纬度B处黑子的每日平均运转：

$$n=14^{\circ}.37-2^{\circ}.60\sin^2 B$$

但这是很多观测的平均结果，其中个别的情形有相当大的差异，这是由于黑子本身有其固有的运动。不管怎样，赤道带黑子的日面经度一般在增长中，高纬度黑子的日面经度在减少中。

为了给与太阳自转周以一个序数，我们设其自转开始于中央子午线的经度L为零之时。例如，太阳自转的1289周开始于1950年1月16日，而这序数开始的第一周，公认为在1853年11月9日。

例 1937年1月1日0时(世界时)，据天文年历或由公式(1)与(2)得

$\Omega=74^{\circ}.794$　　　$\odot=280^{\circ}.171$

$i=7^{\circ}.252$　　　$a=285^{\circ}.995$　$d=63^{\circ}.755$

$\varepsilon=23^{\circ}.448$　　　$\alpha=281^{\circ}.063$

J. J. $-2433282.5=-4748$，

$\Omega O=207^{\circ}.093$

由(6)式依次得

$\lambda=25^{\circ}.195$　　　$L=232^{\circ}.288$

$B=-3^{\circ}.101$

$\psi=-4^{\circ}.380$

$\chi=+6^{\circ}.558$

最后　　$L=232^{\circ}.29$　　$B=-3^{\circ}.10$　　$C=+2^{\circ}.18$

§141 水星与金星的自转和位相

水星与金星的自转根数还不能确定。虽然观测已经表明，这两颗行星常以相同的一面对着太阳(自然还有天平动所表现的部分)，它们的自转轴的方位角还不知道*。

将行星表面上的斑点作为研究自转周期的标志，原则上最好在上合时期(行星的整个照明的圆面对着地球)去观测它们。那时水、金两星的视直径分别只有5″与10″。当两星

* 1962—67年间，用雷达观测，求得多年纷争未决的金星自转周期为242.98±0.04日，会合周为1170日，在下合时总以一面朝着地球，而且其自转是逆向的，其北极轴的方向为$\alpha=273^{\circ}$，$\delta=66^{\circ}$(1950.0)，差不多和金星的轨道正交，由此可见，以前测得是金星云层的自转，与金星本身的自转并无关系——译者注

和地球之间的距离变短之时，视半径增长，位相逐渐显著；经过半轮相之后，行星进入新月形状，斑点的可见情况便为边缘与明暗界限之间表面亮度的迅速变化所妨碍了.

水星圆面上有暗的斑痕，很象月面上的斑痕一样明显，由这些斑痕的观测，发现如下的事实：水星的自转周期等于其公转的恒星周期，自转轴与轨道面的法线相距很近*．黄经上的天平动很大，轨道的偏心率达 0.2056，中心差为 $\pm 23^\circ\!.68$．若水星的赤道面与其轨道面相合，这便是经天平动的两个极值．由于轨道面与黄道的交角约为 7°，水星对于地球应有纬天平动，即使它的赤道面与轨道面之间的交角很小．

金星表面的斑痕远不及水星上的那样显著，因而很难观测，原因是金星的大气里充满散光的粒子，作成相当厚的云雾．但是忍耐而持续的观测可以探出一些斑痕的轮廓，而确定其对于明暗界限的固定性．另一方面，分光观测表明，金星表面各点的视向速度并无显著的差异．由于轨道的偏心率很小，中心差不超过 $\pm 0^\circ\!.78$，其经天平动必然很小．金星的赤道面与其轨道面的交角也很小．

内行星的相角的定义与月亮相同，即地球与太阳在内行星的中心所看的两个方向之间的夹角 λ；这也是含视轮廓与明暗界限两个面之间的夹角．这个角在 0° 至 180° 之间变化．这个角上不宜冠以符号，象我们对于月亮的相角那样，但可在表达这个角的数字后面加上一个正或负号，以区别位相在增或损的情形．

为了计算相角 λ，最简单的方法是用行星的黄道坐标（载在天文年历里）．设 L 与 B 表示其日心的、l 与 b 表示其地心的黄经与黄纬，$\odot$ 表示太阳的黄经，且将其黄纬略而不计．设在太阳-地球-行星三点所组成的平面三角形内，以 σ 表示地球所在的角，σ' 表示太阳所在的角，则

$$\left.\begin{aligned} \cos\sigma &= \cos(\odot - l)\cos b \\ \cos\sigma' &= -\cos(\odot - L)\cos B \\ \lambda &= 180^\circ - (\sigma + \sigma') \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

σ 角是地面观测者所看的行星对于太阳的距角，常小于直角；σ' 角在一或二象限内，按其余弦的符号而决定．

金星圆面表现相位的部分正和太阳相对；设以 C 表示太阳对于行星的方位角，则其圆面的两尖角（即边缘与明暗界限的交点）的方位角为 $C+180^\circ$ 与 $C-180^\circ$．设以 α_0 与 δ_0，α 与 δ 分别表示太阳与行星的赤道坐标，则

$$\sin C = \frac{\cos\delta_0 \sin(\alpha_0 - \alpha)}{\sin\sigma} \tag{2}$$

C 角所在的象限可从以下的计算去决定：

$$\sin\sigma\cos C = \sin\delta_0\cos\delta - \cos\delta_0\sin\delta\cos(\alpha_0 - \alpha)$$

但对于许多情形，不须作计算，从太阳与行星的位置，即可决定．

我们须得先将水星或金星的赤道面的位置决定，然后才可能建立一种以行星圆面的中心为原点的坐标系，来定其表面上之点的位置．但是现在只能规定一种以轨道面为基本面的坐标系，而上原点 M 的定义是这样的：先将从行星圆面中心所看的方向表示在天球上（图 167）；设 OM 表示轨道面，S 表示太阳．更设 L' 为行星在轨道面上的真经度，L'_m 为其平经度，则原点为 MS 弧所决定，即

* 水星的自转周期，据雷达观测，求得 58.65 日，否定了以前自转周等于公转周的论断——译者注

$$A_0 = MS = L' - L'_m$$

从 M 点起循顺向计算. 这是照明的半球的北极对于行星中心的经度，其纬度据定义为零. 若轨道是圆形的，经度也是这样的. 为了计算经天平动，也可采用 A_0，试推出其表达式于下.

轨道上的真经度不载于天文年历，但可由下式从日心黄道坐标推出(§ 87):

$$\cos(L' - \Omega) = \cos B \cos(L - \Omega)$$

图 167

式内 Ω 表示轨道的升交点的黄经. 更设 i 表示轨道与黄道的交角，则

$$\tan(L - \Omega) = \cos i \tan(L' - \Omega)$$

这个关系式提供一个收敛很快的展开式(参看 § 52，关于《赤道订正》的类似情形)，将其限制在下列几项之内:

$$L' = L + \tan^2\frac{i}{2}\sin 2(L - \Omega) \tag{3}$$

另外，(§ 86) $\quad L'_m = nt + L'_0$

最后

$$A_0 = L - L'_0 - nt + \tan^2\frac{i}{2}\sin 2(L - \Omega) \tag{4}$$

现在决定地球对于行星中心的坐标 A 与 D. 设 T 表示从行星圆面中心看地球在天球上的方向点，其黄道坐标为 $l + 180°$ 与 $-b$. 设 Q 表示黄道 E 的极点，Π 表示其轨道 O 的极点(图 167)，则 $Q\Pi T$ 三角形的要素为

$$\angle Q = l - \Omega - 90° \qquad \angle\Pi = A + L'_m - \Omega - 90°$$

$$T\Pi = 90° - D \qquad TQ = 90° + b$$

$$\Pi Q = i$$

于是

$$\left.\begin{aligned}
&\sin D = -\cos i \sin b + \sin i \cos b \sin(l - \Omega)\\
&\cos D \cos(A + L'_m - \Omega) = \cos b \cos(l - \Omega)\\
&\cos D \sin(A + L'_m - \Omega) = \sin i \sin b + \cos i \cos b \sin(l - \Omega)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这组关系式不含糊地提供 A 与 D.

设以 ψ 表示 ΠTS 角，λ 如上表示相角，则有以下的关系式:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\lambda = \cos D \cos(A - A_0)\\
&\sin\lambda \cos\psi = -\sin D \cos(A - A_0)\\
&\sin\lambda \sin\psi = \sin(A - A_0)
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由此可以不含糊地得出 λ 与 ψ，$\sin\lambda$ 一般是正数. 设已由(1)式算出 λ，则(6)式提供 ψ:

$$\cos\psi = -\sin D \cot(A - A_0)$$

而轨道的北极的方位角是

$$\omega = C - \psi \tag{7}$$

利用如下的轨道根数；计算的结果应取到 0°.1，且不考虑章动与光行差:

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega = 47°.739 + 0°.01185(t - 1950.0)\\
&\sin i = 0.1219; \quad \cos i = 0.9925; \quad \tan^2\frac{i}{2} = 0°.215\\
&L'_m = 35°.214 + 4°.092377(\text{J. J.} - 2433282.5)
\end{aligned}\right\} \text{水星}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Omega=76^\circ\!.230+0^\circ\!.00900(t-1950.0)\\&\sin i=0.0592;\quad \cos i=0.9982;\quad \tan^2\frac{i}{2}=0^\circ\!.050\\&L'_m=82^\circ\!.374+1^\circ\!.602169(\text{J. J.}-2433282.5)\end{aligned}\right\}\text{金星}$$

时间以年计,符号 J. J. 仍表儒略日期.

例 利用以上的公式去计算水星,时间为 1950 年 3 月 15 日零时(世界时).

固有

$$\begin{aligned}&\odot=353^\circ\!.85 && l=342^\circ\!.02\\&\alpha_0=354^\circ\!.80 && b=-2^\circ\!.18\\&\delta_0=-2^\circ\!.25 && L=312^\circ\!.66\\& && B=-6^\circ\!.98\\&\Omega=47^\circ\!.74 && \alpha=344^\circ\!.25\\&L'_m=333^\circ\!.96 && \delta=-9^\circ\!.08\end{aligned}$$

由公式(1)与(2)得

$$\begin{aligned}&\cos\sigma=0.9781 && \sigma=12^\circ\!.01\\&\cos\sigma'=-0.7470 && \sigma'=138^\circ\!.33\\& && \lambda=29^\circ\!.66\\&\sin C=0.8792 && C=61^\circ\!.55\end{aligned}$$

于是由(4)式得 $\Lambda_0=312^\circ\!.66+0^\circ\!.44-333^\circ\!.96=-21^\circ\!.26,$

再由(5)式得

$$\begin{aligned}&\sin D=-0.0732\\&\cos D\cos(\Lambda+L'_m-\Omega)=0.4109\\&\cos D\sin(\Lambda+L'_m-\Omega)=-0.9087\end{aligned}$$

$$D=-4^\circ\!.20\quad \Lambda=8^\circ\!.11\quad \Lambda-\Lambda_0=29^\circ\!.37$$

于是由(6)与(7)两式推出

$$\begin{aligned}&\lambda=29^\circ\!.65\quad(\text{校算})\\&\psi=82^\circ\!.59\\&\omega=-21^\circ\!.04\end{aligned}$$

视半径 s 与地心距 Δ 成反比. 对于 $\Delta=1$, 取如下的数值[1]:

水星 3″.34 (勒威耶)

金星 8″.41 (阿维尔斯 Auwers)

1950 年 3 月 15 日,水星的 $\Delta=1.337$ $s=2''.50$

下表内总结以上计算的结果. 负的方位角一般加上 360°.

σ	距角	12°.0	水星 1950 年 3 月 15 日 0 时(世界时)
λ	相角	29°.7	
C	太阳的方位角	61°.6	
Λ_0	太阳的水星中心经度	348°.7	
Λ	地球的水星中心经度	8°.1	
D	地球的水星中心纬度	−4°.2	
ω	轨道极点的方位角	339°.0	
s	视半径	2″.50	

1) 斯特鲁班(Stroobant)与因内斯(Innes)对于水星视半径测定的平均值为 3″.08 似比勒威耶之值可靠.

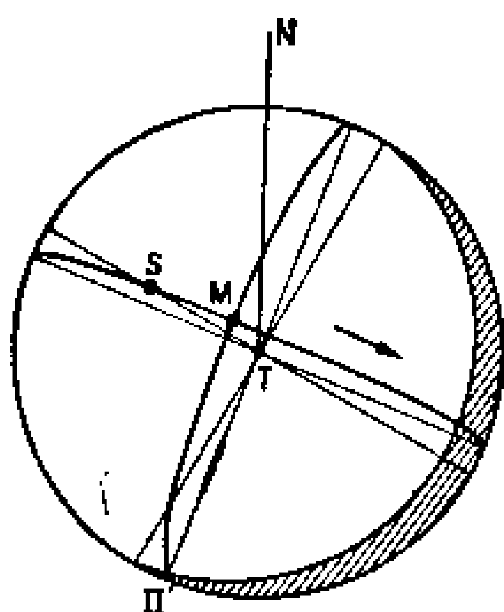


图 168 1950 年 3 月 15 日的水星

天文年历里载有行星圆面被照明的分数，即由下列公式所计算出之量：

$$k=\frac{1}{2}(1+\cos\lambda)$$

但这个量不如相角那样有用．在这个例子里，$k=0.935$.

既知太阳与地球对行星圆面中心的坐标，便可绘出行星圆面的轮廓图，并可将由目视或照相观测所表现的斑痕的方位归算到这样绘出的坐标轴去(图 168)．由于 T 点在行星圆面的中心，则 S 点的位置可以其方位角与其对于 T 点的距离 $s\sin\lambda$ 去决定．明暗界限投影为半个椭圆，其长轴与 TS 正交，面半短轴之长为 $s\cos\lambda$．行星的轨道面在行星球面上的交线，投射在行星圆面上也是半个椭圆，其长轴的方位角为 $\omega+90°$，半短轴之长为 $s\sin D$．这半个椭圆通过 S 点与 M 点，后一点的位置由向下投射法面求得之．

轨道面的两极 Π 与 Π'，由其方位角与其至中心的距离 $s\cos D$ 而决定，这便是明暗界限角上的两点．由射影几何学习用的方法可以描绘以行星中心为心、平行于轨道面的纬圈，以及通过 Π 与 Π' 的大圆圈，这两点对于 M 点的经度是已知的．图 168 上只绘了经度为零的大圆．这幅图是据 1950 年 5 月 15 日水星的数据而绘出的．

假使行星的赤道面与其轨道面相合，则其表面上的定点对于这个属于轨道的参照系的坐标将不会有变化．反之，设赤道与轨道的交角 I 不为零，这些坐标便是变化的．在后一情形里，我们将会观测到纬天平动，而低纬度处的斑痕的经天平动差不多是零(这里，假设天平动是对于以行星为中心、并以轨道面为参照系而规定的)．

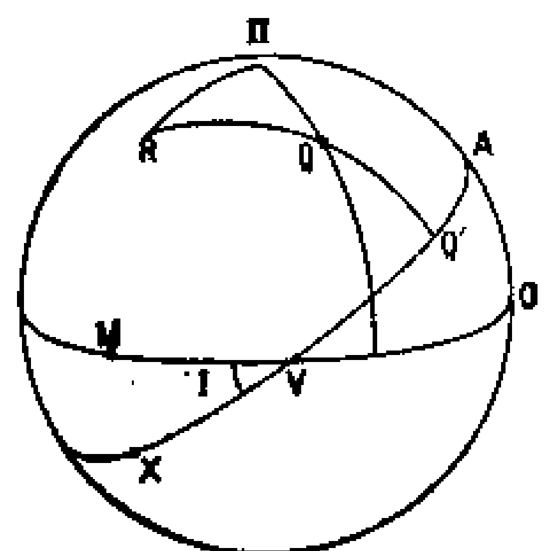


图 169

根据现在掌握的水星和金星的观测，还不能查出这种天平动，因而其是否存在还未敢断定．假设我们已经决定了这个交角 I 以及行星赤道的升交点在轨道面上的经度，那么怎样去决定行星表面的赤道坐标系，面且这个坐标系与以上所用的临时坐标系之间有什么关系？

设(图 169) Π 表示轨道 O 的极点，R 表示行星赤道面 A 的极点，V 表示升交点，M 表示临时坐标系的原点．设 G 为升交点在轨道上的经度，则

$$MV=G-L'_m$$

令 X 表示赤道上为下式所规定的一点：

$$XV=MV=G-L'_m$$

设如上所假定的，行星的自转周期等于其公转周期，则 X 点将固定在其表面上．因此，行星的表面坐标系是以其自转轴的极点 R 为其极点，以赤道面上的 X 点为其原点而规定的．于是行星表面上每一点 Q 为

$$XQ'=U \qquad Q'Q=W$$

两坐标所规定，其与暂时坐标 $\varLambda$ 和 D 的关系为下式所规定：

$$\cos D\cos(\varLambda-\gamma)=\cos W\cos(U-\gamma)$$
$$\cos D\sin(\varLambda-\gamma)=-\sin I\sin W+\cos I\cos W\sin(U-\gamma)$$

$$\sin D = \cos I \sin W + \sin I \cos W \sin(U-\gamma)$$

式内设 $XV=\gamma$.

将这些关系式应用于 X 点($U=W=0$)，便得如下的近似式：

$$A_X = \tan^2\frac{I}{2}\sin 2\gamma \qquad D_X = -I\sin\gamma \tag{8}$$

为明确起见，设取 $I=5^\circ$，则

$$A_X = 0^\circ\!.2\sin 2\gamma \qquad D_X = -5^\circ\sin\gamma$$

如上所言，这两个关系式规定了纬天平动，至于经天平动则不显著．根据观测，并用公式(8)可以决定 G 和 I 两个数值．

§142 火星的自转与位相

火星差不多是正球形，其扁度可能是 1/200 的数量级，因此在以下的讨论里，概不计入扁度．

自十七世纪以来，人们在火星表面上便观测到许多细节，而作为火星自转的标点，因而查出其自转周期为

1.0259565 日＝1 日 0 时 37 分 22.65 秒

自转轴的北极的赤经 a 与赤纬 d 也为人作了精密的测定，以后将举出其数值．

以 V 与 N (图 170) 分别表示火星的轨道而在其赤道面上的升交点(火星的春分点)及对于地球的赤道面的升交点．V 点的位置将在下面决定；至于 N 点，其赤经为 $+90^\circ$．现在依次定出两种行星中心的坐标系，皆以火星的赤道为基本面，但以这面上不同的两点为原点．第一种坐标系是用以规定地球和太阳对于行星中心的方位的，以 V 点为其原点．第二种坐标系为火星的自转轴所带动，用以规定火星表面上之点对于其中心的方位的，以其表面上的一点 O 为原点；这一点对于 V 点的位置，将表为时间的函数．

图 170

为了这些坐标系的相互转换，须先了解一些根数．火星轨道对于黄道与春分点的位置，由其升交点的黄经 Ω 与倾角 i 而决定．火星轨道的极点 Π 的赤道坐标，可解 P(天北极)Q (黄极)与 Π 三角形而求得之．再解 P, Π 与 R(火星自转极)三角形便得 N 点对于 V 点的经度 θ，以及火星的赤道面对于其轨道面的交角 I．最后，由第三个计算得出升交点 Ω 对于春分点在其轨道上的强度 ψ．以后的计算里，这些根数的数值都假设是已知的．

现在先计算地球对于 V 点的火星中心的坐标．设 α 与 δ 为火星的视赤经与赤纬，则由火星看地球的方向点 T 的视坐标为 $\alpha+180^\circ$ 与 $-\delta$．设 A 与 D 表示这一点对于以火星中心为原点的坐标，则可解三角形 PRT 而求出之，这三角形的要素为

$$\angle P=180^\circ-(a-\alpha) \qquad \angle R=90^\circ-(A-\theta) \qquad \angle T=C$$
$$PR=90^\circ-d \qquad RT=90^\circ-D \qquad PT=90^\circ+\delta$$

C 表示火星的北极对于其圆面中心的方位角. 于是

$$\left.\begin{aligned}&\cos D\cos(A-\theta)=\cos\delta\sin(a-\alpha)\\&\cos D\sin(A-\theta)=-\cos d\sin\delta+\sin d\cos\delta\cos(a-\alpha)\\&\sin D=-\sin d\sin\delta-\cos d\cos\delta\cos(a-\alpha)\\&\sin C\cos D=\cos d\sin(a-\alpha)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

年历里所载的是火星的视坐标,应对 a, d 与 θ 作章动的改正.

为了计算太阳的火星中心的坐标 A_0 与 D_0, 首先须将太阳在火星轨道上对于 V 点的经度 $\odot$ 算出来. 设 L' 为火星在其轨道上的真经度,显然有

$$\odot=L'-\Omega+\psi-180^\circ-\text{光行差}$$

年历里不载轨道上的真经度, 只载有行星的日心黄经 L; 如上节所讨论的, 我们可由下式求得其很好的近似值为

$$L'=L+\tan^2\frac{i}{2}\sin 2(L-\Omega)$$

至于光行差的改正, 等于 L 在光线由火星到地球与到太阳的距离之和的时间内 L 的变化. 若以其平均值代 $0^\circ\!.008$ 代替这一改正,则所产生的误差是可以忽略的. 因此,

$$\odot=L-\Omega+\psi+\tan^2\frac{i}{2}\sin 2(L-\Omega)+179^\circ\!.992\tag{2}$$

于是太阳的火星中心的坐标便可立刻求出为

$$\begin{aligned}\tan A_0&=\cos I\tan\odot\\\sin D_0&=\sin I\sin\odot\end{aligned}\tag{3}$$

(读者不应将这里以 $\odot$ 所表示的太阳对于以火星中心的经度, 和常以同一符号表示太阳的地心黄经混淆起来).

令 λ 表示相角,即太阳与地球在火星中心所占有的角距离, ω 表示在地面观测者眼里太阳对于火星的轴的方位角. 这两个量为下列关系式所给出:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\lambda=\sin D\sin D_0+\cos D\cos D_0\cos(A-A_0)\\&\sin\lambda\sin\omega=\cos D_0\sin(A-A_0)\\&\sin\lambda\cos\omega=\cos D\sin D_0-\sin D\cos D_0\cos(A-A_0)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

太阳对于天北极的方位角(其数值可由太阳与火星的赤道坐标求出)为 $C+\omega$, 因位相的方位角 Q 等于 $C+\omega+180^\circ$.

最后还要决定用以量度火星表面斑痕的位置的火面坐标系. 这个参照系的原点在火星的赤道上子午湾内的一点、在砂湾里一个暗带末端的义形处, 火面经度从这点起, 按逆向沿赤道计算, 由 0° 至 360°(这与日面经度按顺向计算是相反的).

火面参照系的位置完全为 $\tau=VO$ 这个角的数值所决定; τ 作均匀的增加, 但须加以光行差的校正. 因此设

$$\tau=\mu(t-0^{d}\!.005774\Delta-t_0)\tag{5}$$

μ 与 t_0 皆是常数, Δ 表示火星的地心距离.

于是火星圆面中心在火星表面的坐标,对于地面的观测者为

$$\text{经度上:}\quad \varDelta = \tau - A \qquad \text{纬度上:}\quad D \tag{6}$$

由以上的计算所得出的坐标是表观值，须加以光行差的改正.

下表汇集编制火星物理的星历表必需的数据. 火星极点的坐标是据卡米舍耳的数值(Camichel 见 B. A., 18, 1954). 假定火星的进动在其春分点上为 $7''.07$ (H. 斯特鲁维). 为了计算 τ, 更假定 1909 年 1 月 15 日 12 时火星圆面中心的经度为 $344^\circ.41$. 以 t 表示公元后的年数, 以 J. J. 表示儒略自从世界时 12 时起算, 以 N 表示黄经的章动, β 表示寻常以 B 表示的白塞耳数.

火　　星

$$a = 316^\circ.770 + 0^\circ.00676(t-1950.0) + 0^\circ.00015\frac{N}{1''} + 0^\circ.00029\frac{\beta}{1''}$$

$$d = 52^\circ.940 + 0^\circ.00349(t-1950.0) + 0^\circ.00008\frac{N}{1''} + 0^\circ.00019\frac{\beta}{1''}$$

$$\Omega = 49^\circ.172 + 0^\circ.00771(t-1950.0) + 0^\circ.00028\frac{N}{1''}$$

$$i = 1^\circ.850 - 0^\circ.00001(t-1950.0)$$

$$I = 24^\circ.783 + 0^\circ.00012(t-1950.0)$$

$$\theta = 136^\circ.769 - 0^\circ.00538(t-1950.0) - 0^\circ.00013\frac{N}{1''} + 0^\circ.00036\frac{\beta}{1''}$$

$$\psi = 144^\circ.941 - 0^\circ.00433(t-1950.0)$$

$$\tau = 149^\circ.722 + 350^\circ.89202(\text{J. J.} - 2433282.5) - 2^\circ.025\varDelta$$

$$\tan^2\frac{i}{2} = 0^\circ.015$$

例　计算 1937 年 1 月 1 日 0 时(世界时)火星的物理根数.

所需的数据可据上表计算或由法国天文年历里取出:

$$\begin{array}{ll}
a = 316^\circ.685 & \alpha = 205^\circ.941 \\
d = 52^\circ.897 & \delta = -9^\circ.094 \\
\Omega = 49^\circ.076 & \varDelta = 1.656 \\
i = 1^\circ.850 & L = 172^\circ.815 \\
I = 24^\circ.781 & a-\alpha = 110^\circ.744 \\
\theta = 136^\circ.837 & N = +17''.62 \\
\psi = 144^\circ.996 & \beta = +1''.48.
\end{array}$$

黄经 L 不受光行差的影响, 因为公式(2)所提供的 $\odot$ 的数值里, 已经作了这个校正. 章动的校正已经加于须加这一校正的数据之内.

1. 地球的火星中心坐标(公式组 1):

$$\cos D\cos(A-\theta) = +0.92342$$

$$\cos D\sin(A-\theta) = -0.18359$$

$$\sin D = 0.33704$$

$$\begin{array}{ll}
A-\theta = -11^\circ.245 & A = 125^\circ.592 \\
 & D = +19^\circ.697 \\
\sin C = 0.59920 & C = 36^\circ.813
\end{array}$$

2. 太阳的火星中心坐标(公式 2):

$$\odot = 172^\circ\!.815 - 49^\circ\!.076 + 144^\circ\!.996 - 0^\circ\!.014 + 179^\circ\!.992 = 88^\circ\!.713(+360^\circ)$$

$$\cot A_0 = 0.02270 \qquad A_0 = \quad 88^\circ\!.700$$

$$\sin D_0 = 0.41904 \qquad D_0 = +24^\circ\!.774$$

3. 位相(公式组 4):

$$\cos\lambda = 0.8249$$

$$\sin\lambda\sin\omega = 0.5451$$

$$\sin\lambda\cos\omega = 0.1498$$

$$\tan\lambda = 0.6850 \qquad \lambda = \ 34^\circ\!.42$$

$$\cot\omega = 0.2748 \qquad \omega = \ 74^\circ\!.63$$

$$Q = 291^\circ\!.45$$

4. 中心的经度(公式(5)与(6)):

$$\text{J. J.} - 2433282.5 = -4748\ 日$$

$$-4748\mu = 44^\circ\!.689 - 4628\ 周$$

$$\tau = 149^\circ\!.722 + 44^\circ\!.689 - 3^\circ\!.353 = 191^\circ\!.058$$

$$A = 65^\circ\!.466$$

5. 视直径 在单位距离处火星的视半径为 4″.68 (哈特韦格 Hartwig). 因此, 在本例里

$$2s = 5''\!.65$$

于是所要求的要素汇集如下:

A	中心的经度	65°.47	火　　星 1937 年 1 月 1 日 0 时(世界时)
D	中心的纬度	+19°.70	
C	自转轴的方位角	36°.81	
Q	位相的方位角	291°.45	
λ	相角	34°.42	
$2s$	视直径	5″.65	

图 171 表示从这些要素所推出的火星圆面上的经纬线并带位相的略图. 北在下, 如望远镜里所看见的倒象那样.

这样求得 1 月 1 日 0 时圆面中心的经度为 65°.47, 同样对 1 月 2 日 0 时为 55°.82. 于是用线性插值法求得火面本初子午线过圆面中心的时刻在 1 月 1 日 20.176 时或 20 时 10.6 分. 同样亦可计算在这两个期间任何一个时刻圆面中心的经度.

火星有两个卫星叫做"战傈" (Phobos, 火卫一)与"恐怖" (Deimos 火卫二). 它们对于火星中心的距离, 以火星的赤道半径表示, 分别为 2.76 与 6.92. 它们围绕火星运行的恒星周期为

$$0.31891\ 日 \quad 与 \quad 1.26244\ 日$$

火卫一的周日运动, 在火星上看是顺行的, 其视周期小于半个火星日; 火卫二的周日运动是逆行的, 其视周期比 5 个火星日还长. 这两个卫星的直径分别为 15 与 8 公里, 只于火星大冲时, 在大望远镜才能看见. 它们是 1877 年为霍耳(A. Hall)所发现的.

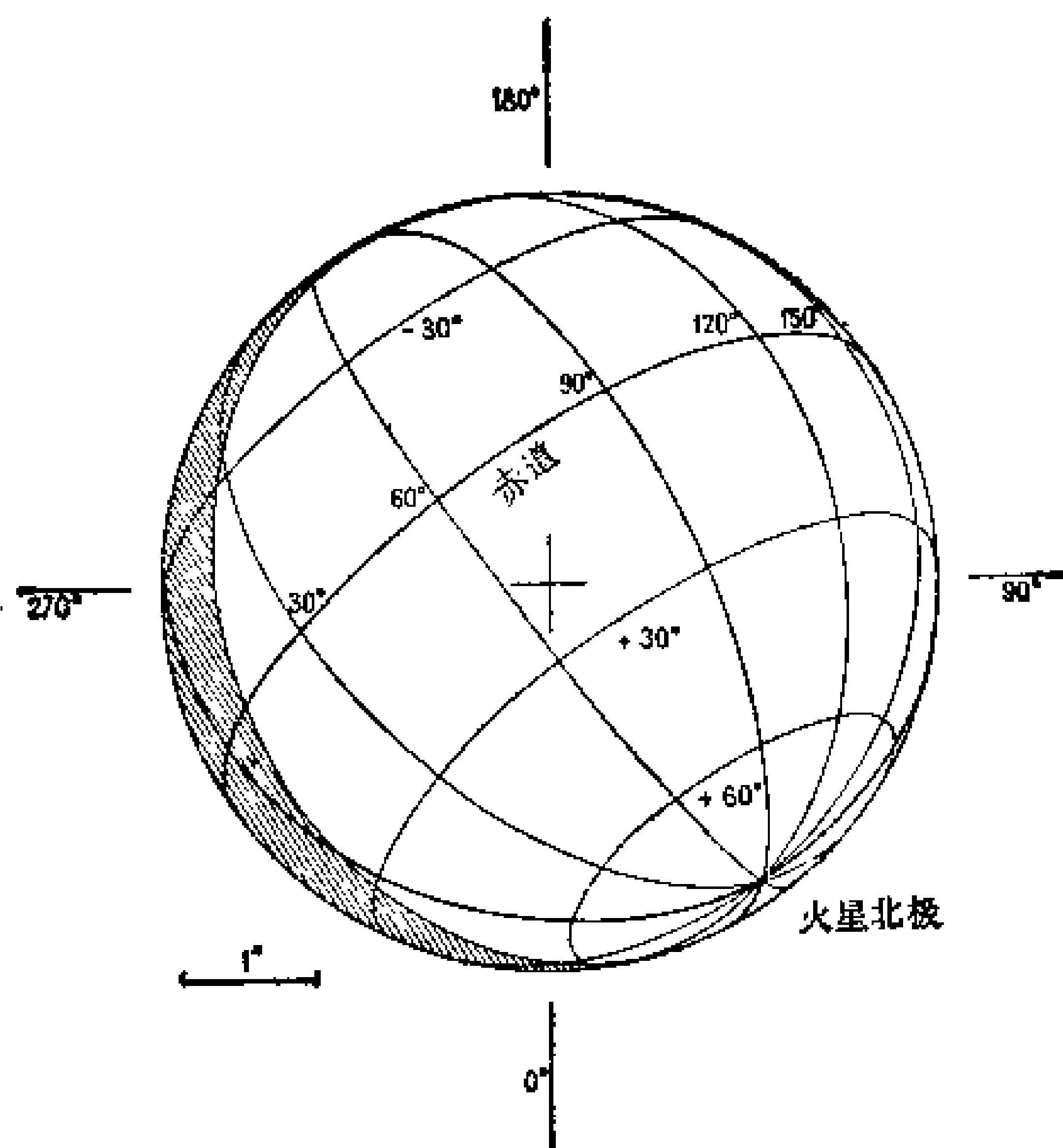


图 171　1937 年 1 月 1 日 0 时的火星

§143　木星的自转与位相

木星的形状是一个扁的旋转椭球，其扁度很显著，约为 1/15. 在 5.2 天文单位处，赤道径与两极径之差达

$$37''.9/15=2''.5$$

应用 §18 内的公式，可以查出木星表面上一定点的天文纬度 φ 与其中心纬度 φ' 的关系为

$$\tan\varphi=1.148\tan\varphi'$$

$\varphi-\varphi'$ 之差的极大值，在 $\varphi=47^\circ.0$ 处，$\varphi'=43^\circ.0$

一般地说，由于地球不在木星的赤道面内，木星圆面的视扁度 ε 略小于木星本体的真扁度. 由初等几何学可以得出这个数值. 图 172 表示木星表面的子午线椭圆，其两半轴分别为 a 与 b. 地球在 OT 方向上，与木星赤道面所成之角为 D. 圆面的极半轴便是由中心到平行于 OT 的切线 MN 的距离 $OH=b'$. 令 D' 表示切点 M 的偏近点角，则

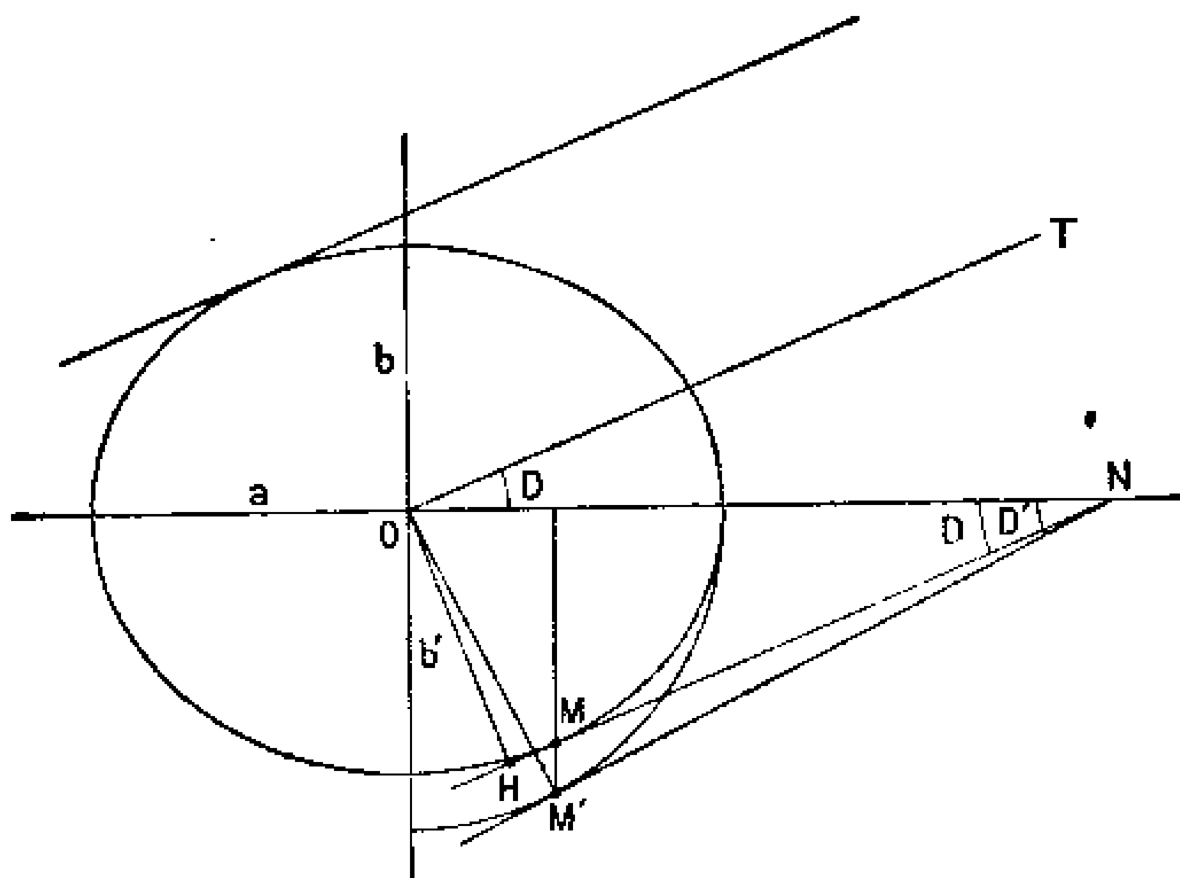


图　172

$$ON=\frac{a}{\sin D'}=\frac{b'}{\sin D}$$

从而 $$\varepsilon=\frac{a-b'}{a}=1-\frac{\sin D}{\sin D'}$$

又因 $$\frac{\tan D}{\tan D'}=\frac{b}{a}$$

故 $$\varepsilon=1-\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 D}$$

下表(取自英国航海历书)给出对应于 D 的 ε 的几个数值. 将长轴乘以 ε, 便得视圆面的两轴之差.

D	ε
0°.00	
	0.0667
0.89	
	0.0666
2.35	
	0.0665
3.21	
	0.0664
3.40	

有关木星自转的问题,可用前节讨论火星的方法来解决的.我们仍然保留以上所用的符号,这样,读者便可应用给出地球、太阳以及相角和相的方位角等木星中心坐标的各个公式,而不须加以改变.但是太阳对于木星的春分点的经度须作的光行差改正只是 0°.005 (而不是火星的 0°.008)而已.

木面经度的原点 O 到木星的春分点的距离 τ 的计算需要稍加解释. 木星的可见面上,没有自转周期不变的恒定斑纹. 大多数暗黑的斑痕,好象是木星而上的云带,既在运动,又易消逝. 木星上的大红斑,自十七世纪以来即被人加以观测与描绘,其自转周期也是有变化的. 由纬度 $-10°$ 至 $+10°$ 之间的赤道带斑痕所推出的自转周期,约为 9 时 50 分 30 秒=0.4100698 日;但由高纬度的斑痕所求得的自转周期,约为 9 时 55 分 40.63 =0.4136647 日. 因此,马尔思(Marth)将木星的自转分为 I 和 II 两个体系. 这两个周期与木星表面的个别细节的周期很不相合,而且这两系的周期与卡林顿对于太阳的自转周所规定的,同具有约定的意义.以后将举出有关这两个自转系的 τ 的表达式. 我们将木面赤道带的细节表为体系 I 的木面经度,至于所谓"温带"的细节(这里面包含红斑),则属于体系 II;但一般地说,这些细节的经度是随时间变化的,而且变化的多寡随情形而不同.大红斑和某些时期里出现在相同带上的暗区,在经度上的变化,每年有几十度之多.

太阳对于木星自转轴的方位角 ω, 在冲或合附近, 不超过 90° 或 270°, 即使其位相不显著. 因此对于扁球体的情形,明暗界限所表现的情况,便不需要讨论;由于太阳总是在木星的赤道面附近,明暗界限是一段椭圆弧,其短轴大约是木星的短轴. 而且,位相总不显著,方照时视角很小,不超过 12°. 圆面的扁度好象缩小一点,边缘的一边黑暗特别显著.

我们常以记录木而斑痕经过其中央子午线的时刻,来测定木心经度,但事实上观测者不能看见为位相所影响的边缘部分; 他所记录的是照明的边缘与明暗界限之间的等距处的斑痕的经过时刻. 这一点与真正的中央子午线,两者的经度之差,在冲前为正,冲后为

负. 因此观测的经度应加以下列一量的改正(单位是度):

$$\Delta A = \pm 57^\circ\!.3 \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

这些改正值用在圆面中心的经度上(对于 I 和 II 两系), 为简化观测的归算, 英国航海历书里载有这些经度的数值.

下表汇集编制木星的物理星历表必需的要素; 所用的符号和公式皆与前节相同, 只是除了光行差的校正和木面坐标有两个体系, 与火星的情形不同而已.

木 星

$$a = 268^\circ\!.045 + 0^\circ\!.00103(t - 1950.0)$$

$$d = 64^\circ\!.553 - 0^\circ\!.00017(t - 1950.0) + 0^\circ\!.00028 \frac{\beta}{1''}$$

$$\Omega = 99^\circ\!.949 + 0^\circ\!.01011(t - 1950.0) + 0^\circ\!.00028 \frac{N}{1''}$$

$$i = 1^\circ\!.306 - 0^\circ\!.00006(t - 1950.0)$$

$$I = 3^\circ\!.069 + 0^\circ\!.00001(t - 1950.0)$$

$$\theta = 222^\circ\!.079 - 0^\circ\!.01304(t - 1950.0) - 0^\circ\!.00026 \frac{N}{1''}$$

$$\psi = 323^\circ\!.787 - 0^\circ\!.00388(t - 1950.0)$$

$$\tau_{\rm I} = 239^\circ\!.72 + 877^\circ\!.90(\text{J. J.} - 2433282.5) - 5^\circ\!.065\Delta$$

$$\tau_{\rm II} = 238^\circ\!.85 + 870^\circ\!.27(\text{J. J.} - 2433282.5) - 5^\circ\!.021\Delta$$

$$\tan^2 \frac{i}{2} = 0^\circ\!.007.$$

例 计算 1937 年 5 月 2 日 0 时(世界时)木星的物理要素.

$a = 268^\circ\!.03$	$\alpha = 299^\circ\!.11$
$d = 64^\circ\!.56$	$\delta = -20^\circ\!.91$
$\Omega = 99^\circ\!.82$	$\Delta = 4.844$
$i = 1^\circ\!.31$	$L = 286^\circ\!.16$
$I = 3^\circ\!.07$	$a - \alpha = -31^\circ\!.08$
$\theta = 222^\circ\!.24$	$N = +17''\!.6$
$\psi = 323^\circ\!.84$	$\beta = +\ 1''\!.5$

经度 L 应减去光行差改正值: $0^\circ\!.005$.

计算的步骤与上节的例子相同, 因此这里只写出其结果:

1. 地球的木心坐标:

$$A = 341^\circ\!.07$$
$$D = -1^\circ\!.23$$
$$C = 347^\circ\!.18$$

2. 太阳的木心坐标

$$\odot = 330^\circ\!.17$$
$$A_0 = 330^\circ\!.21$$
$$D_0 = -1^\circ\!.53$$

3．位相

$$\lambda = 10^{\circ}.87$$
$$\omega = 91^{\circ}.71$$
$$Q = 258^{\circ}.89$$

中央子午线的改正值:

$$\Delta\Lambda = +57^{\circ}.3 \times 0.0090 = +0^{\circ}.51$$

4．中心经度

$$\Lambda_{\mathrm{I}} + 0^{\circ}.51 = 71^{\circ}.33$$
$$\Lambda_{\mathrm{II}} + 0^{\circ}.51 = 94^{\circ}.68$$

5．视直径

在单位距离处赤道视半径为 $98''.47$(森普逊).因此5月2日赤道视直径是 $40''.65$. 由于圆面的视扁度是 0.0666, 两直径之差是 $2''.71$, 联极径是 $37''.94$.

符号	名称		数值	木　星　1937年5月2日0时(世界时)
$\Lambda+\Delta\Lambda$	中心经度	I	$71^{\circ}.33$	
$\Lambda+\Delta\Lambda$	中心经度	II	$94^{\circ}.68$	
D	中心纬度		$-1^{\circ}.23$	
C	自转轴的方位角		$347^{\circ}.18$	
Q	位相的方位角		$258^{\circ}.89$	
λ	相角		$10^{\circ}.87$	
$2s$	赤道视直径		$40''.65$	
$2s(1-\varepsilon)$	联极视直径		$37''.94$	

§144　木星的卫星

现在已经发现的木卫有十二个,可以分为四群*:

1．与木星最接近的是木卫 V, 周期约为 12 时.

2．木卫 I, II, III, IV 是最大的, 也是最先发现的, 以发现者伽利略命名, 其周期自 1.8 日至 17 日.

3．木卫 VI, VII, X 的轨道和木星轨道的交角约为 28°, 但内面五个木卫在交角很小的轨道上运行. 这三个木卫的周期约为 8.5 月.

4．木卫 XII, XI, VIII 与 IX 逆行,周期约为两年.

下表记载木卫轨道的半轴(以木星的赤道半径为单位表示); 星等(远的六个是照相星等, 其余是目视星等, 均换算到 5.2 天文单位处). 更根据它们的光度, 计算了远的六个木卫的直径:

只有伽利略发现的四个木卫才有可以觉察的视直径, 虽然还是很小. 下表里的数字是根据卡米金耳的数据. 由这些数据推得的密度与月球的密度相近, 我们将其物理要素一并列入以资比较. 表内的半长轴 a 以天文单位表示

---

* 1974年9月新发现木星第十三颗卫星,与木星平均距离为1240万公里,绕木星周期282天——译者注

木　　　卫

号数	发现者与时期		星等	半长轴	恒星周期	直　径
V	巴纳尔德,	1892	13.0	2.53	0.498 日	190 公里
I	伽利略	1610	5.5	5.91	1.769	3300
II	伽利略	1610	5.7	9.40	3.551	2800
III	伽利略	1610	5.1	14.99	7.155	4900
IV	伽利略	1610	6.3	26.36	16.689	4600
VI	白里恩	1904	14.7	160.5	250.611	140
VII	白里恩	1905	17.5	164.5	260.06	19
X	尼科耳森	1938	19	165	260	12
XII	尼科耳森	1951	19	293	600	20
XI	尼科耳森	1938	19	317	692	12
VIII	默洛特	1908	17.6	329	739	19
IX	尼科耳森	1914	18.6	338	745	19

木卫	a	直　径		质 量	
		$\Delta=1$	地球=1	地球=1	密度
I	0.00281956	4″.5	0.26	0.0142	4.7
II	0.00448620	3″.9	0.22	080	4.0
III	0.0071559	6″.8	0.38	252	2.5
IV	0.0125865	6″.3	0.36	142	1.7
月球		4″.79	0.272	123	3.3

这些卫星的轨道都受到很大的摄动；它们的偏心率及其对于木星轨道面的交角虽然很小,但所受到的变化却相当大．下表转载森普逊(Sampson)的测量数据：半长轴 a 的数值,表为单位距离处的角秒数,恒星周期 T, 会合周期 T' (表为平日)；与平经 l, 光在黄道面内计算至木星轨道的升交点,再在卫星轨道面内计算至卫星轨道的升交点,最后在卫星轨道面内计算至卫星．时间 t 以平日计,自 1900 年 1 月 0 正午(世界时)起算．

木卫	a	T	T'	平黄经 l
I	581″.57	1.769137 日	1.769860 日	$142°.600+203°.488992t$
II	925.34	3.551180	3.554094	$99.551+101.374762t$
III	1476.01	7.154548	7.166387	$168.026+50.317646t$
IV	2596.15	16.688988	16.753552	$234.408+21.571110t$

由伽利略卫星的观测,发现它们围绕木星运行,表现有食、凌、掩几种现象．

(1) **木卫食**　由于伽利略卫星的轨道与木星轨道的交角只有几度，而木星的直径比这些卫星至其中心的距离较长,因而这四个卫星常会运行到木星的阴影里而被食．

从太阳看木星的视极半径,平均值为

$$P=0°.005$$

以 a 表示木卫至木星中心的距离，r 表示木星的极半径,则木星的极轴视差大约是

$$P' = \frac{r}{a}$$

从木星看太阳的视半径为

$$s = 0^\circ.051$$

最后，令 s' 表示从木星看木卫的视半径. 利用这些数据于 § 125 里所推出的关于月食的计算里去. 若在木星冲日时，木卫对于木星轨道面的纬度 β 小于如下的极限值，则木卫将成为全食：

$$\beta_{极值} = P + P' - s - s'$$

对于伽利略卫星所得出的结果如下：

	P'	s'	$\beta_{极值}$
I	9°.05	0°.22	8°.8
II	5.69	0.12	5.5
III	3.57	0.13	3.4
IV	2.03	0.07	1.9

但前三个卫星对于木星轨道面的木心纬度，绝没有达到以上所算出的极限值；因此它们在每一运行周里必发生全食. 但木卫 IV 的纬度在两个比较窄狭的界限内变化，情形便不与前三个卫星相同，由于它的距离较远，食限小至 1°.9，有些时期是会超过的，那时木卫 IV 便不会为木星所食（例如 1939 年 9 月至 1942 年 6 月；1945 年 8 月至 1948 年 10 月）.

(2) 卫影凌木　当木卫与太阳相合时，它将其阴影投射在木星面上，这便演成卫星阴影在木星圆面上经过的现象. 由上表内的数据可见，这种卫影凌木所造成的日食总是全食，因为太阳的木心视直径只有 0°.102，而木卫的视直径，最远的一个，也只是 0°.140，其他三个更超过这一数值. 但是对于木卫 IV 面言，阴影的视直径相当小，面而很难观测；由于衍射环与半影混淆，因而不能分辨，又面木卫的反照率低，其阴影与卫星本身差不多一样暗淡. 木卫之影凌木所遵循的条件与木卫食相同. 木卫 I、II、III 在每一运行周里有一次阴影凌木，至于木卫 IV，亦如食一样，在无食的时期里不会出现.

(3) 木卫凌木　当木卫在下合时，其圆面投影在木星的圆面上时，则发生木卫凌木. 设 B 表示地球在木卫轨道面上的高度，则在地上看，这轨道是椭圆的，其两半轴为 a 与 $a\sin B$. 若 $a\sin B$ 小于木星视圆面的极半轴，则发生木卫凌木现象，那时木卫在木星圆面上走一段弧，一般可以当做是大约平行于木星的赤道之弦.

前三个木卫，在每一运行周里，必从木星圆面前经过. 至于木卫 IV，其凌与食或影凌之不出现，差不多是在相同的时期之内. 但在极限情形，可以有木卫凌木而无卫影凌木，或者反过来说，太阳与地球对于卫星的轨道面一般不在相同的高度上.

(4) 木卫掩　木卫在上合时它可能隐藏在木星圆面背后，造成被掩的现象. 这些现象发生所遵循的定律与木卫凌木相同. 前三个木卫在每一运行周里必被掩蔽一次，但木卫 IV 则有时不致被掩. 在极限的情形，木卫 IV 可能只有食面无掩，或只有掩面无食.

凌、掩、食经历的最长的时间，发生于地球和木卫同在木星的赤道面内之时. 这段时间的一个相当好的近似值，可从木卫的平均会合运动除其赤道视差的两倍而求得. 至于木卫掩尽（即其圆面自开始被掩以至掩既）的一段时间，可由其平均运动除其木星的视直径而

求得. 这两项数字对于伽利略卫星,所求得的数值如下:

	时	分	分
I	2	18	3.1
II	2	53	3.4
III	3	40	7.5
IV	4	52	9.3

一般地说, 由于地球不在赤道面内, 凌、掩、食的时间经常比较短些, 而掩尽一段时间要长一些; 这些时间对于木卫 IV 可能很长, 当这现象发生于木星的一个极点附近之时, 掩与凌可能成为部分的.

木星将冲之前, 木卫食发生于其没入木星圆面背后(掩)之前一会儿. 所以人们只能看见木卫进入本影与复现, 而不能见掩始与食终. 相反的情形则发生于冲日之后. 在相同的时期里,木卫凌木之际,其阴影总伴随着木卫。在冲之前,影在卫星之前;在冲之后,影在卫星之后.

方照时相同的现象发生的条件大不相同. 那时木星的相角平均是 $11^{\circ}.1$. 以卫星的平均会合运动除这个角,便大约求得自进入本影(初亏)至掩始[或自本影出来(食终)至复现]之间所经历的时间. 对于伽利略卫星的这段时间,求得的数字是

	时	分		时	分
I	1	18	III	5	18
II	2	38	IV	12	24.

若将上表内的时间和凌、掩、食所经历的最长时间加以比较,即使是在方照之时,这些现象对于木卫 I 总是象以上所说那样. 当木卫 I 在上合之时, 我们只能看见它的食始与掩终,或掩始与食终. 当木卫 I 在下合之时,我们总可在或长或短的一段时间内看见它自身凌木, 与影凌同时发生于木星圆面之上. 木卫 II 一般也有这种情形, 只是除了地球在这卫星的轨道面之南或北最高处(例如 1952 年 8 月). 至于木卫 III 与 IV 经常发生的现象是被掩前的食终, 或食始前的掩终(复现). 这是木星快到方照之时, 人们所观测到的现象. 在相同的情况下,我们不能同时看见木卫与其阴影同时凌木.

法国天文年历里载有伽利略卫星每年每日某个小时的动态图, 还载有每月中食的起迄点和方位.

现在回头来讨论木卫的经度. 容易证明, 前三个木卫的平黄经(其表达式见上)严格地满足如下的关系式:

$$l_{\rm I}-3l_{\rm II}+2l_{\rm III}=180^{\circ} \tag{1}$$

这等于说,这三个木卫对于恒星的平均运动有如下的关系:

$$n_{\rm I}-3n_{\rm II}+2n_{\rm III}=0$$

相同的关系显然也存在于其平均的会合运动, 因为会合运动与恒星周运动度相差只是一个常数.

关系式 I 还可写为

$$l_{\rm I}-l_{\rm II}+2(l_{\rm III}-l_{\rm II})=180^{\circ}$$

$$3(l_{\rm I}-l_{\rm II})+2(l_{\rm III}-l_{\rm I})=180^{\circ}$$

由此得出几个重要的结论如下:

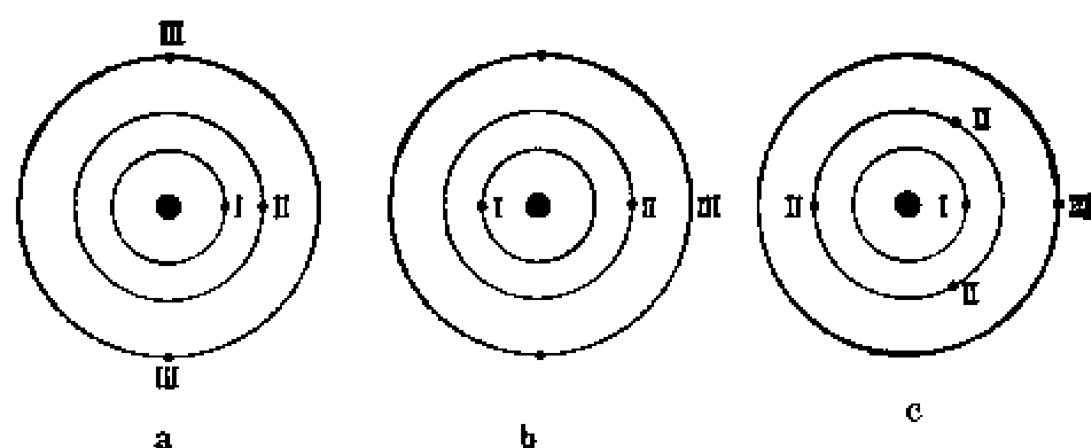


图 173

1. 不能同时有

$$l_{\mathrm{I}}-l_{\mathrm{II}}=0 \qquad l_{\mathrm{II}}-l_{\mathrm{III}}=0$$

可见前三个卫星不能同时合木；不能同时被食，也不能同时凌木.

2. 若 $l_{\mathrm{I}}-l_{\mathrm{II}}=0$ 或 360°,

则必然有 $l_{\mathrm{III}}-l_{\mathrm{II}}=\pm 90^\circ$

因此设木卫I与II在合，则其公共向径与木卫III的向径正交. 这样，当木卫I与II同时发生食或凌之际，木卫III将在东或西大距处(图141*a*).

3. 若 $l_{\mathrm{III}}-l_{\mathrm{II}}=0$

则必然有 $l_{\mathrm{I}}-l_{\mathrm{II}}=180^\circ$

换句话说，当木卫II和III在合时，木卫I和它们相冲. 这样(如在1938年4月28—29日)，这三个卫星于22时22分至0时28分，不能为人看见，那时木卫I凌木，而木卫II与III被掩. 1938年12月17日，由于一种相反的动态，这三个卫星于13时36分至14时17分，也同时不能为人看见(图141*b*).

4. 若 $l_{\mathrm{III}}-l_{\mathrm{I}}'=2k\pi$

则同时必有 $l_{\mathrm{II}}-l_{\mathrm{I}}=\dfrac{4k-1}{3}\pi$

因此当木卫I与III同时合木时，木卫II的位置只能有如下的三种：它和木卫I与III相冲；或者在它们之前或后60°(图173*c*). 在最后这两个情形里，它的食或凌与木卫I与III同时发生相同的现象之前或后约14时.

当前三个木卫不见时，木卫IV只能偶尔因食、掩或凌而消逝，那时木星好象失掉了它的卫星；例如，1939年7月17日4时12分至5时0分，木卫I凌木，其余三个卫星在食或掩中. 这现象很罕见，而且它的重演并没有任何周期，因而不能对它作长期预报.

以上讲过，伽利略卫星的运动受到很大的摄动. 其起因有些从太阳而来，这样产生的差数与月球运动上的差数是同类的；但是这里还须加入它们彼此之间的摄引和木星的大扁度的影响. 木卫的理论还很不完善，须待研究.

木卫的会合运动受到木星日，心运动的中心差与光行差的影响，中心差的周期等于木星的近点周，可达5°.56；伽利略卫星经历这段弧所需的时间为

	时	分		时	分
I	0	39	III	2	39
II	1	19	IV	6	13

当木星的平近点角为90°时，以上四卫星现象的发生将推迟这段时间；而当木星的平近点

角为 270° 时，卫星现象的发生将提早这段时间．至于光行差的效应已经叙述于 §52，它的周期等于木星的会合周，即 399 日（罗梅尔）．

§145　木卫的星历表

现今使用的伽利略卫星运动的表是森普逊所编制的(1910)．每年的法国天文年历里载有一个摘要．这个星历表里有这些卫星的下列根数：

1．卫星的木心经度与地球的经度之差减 180°，均在卫星的轨道面内计算．这个根数表为 u．随时间 t 增长，当卫星在上合凌木之时为零．

2．地球的木心纬度 B，从卫星的轨道面向北计算．

3．这平面的北极对于观测者的方位角 P．

以 a 表示卫星至木心的平均距离（以天文单位计算），以 R 表示木星的地心距离，以 ρ（近于 1 的数）表示卫星的向径；最后以 s 与 p 分别表示卫星的视距离与其对于木心的地心方位角．测微器的观测直接提供 s 与 p，下面说明怎样从森普逊表去推算这两个数值，以便与观测值加以比较．

设想一个顺向直角坐标系，原点在木心 J，其 z 轴指向与地球方向相背之点，木卫轨道面的两极在 yJz 面内．卫星对于这三面体的坐标便是

$$x=a\rho\sin u$$
$$y=a\rho\cos u\sin B$$
$$z=a\rho\cos u\cos B$$

卫星对于木心的地心较差坐标 s 与 p 为下列方程式所给出

$$s\sin(p-P)=\frac{x}{R+z}=\xi$$
$$s\cos(p-P)=\frac{y}{R+z}=\eta$$
$$s=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$
$$\tan(p-P)=\frac{\xi}{\eta}.$$

表为足够的近似值，

$$\xi=\frac{a\rho}{R}\left(1-\frac{a\rho}{R}\cos u\cos B\right)\sin u$$
$$\eta=\frac{a\rho}{R}\left(1-\frac{a\rho}{R}\cos u\cos B\right)\cos u\sin B$$

为了将 ξ，η 与 s 表为角秒，须以 206265 乘右端或者将单位距离上右端开始的因数 a 表为角秒，而将括弧内的 a 仍表为天文单位．我们将使用森普逊的有关 a 的数值：

I	581″.575	0.00281956 天文单位
II	925.345	0.00448620
III	1476.01	0.0071559
IV	2596.15	0.0125865

表中所给出的数字是几何学性质的．为了计算光行差，我们假设木星与其卫星皆在黄道面内，而卫星的轨道是正圆形的；这些为便利计算而作的假设，带来的误差并不显著．

行星的光行时差为$\tau=R:c$，c表示光速．卫星的光行时差是$\tau_0+\tau_1=(R+z):c$．在黄道面内以a为半径的正圆轨道的假设下

$$\tau_1=\frac{a}{c}\cos u_1$$

u_1表示u角在$t-\tau_0-\tau_1$时的数值．t时木星的视位置相当于$t-\tau_0$的几何位置；至于同一t时卫星的视位置，相当于它在$t-\tau_0-\tau_1$时的几何位置．于是令s_0表示$t-t_0$时卫星至行星的几何学角距离，在τ_1时间内行星在黄道上移动了一个小角，以$\mu\tau_1$表示，μ表示木星对于地心运动的角速度．因此t时视距离等于

$$s=s_0-\mu\tau_1=s_0-\mu\frac{a}{c}\cos u_1$$

为了计算光行时差，只须决定卫星的几何学位置等于s的时期；令$t-\tau_0-\tau_1-\tau_2=t-\tau$为这个时期．容易了解，几何学的距离改变了$\mu\tau_1$所需的时间．由于$s_0$的导数等于

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_1\frac{a}{R}\cos u_1$$

可见τ_2得由方程式

$$\tau_2\left(\frac{du}{dt}\right)_1\frac{a}{R}\cos u_1=\mu\tau_1$$

求出．另外du/dt是卫星的会合运动的角速度．因此设以n表示其对于恒星的平均运动，则

$$\mu=\left(\frac{du}{dt}\right)_1-n$$

简化后，得
$$\tau=\tau_0+\tau_1+\tau_2=\frac{R}{c}\frac{n}{\left(\frac{du}{dt}\right)_1}+\frac{a}{c}\cos u_1$$

因为t时卫星对于行星的位置，即其在$t-\tau_0$的相对的几何学位置．为了对于τ作数字的计算，可由给出u值的下表求du/dt，并采用如下的常数：

	$a:c$	每12时的n
I	1ˢ.4	101°.744
II	2.2	50.687
III	3.6	25.159
IV	6.3	10.786

若欲决定t时卫星对于地心观测者的视动态，先求每个卫星在$t-\tau$时几何位置的s与p的数值，光行时差随每个卫星而不同．

为了结束光行差的讨论，我们应该对于卫星发生各种现象的时刻，计算光行差的改正值．

掩与凌应据卫星与行星圆面的相对位置而决定．因此我们先计算几何的现象，并在求得的时刻上加入上面讨论的光行时差τ，对于掩使$\cos u_1=1$，对于凌则使$\cos u_1=-1$．

食与影凌的情况是不同的，由木心所见的现象的时刻：当木卫与太阳的木心视经度之差为0°时，则发生影凌；为180°时发生食．因此，太阳的光行差k提早现象发生的时刻，而卫星的光行差k'则推迟现象发生的时刻，故总延迟为$(k'-k):n$．用§52里的公式容易求得k与k'．如此求得的结果如下：

	k'	$k'-k$	对于 1^s 的 n	$\frac{k'-k}{n}$
I	$11''.92$	$+2''.94$	$8''.48$	$+0^s.35$
II	9.45	+0.47	4.22	+0.11
III	7.48	−1.50	2.10	−0.71
IV	5.64	−3.34	0.90	−3.71

以上谈的是木心观测者所见的情况.对于地心观测者,延迟的时间还须增加光线在行星与地球之间传播的时间 τ_0. 在影凌的情形, 阴影形成于行星的表面上,在食的情形,木卫至地球间的距离,很近似地等于卫星至木星,与木星至地球间之距离的总和. 因此光行差的数值在食与影凌两种情形同为

$$\tau_0+\frac{k'-k}{n}=\frac{R}{c}+\frac{k'-k}{n}$$

开始计算木卫的现象以前,先决定木卫 I 在 1937 年 5 月 1 日 18 时(世界时)的较差坐标.

由法国天文年历里表载数的内插求得 $\tau_0=40$ 分 16 秒. 另外,于 17 时 20 分,表内所给出的每 12 时的 u 的变化为 $100^\circ.92$. 故

$$n:\left(\frac{du}{dt}\right)_1=101^\circ.74:100^\circ.92=1.0081$$

由于含 $\cos u_1$ 之项在本问题里是可以略去的,故

$$\tau=40 \text{ 分 } 36 \text{ 秒}.$$

于是计算卫星在 17 时 19 分 24 秒的几何位置. 那时

$$B=-1^\circ.284 \qquad P=-12^\circ.841 \qquad R=4.8489$$

$$u=303^\circ.039 \qquad \rho=1.0041$$

由这些数字求得如下的结果:

$$\frac{a\rho}{R}=120''.44$$

$$1-\frac{a\rho}{R}\cos u\cos R=0.99968$$

$$\xi=-100''.93$$

$$\eta=-\quad 1''.47$$

$$s=\quad 100''.94$$

$$p-P=269^\circ.17 \qquad p=256^\circ.23$$

至于有关木卫现象本身的理论,分两步讨论于下. 首先假设卫星缩小为点,这样求得的结果是其圆面中心的情形, 也是年历里所预报的情形. 若要将观测的结果和理论加以比较,必须将卫星的视直径考虑进去,这是计算第二近似值时应当做的.

先讨论最简单的,即掩与凌的情形,暂且略去木星的扁度. 设以 σ 表示行星在单位距离处的视半径,以 R 表示其地心距离,卫星的中心投影在视圆周上之时,须满足下式:

$$s=\sigma:R$$

这又可以写为

$$R^2(\xi^2+\eta^2)=\sigma^2 \tag{1}$$

为了回到实际的情形,将圆面的视周界当做是椭圆,两个半轴为 σ 与 $\sigma(1-\varepsilon)$, 而短轴的

方位角为 C(见 § 142). 以上所推出的较差坐标, ξ 与 η 的表达式是对于木心直角参照系的, η 轴的方位角与卫星的轨道面的法线的方位角相同. 设取木星的视圆面的轴为坐标轴, 则卫星的较差坐标的新表达式为

$$\xi'=\xi\cos(C-P)-\eta\sin(C-P)$$
$$\eta'=\xi\sin(C-P)+\eta\cos(C-P)$$

$(C-P)$ 角经常很小, 只有几十分之一度. 因此 ξ' 与 ξ, η' 与 η 相差都很小.

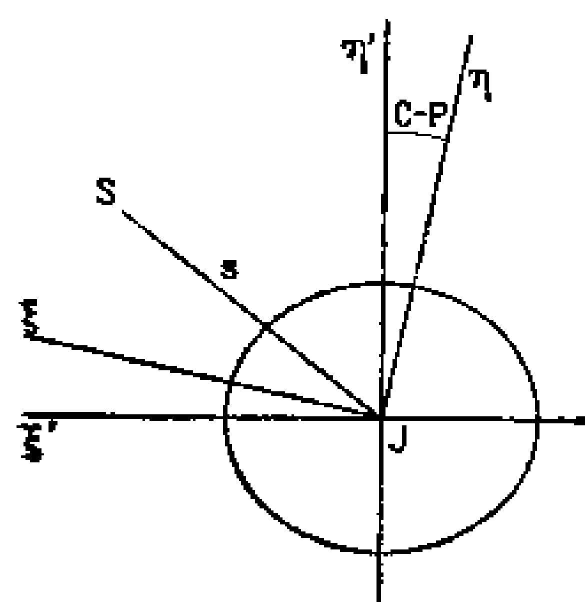


图 174

若以
$$q=\frac{1}{1-\varepsilon}$$
乘 η', 则行星的椭圆面变为正圆形, 方程式(1)便应写为

$$R^2(\xi^2+q^2\eta^2)=\sigma^2 \tag{2}$$

为简化书写计, 令

$$Q=\rho\left(1-\frac{a\rho}{R}\cos u\cos B\right)$$

则方程(2)可以写为便于计算的如下形式:

$$(1-q^2\sin^2 B)\sin^2 u=\left(\frac{\sigma}{aQ}\right)^2-q^2\sin^2 B \tag{3}$$

为了决定与 1 相差不多的 Q 的数值, 在掩的情形使 $\cos u=1$, 凌的情形使 $\cos u=-1$. 于是容易由方程式(3)来对 $\sin u$ 求解. 对于每个现象推出两个符号相反、绝对值很接近的数值(其差异主要是由于 Q 的变化), 其中一个对应于掩始或凌始, 另一个对应于掩终或凌终. 时间的对应值由 $u(t)$ 表作逆内插而求得, 只须在这些时刻上加入上面所推出的光行时差改正值.

下表是根据森普桑的数据所算出的有关 σ 的数值:

	$\sigma:a$	$(\sigma:a)^2$
I	0.16932	0.028669
II	10642	011325
III	06672	004451
IV	03793	001439

关于掩, 只说这些. 至于凌, 还须考虑行星的位相. 冲前凌始于卫星进入行星圆面的边缘, 即在行星球体视周界经过之际; 但凌终则发生于从行星球体被照明部分的明暗界限出来之时, 因此是在第二次经过边缘的前一点时间. 冲后, 这次序便反转过来, 那时凌始发生于明暗界限上.

为了计算位相的改正, 假设不考虑太阳在木星赤道面上的高度 D_0(§ 143); 这假设所介入的误差是可以忽略的. 因此, 明暗界限可以看做是半个椭圆, 其两半轴的位置如圆面那样, 但其长度分别等于 $\sigma\cos\lambda$ 与 $\sigma(1-q)$, λ 表示相角. 将这半椭圆变形为半径为 σ 的圆, 应以

$$q_\lambda=\mathrm{soc}\,\lambda$$

乘 ξ, 以 q 乘 η. 于是方程式(2)应为下式所代替:

$$R^2(q_\lambda^2\xi^2+q^2\eta^2)=\sigma^2 \tag{2b}$$

或

$$(q_\lambda^2-q^2\sin^2 B)\sin^2 u=\left(\frac{\sigma}{aQ}\right)^2-q^2\sin^2 B \tag{3b}$$

我们用没有改变的方程式(3)去求不受位相影响的边缘上的凌.

对于食与影凌的计算，不但将卫星，而且将太阳也看做是点，这样简化后的问题便与前面的问题没有什么差异，只须将太阳代替以上理论里的地球，便可应用于现在讨论的情形了.

因此，设以 B_0 表示太阳在卫星轨道面上的木心高度，以 v 表示地球的经度减去太阳的经度之差，两者均在这个轨道面上计算，并以 q_0 表示 $q=1:(1-\varepsilon_0)$ 那个对应于太阳在赤道面上的高度 D_0 的数值(§ 143)，对于食与影凌，代替方程式(3)的方程将是

$$(1-q_0^2\sin^2 B_0)\sin^2(u+v)=\left(\frac{\sigma}{aQ_0}\right)^2-q_0^2\sin^2 B_0 \tag{4}$$

式内

$$Q_0=\rho\left(1-\frac{a\rho}{R}\cos(u+v)\cos B_0\right)$$

对于食，以 1 代 $\cos(u+v)$；对于影凌，以 -1 代 $\cos(u+v)$

由方程式(4)立刻可以求得食始与食终的 $u+v$ 之值；更由是推出对应的时刻，再加入光行时差. 但在影凌的情形(正如以上所说的卫凌的情形)，还须考虑行星的位相. 冲前卫影初形成于地上观测者看不见的照明半球的部分上. 只在阴影达到边缘之时才被看见. 同样，冲后阴影一过边缘即看不见. 前者推迟了卫影进入木面的时刻，后者提早了卫影从木面出去的时刻. 容易了解卫影经过边缘与卫星经过明暗界限是相关的，因此改变后的方程式(3b)可以同样用去求解

$$(q_\lambda^2-q_0^2\sin B_0)\sin^2(u+v)=\left(\frac{\sigma}{aQ_0}\right)^2-q_0^2\sin^2 B_0 \tag{4b}$$

至于卫影过明暗界限用方程式(4)计算便可以了.

如上所言，木卫现象的年历表里，并未考虑太阳和卫星的视直径. 这些近似值已足够作为预报之用. 但观测的归算需要的精度较高，因此在刚才讨论的问题里，还须计入卫星与太阳的视直径.

假使木星的圆轮，亦如太阳与卫星那样，皆可看做是圆形的，则这第二近似值并不难求得. 在计算掩与凌的外切或内切之时，便是这样做的：即在方程(1)里，以 $\sigma+\sigma'$ 或 $\sigma-\sigma'$ 代 σ，σ' 表示卫星在单位距离处的视半径.（我们不在此讨论影凌，因为这现象不能精密地被人观测，但是这问题容易用类比法去解决的.）首先研究木星的本影锥与半影锥.

由于这里考虑了木星的日心视半径，在以太阳为一点的假设下，影锥变为圆柱. 于是本影锥与半影锥有相同的半顶角，皆等于由木星处看太阳的视半径. 设 r 表示行星的向径，则这半顶角大约等于 $960'':r$. 因卫星对行星的距离为 ρ，本影圆与半影圆的半径之差的一半，在这距离处，以天文单位表之为

$$\frac{960''a\rho}{206265r}$$

在单位距离处，这一量所配的角 σ''，可由下式求得其表为角秒的数值：

$$\sigma''=\frac{960''a\rho}{r}$$

在 $\rho=1$, $r=5.20$ 的情形，求得

I	$\sigma''=0''.52$	III	$\sigma''=1''.32$
II	0.83	IV	2.32

这些数字应以因数 $\frac{5.20\rho}{r}$ 乘之，始能用于以上推求的方程里去.

于是容易了解：如不考虑木星的扁度，则方程式(1)里的 σ 应为下列的数字所代替：

对于与半影外切：　以 $\sigma+\sigma'+\sigma''$ 代 σ

对于与本影外切：　以 $\sigma+\sigma'-\sigma''$ 代 σ

对于与本影内切：　以 $\sigma-\sigma'-\sigma''$ 代 σ

余下的还须将木星圆面的扁度介绍进理论中去，但严格的计算很是繁重. 可是对于实际的需要，可利用如下的设想去建立一个近似的理论. 半径为 σ' 而与两半轴为 σ 与 $\sigma(1-\varepsilon)$ 的椭圆相切的圆，其中心的轨迹，是与 E 有同样的位置(图 175)面且与 E 为同心的另一椭圆 E' 相差不远，E' 的两半轴为 $\sigma+\sigma'$ 与 $\sigma(1-\varepsilon)+\sigma'$. 借有限项展开式，读者容易证明，实际轨迹与椭圆 E' 之差对于椭圆 E 的扁度 ε 是二阶的小量. 若不但设扁度而且设 $\sigma':\sigma$ 皆是小量，则这差数将是三阶的小量，因此可以略而不计.

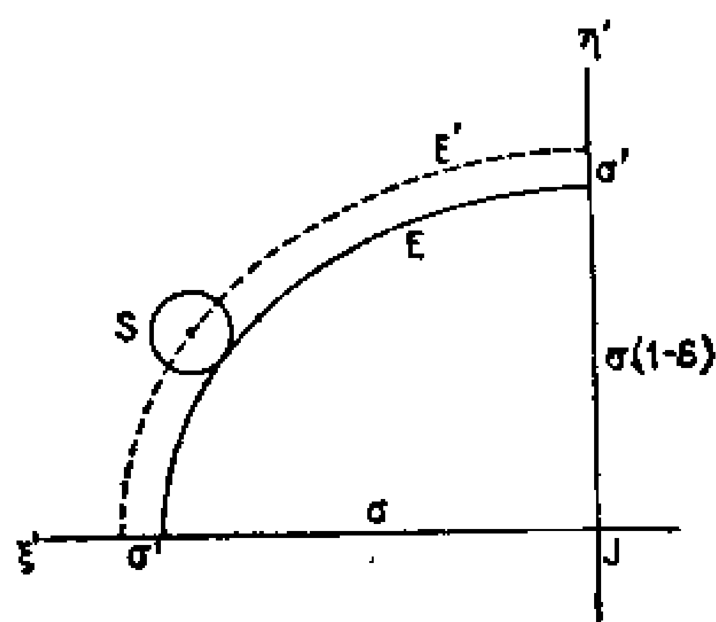


图 175

结论 为了木卫现象的计算，不但考虑到木星圆面的扁度，而且还计入卫星与太阳的视直径，仍可使用方程(3)与(4)，只是须用新的数值去代 σ 与 ε 或 ε_0(引入在 q 或 q_0 的计算里). 须代用的新数值汇集于下：

		代 σ：	代 ε：
凌或掩	外切	$\sigma+\sigma'$	$\varepsilon:\left(1+\frac{\sigma'}{\sigma}\right)$
	内切	$\sigma-\sigma'$	$\varepsilon:\left(1-\frac{\sigma'}{\sigma}\right)$
食	半影外切	$\sigma+\sigma'+\sigma''$	$\varepsilon:\left(1+\frac{\sigma'+\sigma''}{\sigma}\right)$
	本影外切	$\sigma+\sigma'-\sigma''$	$\varepsilon:\left(1+\frac{\sigma'-\sigma''}{\sigma}\right)$
	本影内切	$\sigma-\sigma'-\sigma''$	$\varepsilon:\left(1-\frac{\sigma'+\sigma''}{\sigma}\right)$

下面两表提供以下几个量的数值：

1．须代替 $\sigma:a$ 之量的数值.

2．为计算 q 或 q_0 应乘 ε 或 ε_0 的因数. 这里以 σ'' 的平均值代替 σ''. 对于较远的木卫，须计算其为 r 与 ρ 的函数的确切值.

	I	II	III	IV
$(\sigma+\sigma'):a$ ………	0.17334	0.10866	0.06918	0.03927
$(\sigma-\sigma'):a$ ………	0.16530	0.10418	0.06426	0.03659
$(\sigma+\sigma'+\sigma''):a$ …	0.17423	0.10955	0.07007	0.04016
$(\sigma-\sigma'+\sigma''):a$ …	0.17245	0.10777	0.06829	0.03838
$(\sigma-\sigma'-\sigma''):a$ …	0.16441	0.10329	0.06337	0.03570
ε 或 ε_0 的因数	0.9768	0.9794	0.9644	0.9657
	1.0243	1.0215	1.0383	1.0367
	0.9718	0.9714	0.9521	0.9443
	0.9819	0.9876	0.9770	0.9883
	1.0299	1.0303	1.0531	1.0627

编制这两个表时，我们采用了森普逊的 σ' 的数值，它们和上节里的稍有差异. 以 ε' 或 ε_0' 表示改正后的 ε 或 ε_0，并以 q' 或 q_0' 表示改正后的 q 或 q_0.

由以上的计算方法得来的结果，其近似度已够大多数的用途. 如果需要更高的精度，例如决定改正值，去改进木卫的轨道根数，和木星与木卫的直径，以及木星的扁度等问题，更好的办法是计算卫星的较差坐标与其视直径，以达到森普逊表内所具有的精密度，以及计算星历表所提供的时期附近每分钟的较差坐标；以后再用内插值法测定与讨论的现象各个位相所对应的时刻.

回头来讨论方程式(3)与(4)的数字计算. 这两式里的 B, u 与 ρ 等数字载于法国天文年历. 至于有关太阳的 B_0 与 v 虽不在年历里，但是食和影凌的计算所需要的；因此须由另外的计算去决定其数值. 最好的办法是采用§143 内太阳的木心坐标的计算方法.

令 T 与 S 分别表示(图 176)天球上代表地球与太阳对于木心的方向，π 表示木星的极点，π' 表示卫星的轨道的极点. 因 π 与 π' 在天球上相当接近，我们可用以下推出的较差关系，将 $TS\pi$ 三角形的要素转换为 $TS\pi'$ 三角形的要素. 由§143 里的公式可以求得以行星为心的地球坐标 A 与 D，太阳坐标 A_0 与 D_0 以及木星的自转轴的方位角 C，太阳对于木星的北极的方位角 ω，最后还有相角 λ. 我们可以写出这些角之间的关系式如下(图 176)(注意在表示对于木心的方向的图里，围绕 T 点的方位角的正向与习用的旋转方向是相反的).

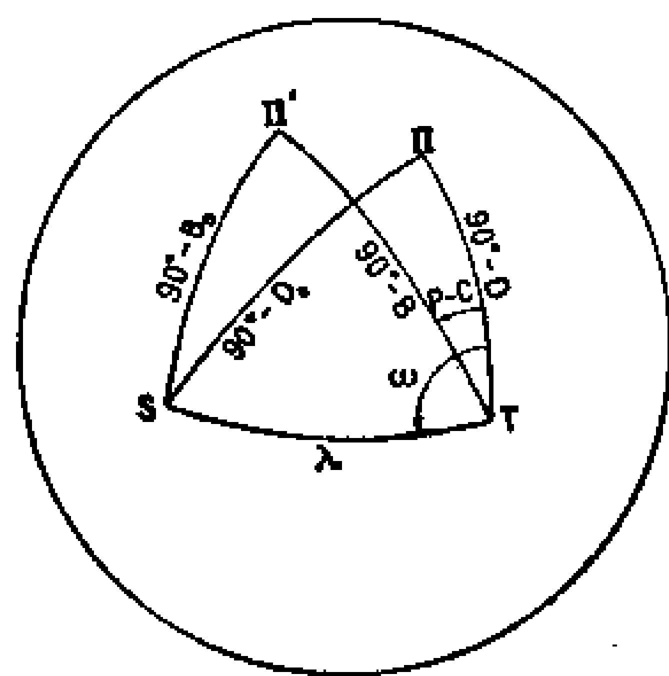


图 176

$$\sin D_0=\sin D\cos\lambda+\cos D\sin\lambda\cos\omega$$
$$\cos D_0\sin(A-A_0)=\sin\lambda\sin\omega$$
$$\cos D_0\cos(A-A_0)=\cos D\cos\lambda-\sin D\sin\lambda\cos\omega$$

对于右端内给与如下的增量：

$$\delta D=B-D \qquad \delta\omega=C-P$$

便由 $TS\pi$ 三角形转换为 $TS\pi'$ 三角形，因此，

$$\delta D_0=B_0-D_0 \qquad \delta(A-A_0)=v-(A-A_0)$$

读者不难验证，经过归算之后，我们可从下式去求未知量：

$$B_0=D_0+(B-D)\cos(A-A_0)-(C-P)\cos D\sin(A-A_0)$$

$$v=A-A_0+(B-D)\tan D_0\sin(A-A_0)-(C-P)[\sin D-\tan D_0\cos D\cos(A-A_0)]$$

这些量是关于几何位置的，光行差应不包含在给定数 A, D, A_0, D_0 等量之内.

注意第二方程内，改正项都是二阶的，实际可以略而不计，因而可令 $v=A-A_0$

例 1937 年法国天文年历里有关木卫 I 的现象有如下两条：

5 月 1 日：　食起于 22 时 20 分(世界时)

5 月 2 日：　掩终在 1 时 54 分

试求这两个现象的几次相切. 由于上节所说的理由，食终与掩始是不能看见的. 木星冲发生于两个半月以后的 7 月 15 日.

为准备起见，须先计算太阳与地球的木心坐标(不受光行差影响的). 我们不在这里写出演算过程，因为 § 143 里已经给出过一个例子，只是这里须计算到千分之一度. 这样求得的结果表示于下(P 的数值是从法国天文年历里取出的)：

在 0 时	$A-A_0$	D	D_0	C	P
5 月 1 日	$+10°.905$	$-1°.232$	$-1°.530$	$-12°.799$	$-12°.828$
2	866	228	526	817	846
3	824	224	522	832	862

由以上的公式给出

$$B_0=D_0-0°.059 \qquad v=A-A_0$$

另外，再从天文年历里的数据，由内插求得木卫 I 的星历表如下：

	时	u	ρ	R
5 月 1 日	20	325°.555	1.00355	4.8475
	21	333.974	323	
	22	342.399	284	4.8462
	23	350.832	237	
2 日	0	359.273	184	4.8449
	1	7.724	129	
	2	16.184	070	4.8436

因 $a_1=0.00282$, 故 $\frac{a\rho}{R}\cos B_0=0.00058$, 因而

$$Q=Q_0=0.99942\rho$$

1. 食的计算

因光行时差约为 40 分，故几何食发生于 21 时 40 分. 所以我们对于这一瞬时来计算变化缓慢的根数：

$$R=4.8464 \qquad \tau_0=498^s.72B=40^m17^s.0$$

$$\tau=40^m17^s.4$$

$$\rho=1.00298 \qquad Q_0=1.00240$$

$$B_0=-1°.585 \qquad s_0=0.0666$$

$$v=+10°.870$$

	半影外切	本影外切	本影内切
$(\sigma\pm\cdots):a$	0.17423	0.17245	0.16441
ε_0 的因数	0.9718	0.9819	1.0299
ε_0'	0.0648	0.0655	0.0687
q_0'	1.0693	1.0701	1.0738
$q_0'\sin B_0$	−0.02959	−0.02961	−0.02971
$(\sigma\pm\cdots):aQ_0$	0.17381	0.17203	0.16401
平　方	0.030210	0.029594	0.026899
$q_0'^2\sin^2 B_0$	876	877	883
差　数	0.029334	0.028717	0.026016
$1-q_0'^2\sin_0^2 B_0$	0.99912	0.99912	0.99912
$\sin^2(u+v)$	0.029360	0.028742	0.026039
$\sin(u+v)$	−0.17135	−0.16953	−0.16137
$u+v$	350°134	350°239	350°714
u	339.264	339.369	339.844
$t-\tau$	$21^h37^m40^s.8$	$21^h38^m25^s.4$	$21^h41^m48^s.5$
$t(T.U.)$	$22^h17^m58^s$	$21^h18^m43^s$	$22^h22^m\ 6^s$

这现象(食)总共经历的时间为 4 分 8 秒.

2. 复明(掩终)的计算

据年历预报这视现象发生的时刻为 1 时 54 分,而几何现象则发生于 1 时 14 分,我们对于这一瞬时去计算变化缓慢的根数:

$$R=4.8441 \qquad \tau_0=498^s.72R=40^m15^s.8$$

$$(du:dt)_1 \text{ 对于 } 12^h:101^\circ.48$$

$$n \quad \text{对于 } 12^h:101.74$$

$$\frac{n}{(du:dt)_1}=1+0.0026$$

$$\tau=40^m15^s.8+6^s.3+1^s.4=40^m23^s$$

$$\rho=1.00116 \qquad Q=1.00058$$

$$B=-1^\circ.283 \qquad \varepsilon=0.0666$$

	内 切	外 切
$(\sigma\pm\sigma'):a$	0.16530	0.17334
ε 的因数	1.0243	0.9768
ε'	0.0682	0.0651
q'	1.0732	1.0696
$q'\sin B$	0.02403	0.02395
$(\sigma\pm\sigma'):aQ$	0.16520	0.17324
平　方	0.027291	0.030012
$q'^2\sin^2 B$	577	574
差　数	0.026714	0.029488

	内 切	外 切
$1-q'^2\sin^2 B$	0.99942	0.99943
$\sin^2 u$	0.026729	0.029455
$\sin u$	0.16349	0.17163
u	9°.410	9°.883
$t-\tau$	$1^h11^m57^s$	$1^h15^m19^s$
$t(T.U.)$	$1^h52^m20^s$	$1^h55^m42^s$

这现象(复明)总共经历的时间为3分22秒.

§146 土星、光环与土卫*

土星的平均密度异常稀薄(约为0.7), 它比木星还扁, 据估计其扁度为1:9.6. 其表面上一点的天文纬度φ与土心纬度φ'的关系为(§§16与143)

$$\tan\varphi = 1.246\tan\varphi'$$

$\varphi-\varphi'$之差的极大值在$\varphi=48°.1$处,那里$\varphi'=41°.9$. 土星圆面的扁度ε, 可以表为地球在土星赤道面上的高度D的函数, 正如对木星所表明的那样. 这两个量的对应值载于下表:

D	ε	D	ε
0°	0.1042	16°	0.0958
2	1040	18	0937
4	1036	20	0914
6	1030	22	0888
8	1020	24	0861
10	1008	26	0832
12	0994	28	0802
14	0977		

土星表面有平行于其赤道的条纹,但比木星的更加弥散,因而一般不能辨识其表面的细节. 可是赤道区内有一些明亮的斑痕,人们从它们找着其自转周为10时14分. 但在纬度35°处, 自转周是10时38分. 由于这些数据很不准确, 因面土星不能象木星之有I, II两自转系,可以决定它上面之点的经度和纬度.

土星外围有光环,是很小的卫星所组成的很密的环圈,还没有办法将其成员分开. 这些卫星的轨道在土星的赤道面内,其偏心率可能很小. 光环很薄,为几个与土星同中心的环圈所形成. 由于它们的视轮廓是椭圆形的,其两轴之比为$1:\sin D$.

光环分为三层: 外边的一层叫A环, 其内面半环较亮; 中间的B环与A环分界处有一暗区, 叫卡西尼环缝, B环的亮度由外向内渐減,但方式是不规则的; 最后C环亦称暗环,远不如A, B两环致密,小望远镜里很难看见.

---

* 1966年法国日中峰天文台用107厘米口径的望远镜发现土卫X(Janus); 1969年又发现第四光环(D环), 位于C环的内侧,其物理性质与其他三环相同——译者注

用测微器量土星与其光环，结果颇有出入．其星历表是据 H．斯特鲁维的数据而编制的，他认为土星的赤道视半径 s 与 A 环的外半径 S（在单位距离处）各为

$$s=83''.32 \qquad S=2.252s=187''.68$$

由最新几个测量的平均值给出 $S=2.28s$，至于其他几个光环各部分的直径分别为

A 环　外边缘	1.00
A 环　内边缘	0.88
卡西尼环缝	
B 环　外边缘	0.85
B 环　内边缘	0.65
C 环　内边缘	0.52
土星的赤道	0.44

光环在空间的位置完全为其对于黄道面的升交点的黄经 Ω 与交角 J 所决定（图177）．据 G．斯特鲁维

$$\Omega=168^\circ.8147+0^\circ.013938(t-1950.0)$$

$$J=\ 28^\circ.0679-0^\circ.000130(t-1950.0)$$

t 表示时间，以回归年计．由这些数据，推出光环的北极的赤道坐标为

$$a=38^\circ.4165+0^\circ.042300(t-1950.0)+0^\circ.00002341(t-1950.0)^2$$

$$d=83^\circ.3104+0^\circ.004362(t-1950.0)-0^\circ.00000129(t-1950.0)^2$$

光环面上与天赤道和黄道的两个升交点之间所量出的弧 NN' 的数值为

$$\theta=41^\circ.4953-0^\circ.029724(t-1950.0)-0^\circ.00002371(t-1950.0)^2$$

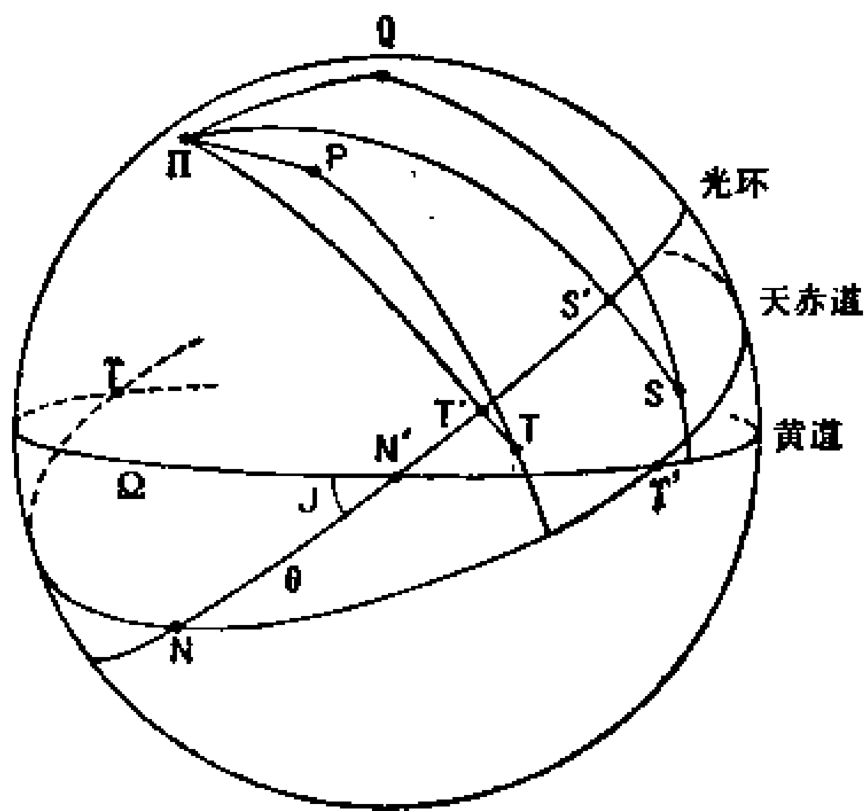


图　177

设在本章内以 N 表示章动，以 β 表示常用 B 表示的白塞耳数；则以上的根数的改正值的表达式为

$$\Delta\Omega=N,$$

$$\Delta a=N\frac{\sin J\cos\theta}{\cos d}+\beta\cos a\tan d$$

$$\Delta d=N\sin\varepsilon\cos a-\beta\sin a$$

$$\Delta\theta=-N\frac{\sin\varepsilon\sin a}{\cos d}-\beta\frac{\cos a}{\cos d}$$

其数字值为

$$\Delta\Omega=0^\circ.000278(N:1'')$$

$$\Delta a=0^\circ.000840(N:1'')+0^\circ.001856(\beta:1'')$$

$$\Delta d=0^\circ.000087(N:1'')-0^\circ.000173(\beta:1'')$$

$$\Delta\theta=-0^\circ.000590(N:1'')-0^\circ.001868(\beta:1'')$$

设 α 与 δ 表示土星的地心赤道坐标；L 与 B 表示其日心黄道坐标．图 177 内 S 与 T 两点分别表示太阳与地球的土心方向，因而其坐标为

$$T\text{ (赤道坐标)}: \quad \alpha-180°, \quad -\delta$$
$$S\text{ (日心坐标)}: \quad L-180, \quad -B$$

由天文年历里取出的土星的赤道坐标是经过光行差的改正的；但日心黄道坐标则应减去光线在太阳至土星与土星至地球之间传播时间内的变化，即应减去 $0.00577(\varDelta+r)$，这里 $\varDelta$ 表示土星的地心距离.

现在计算地球的土心坐标 A, D 和太阳的土心坐标 A_0, D_0，参照面为光环面(假设其与土星赤道面重合)并以其对天赤道的升交点 N 为起算点. 于是解三角形 π (光环的北极)，P (北天极)或 Q (北黄极)和 T 点或 S 点(随情形而不同)，便可得出这些坐标：

$$(1)\begin{cases}\cos D\cos A=\cos\delta\sin(a-\alpha)\\ \cos D\sin A=-\sin\delta\cos d+\cos\delta\sin d\cos(a-\alpha)\\ \sin D=-\sin\delta\sin d-\cos\delta\cos d\cos(a-\alpha).\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\cos D_0\cos(A_0-\theta)=-\cos B\cos(L-\Omega)\\ \cos D_0\sin(A_0-\theta)=-\sin J\sin B-\cos J\cos B\sin(L-\Omega)\\ \sin D_0=-\cos J\sin B+\sin J\cos B\sin(L-\Omega)\end{cases}$$

若在公式(2)里以 A, D, l, b 分别代替 A_0, D_0, L, B 我们还可以计算地球的土心坐标.

土星的北极的方位角 C 为下式所给出：

$$\sin C\cos D=\cos d\sin(a-\alpha)$$

最后，土星的相角 λ 与位相的方位角 Q，可利用 § 142 内对火星所推出的公式去计算它们.

例 对 1937 年 1 月 1 日 0 时(世界时)，计算土星与其光环的星历表. 对于这个时期所求得的结果如下，已将章动与光行差考虑进去.

$\Omega=168.^\circ6385$	$\alpha=349.^\circ1795$	$\varDelta=9.9340$
$J=28.0696$	$\delta=-6.9085$	$r=8'.3574$
$\theta=41.8648$	$L=352.7743$	
$a=37.8881$	$B=-2.1472$	
$d=83.2548$		

1. 地球的土心坐标(公式组 1)：

$\cos D\cos A=0.74591$	$\tan A=0.89113$
$\cos D\sin A=0.66470$	$A=41.^\circ7052$
$\sin D=+0.04251$	$D=+2.4364$

用转换后公式组(2)亦得相同的结果. D 是正号的使我们知道光环以其北面对着地球.

$$\sin C=0.08833 \qquad C=5.^\circ068$$

2. 太阳的土星坐标(公式组 2)：

$\cos D_0\cos(A_0-\theta)=0.99669$	$\tan(A_0-\theta)=0.08149$
$\cos D_0\sin(A_0-\theta)=0.08122$	$A_0-\theta=4.^\circ6588$
$\sin D_0=-0.00085$	$A_0=46.^\circ5236$
	$D_0=-0.^\circ0489$
	$A-A_0=-4.^\circ8184$

D_0 是负号的使我们知道土星被太阳照明的是其北面．可见太阳与地球在光环面的两边，这是罕有的情形．

3．视直径

我们采用 H. 斯特鲁维的数据．上表给出 $\varepsilon=0.1039$

赤道视半径($\Delta=9.934$)	$8''.39$
差	$0''.87$
两极视半径	$7''.52$
A 环的半长轴	$18''.89$
A 环的半短轴	$+0''.80$

我们将 $\sin D$ 的符号给与半短轴．

4．位相

$$\sin\lambda\sin\omega=-0.08400 \qquad \tan\omega=1.9440$$
$$\sin\lambda\cos\omega=-0.04321 \qquad \omega=62^\circ.78+180^\circ$$
$$\cos\lambda=0.99551 \qquad Q=67^\circ.85$$
$$\lambda=5^\circ.43$$

地球的土心纬度 D	$+2^\circ.436$	土星　1937 年 1 月 1 日 0 时
太阳的土心纬度 D_0	$-0^\circ.049$	
地球-太阳的经度差	$-4^\circ.818$	
土星自转轴的方位角	$5^\circ.07$	
位相的方位角	$67^\circ.85$	
赤道半径	$8''.39$	
两极半径	$7''.52$	
A 环的半长轴	$18''.89$	
A 环的半短轴	$+0''.80$	

光环交替地以其北、南两面向着太阳与地球．当地球过光环面之时，由于它很薄，光环便隐没不见．当太阳过光环面之时，以其照明不足，亦不能为人看见．为了说明这个特殊现象，试讨论地球与太阳的土心纬度 D 和 D_0 怎样随时间的函数变化．

在天球上(图 178)绘出黄道面、土星与其光环的轨道面．设以 Ω 表示轨道的升交点，并以同一符号表示其黄经；N' 与 N'' 表示光环对于黄道与土星轨道面的升交点，θ' 表示 $\gamma\Omega$ 与 $\Omega N''$ 的和，即交点 N'' 在轨道面内的经度；最后更令 I 表示光环与土星轨道的交角．用以上的数据和轨道根数不难求得

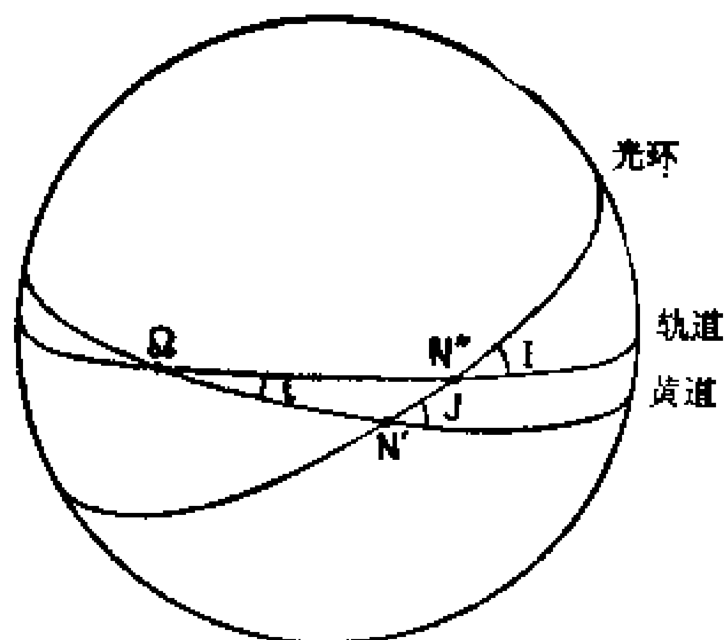


图 178

$$I=26^\circ.735$$
$$\theta'=172^\circ.87 \quad (1950)$$

设 L_v 表示土星在轨道上的经度，则太阳的经度为 L_v+180°，其土心纬度可由以下方程式求出：

$$\sin D_0=\sin I\sin(L_v-\theta')$$

当 L_v 等于 θ' 或 $\theta'+180°$ 时，即等于 172°.87 或 352°.87 时，太阳过光环面. 由于近地点的经度为 92°.08 (对于 1950.0)，太阳过光环面时其对应的真近点角为

$$\left.\begin{aligned} v &= 80^\circ\!.79 \quad (\text{由南面北}) \\ &= 260^\circ\!.79 \quad (\text{由北而南}) \end{aligned}\right\} (1950.0)$$

开普勒运动表提供以下的平近点角之值(对于 $e=0.05572$)：

$$\left.\begin{aligned} M &= 74^\circ\!.54 \quad (\text{由南而北}) \\ &= 267^\circ\!.14 \quad (\text{由北面南}) \end{aligned}\right\} (1950.0)$$

当 M 在 74°.54 与 267°.14 之间时，太阳照亮了光环的北面，M 变化的范围达 192°.60. 因此光环南面被照明的变化范围只有 167°.40. 若以这变化的恒星周为 10759 日，则太阳照亮光环的北面 5756 日，南面 5003 日(即 15 年 9 月与 13 年 8 月). 因摄动，这两个时间是有变化的.

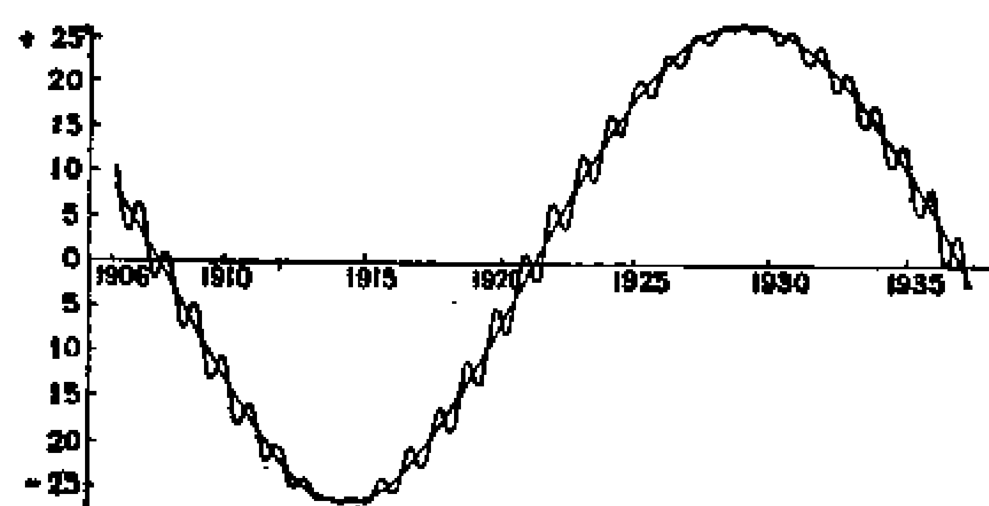


图 179

图 179 里无波纹的曲线表示 D_0 随时间函数的变化. 它很象正弦曲线，但由于土星轨道的偏心率，它与真正的正弦曲线稍有差异.

图 179 里的波纹线表示地球的土心纬度 D 的变化. 不难看出，$D-D_0$ 之差受变幅不同的周期变化，其简单的理论如下. 为此，返回考察图 177 与公式组(2). 用以下的关系式可求得 D 与 D_0:

$$\sin D=-\cos J\sin b+\sin J\cos b\sin(l-\Omega)$$

$$\sin D_0=-\cos J\sin B+\sin J\cos B\sin(L-\Omega)$$

如前，B, L, b, l 分别表示土星的日心与地心的黄道坐标. 由此推出

$$\sin D-\sin D_0=-(\sin b-\sin B)\cos J$$
$$+[\cos b\sin(l-\Omega)-\cos B\sin(L-\Omega)]\sin J$$

由于 b, B, $D-D_0$, $l-L$ 皆是小角，故有以下的近似式：

$$(D-D_0)\cos D_0=(l-L)\sin J\cos(L-\Omega)-(b-B)\cos J$$

$l-L$, $b-B$ 之差可以看做是周年视差；§ 66 里的公式给出它们的第一近似值. 若以 R 表示太阳的向径，r 表示土星的向径，$\odot$ 表示太阳的地心黄经，则

$$l-L=\frac{R}{r}\,\frac{\sin(\odot-L)}{\cos B}$$

$$b-B=-\frac{R}{r}\sin B\cos(\odot-L)$$

式内 $$\sin B=\sin i\sin(L-\Omega)$$

最后，将 $D-D_0$ 之差的近似表达式写为如下的形式：

$$(D-D_0)\cos D_0=\frac{R}{r}[\sin J\cos(L-\Omega)\sin(\odot-L)+\sin i\cos J\sin(L-\Omega)\cos(\odot-L)]$$

$R:r$ 的平均值是 0.1047 或 6°.00；于是算出其数字表达式为

$$(D-D_0)\cos D_0 = 2^\circ\!.82\cos(L-\Omega)\sin(\odot-L)+0^\circ\!.23\sin(L-\Omega)\cos(\odot-L)$$

$$\Omega=168^\circ\!.82 \qquad \Omega=113^\circ\!.22$$

右端的两项可以当做是变幅有变化的会合运动项($\odot-L$为引数). 它们的周期等于土星的会合周期, 即 378 日. 前一项比较重要, 其变幅的最大值出现于太阳过光环面以前一些时间; 在会合周的过程里, 方照时变幅达到其极大的绝对值, 合与冲时变幅为零. 反之, 第二项在方照时为零, 在合与冲时达到其极大的绝对值; 可是这项的变幅经常很小, 在光环张开最宽后两年之时为零. 光环张开最宽时, 第一次的变幅接近于零, 但第二次的变幅仍然是 $0^\circ\!.13$. 读者可在图 179 里检验这些结论.

由以上的讨论得知, 太阳与地球差不多同时达到其土心纬度的极大值. 例如, D 于 1928 年 11 月 29 日达到其极大值 $+26^\circ\!.877$ 之后不久, D_0 便于次年 1 月 17 日达到其极大值 $+26^\circ\!.750$; 15 年后, 又于 1943 年 12 月 5 日, $D_0=-26.735$, 跟着于 1944 年 4 月 16 日, $D=-26^\circ\!.995$. 由此可见, 这些数字与 ±1 相差很少. 这些极大值发生于光环张开最宽之际, 因为其视周界的半径, 在单位距离处大约等于

$$S\sin I=84''\!.4$$

可是与 I 对应的 s 值为 0.0821, 土星的半极轴在同距离处所张 s 角为 $76''\!.5$. 所以光环的最外圈大大超过了半极轴. 土星的一极投影在 A 环上时, 另一极则为 A 环所掩; 但卡西尼环缝总是部分地被土星圆面所掩蔽.

容易证明: 当 $D=\pm23^\circ\!.9$ 之时, 光环的外轮廓与土星球体的轮廓是相切的.

土星投影于光环, 面光环亦投影于土星面上. 这些现象的出现, 决定于 D, D_0, 与 $A-A_0$ 的数值, 光环消逝前后的可见情况亦由这些角来决定.

当 D_0 为零时, 太阳过光环面. 在这期间, 随情况地球可能经过光环面一至三次. 这是由图 180 可以看出的, 这一图是图 179, 接近时轴(横轴)的向下部分的扩大; 但时轴的位置没有固定. 这现象可能出现的情况有如下几种:

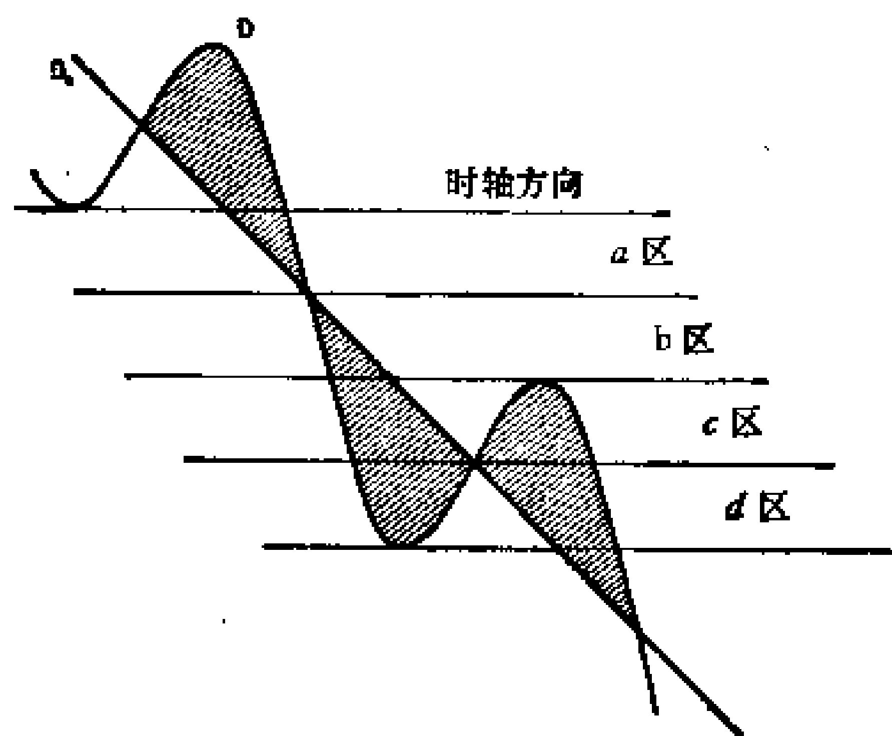


图 180

1. 若时轴在图的 a 区内, 首先太阳、继后地球过光环面, 但地球只经过一次.

2. 若时轴在 b 区内, 同样的现象发生, 但次序颠倒, 即地球在太阳之先过光环面.

3. 若时轴在 c 区内, 地球先于太阳过去, 继后地球更经过光环面两次.

4. 最后, 若时轴在 d 区内, 经过光环面的, 首先两次是地球, 继后一次是太阳, 最后还有一次是地球.

不须说, 同样的情况亦出现于 D_0 的增涨中. 图 180 的灰色区内相当于光环对着我们的一面, 是投有被太阳照明的一面. 那时光环不能被人看见, 但其存在可由光环投在土星表面的阴影而查出.

下表载光环消逝最近的几个时期, 其中 a, b, c, d 等字母代表上列几个情况, 并将 D_0 的变化列于末后一行:

1848—49	c	减	1907	c	减
1861—62	d	增	1920—21	d	增
1878	a	减	1936—37	a	减
1891	b	增	1950	b	增

现在发现的土卫有十个. 最大的土卫 VI, 其直径的数量级为 4000 公里. 其轨道面与土星赤道的交角不大, 因此土卫 VI 一般既不被食, 亦不被掩, 更不凌土面面过. 只在光环消逝之际的两年期间, 我们在土星系里看见类似木卫的各种现象.

下表扼要记载土卫的重要根数, 距离 a 以土星的赤道半径计, 恒星周以日计. 交角 i 是对黄道面而定的. 须注意土卫 IX 逆行. 至于土卫 X, 已经多年没有观测到, 因而其根数是很可疑的*

	星等	a	T	i	发现人与时期
光环		1.18 至 2.28		28°.1	惠根斯, 1659
土卫 I	12	3.07	0.942 日	28°.1	W. 赫歇年, 1789
II	12	3.94	1.370	28°.1	同　上
III	10.5	4.88	1.888		J. D. 卡西尼, 1684
IV	11	6.24	2.737	28°.1	同　上
V	10	8.72	4.518	28°.1	J. D. 卡西尼, 1672
VI	8.3	20.22	15.945	27°.5	惠根斯, 1655
X		24.7	20.85	39°.1	皮克林, 1900
VII	13	24.19	21.277	27°.3	邦德, 1848
VIII	10—12	58.91	79.330	18°.2	J. D. 卡西尼, 1671
IX	15	214.4	550.48	174°.8	皮克林, 1898

我们在这一节开始说过, 光环是围绕土星运行的微粒所构成的带子. 天文学家曾根据多普勒效应证明这些微粒的运转速度随其到土星中心的距离的平方根的倒数而变化. 因此光环并无确定的运转周期, 因为构成光环的每个微粒都遵循开普勒第三定律的原故.

§ 147　天王星与海王星

我们对于这两个行星的认识, 是很粗浅的. 它们的视圆面所张的角分别只有 4″ 与 2″, 其亮度也很微弱. 因而其表面情况与自转都不很了解.

天王星的卫星已经发现五个, 都很难观测. 下表内距离 a 以本行星的赤道半径为单位; 交角是对于天王星的轨道面而定的.

* 法国日中峰天文台于 1966 年用 107 厘米望远镜发现的土卫 X, 取名 Janus, 不是皮克林于 1900 年认为自己"发现"的土卫 X (Thimis). 土卫 X 的公转轨道几乎是正圆形轨道, 半径为土星半径的 2.64 倍 (即约 16000 公里), 公转周期为 17 时 58.5 分. 其半径只有 240 公里, 最靠近土星, 正好位于光环的外侧——译者注

天王卫	星等	a	i	T	发现人与时期
V	17	5		1.41 日	柯伊伯, 1948
I	15	7.7	97°.9	2.520	拉塞耳, 1851
II	15	10.8	97°.9	4.144	同　上
III	14	17.6	97°.9	8.706	W. 赫歇年, 1787
IV	14	23.6	97°.9	13.463	同　上

由于这些交角都大于 90°，故天王星的卫星皆是逆行的．当天王星的黄经为 165° 时 (1881, 1965) 或 345° 时 (1923)，天王卫的轨道成为直线，但其黄经为 75° (1946) 或 255° 时 (1901, 1985)，它们的轨道差不多是正圆形的．

天王星的赤道面很可能与其卫星的轨道面重合(拉普拉斯)．因此我们看见的天王星的表面，有时是其赤道区(1923, 1965)，有时是其两极区(1946, 1985)．在前一情形，其视面略扁(扁度约为 1:12)，人们猜测其表面也有象木、土两星那样的带纹，由于不能辨识其上面的细节，因面其自转周期无法测定．可以确定的是天王星和它的卫星同样是逆行的．由分光观测定出的自转周期 10.8 时，但亦很不确定．天王星的视半径，据估计在单位距离处为 34″.3，在其平均距离处为 1″.8．

海王星的卫星现在只发现两个：

海王卫	星等	a	i	T	发现人与时期
I	13.5	13	141°	5.877 日	拉塞耳, 1846
II	19			359 日	柯伊伯, 1949

我们假定海王星的赤道面与海王卫 I 的轨道面是重合的，因此海王卫 I 是逆行的；由分光观测所决定的自转周 15 时，亦很不可靠．海王星的视半径在单位距离处为 36″.6，或在其平均距离处为 1″.2．

海王卫 II 的轨道的偏心率，在卫星里是特别大的：0.76；但其对于黄道的交角只有 4°52′，因此它的运动是顺行的．

§ 148　行星与月亮的光度测量

行星物理性质的研究，不在本书范围之内；但星历表里经常列出行星的星等，所以我们在这里将计算星等的公式略为介绍．

行星不自发光，因为它们表现位相，漫射照在它们面上的日光．星的亮度 E (其实是观测者瞳人上的照度)，随三个几何参数而变化：

1. 行星与太阳之间的距离 r；
2. 行星的地心距离 Δ；
3. 行星的相角 λ．

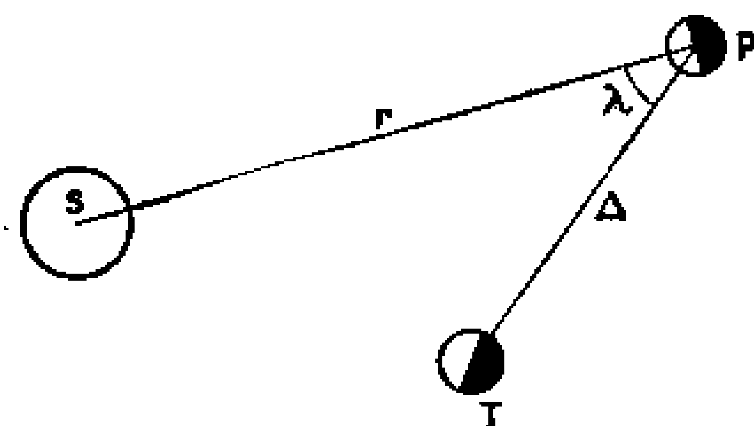


图　181

此外，自然还与行星本身的物理状况有关，这状况可能随时间与其表面上之点面不同．就第一近似值面言，可假设这些效应是可以忽略的，设 i_0 表示行星在太阳方向上的亮度，在与太阳方向成 λ 角的另一方向上的亮度 i 是 i_0 和 λ 的函数，因

而可以写为

$$i=i_0 f(\lambda)$$

相角函数 $f(\lambda)$ 总是减函数，对于 $\lambda=0$ 时，它的数值为 1.

令 I_0 表示 $r=1$ 时 i_0 的数值；星的亮度表为以上所说的三个参数的函数如下：

$$E=I_0\,\frac{f(\lambda)^1}{r^2\Delta^2}$$

由此利用波克森(Pegson)公式，地上观测到的行星的星等为

$$m=C-2.5\log I_0+5\log r\Delta-2.5\log f(\lambda)$$

这关系可简化为

$$m=m_0+5\log r\Delta-2.5\log f(\lambda) \tag{1}$$

m_0 表示行星与太阳和地球皆在单位距离、而相角又为零时的星等.

总之，视星等一方面随常数 m_0，另一方面随相角的函数而变化，这两个特征量都和行星表面的物理性质有关．事实上，m_0 不是一个严格的不变量．若行星有大气，则大气的情况便有或多或少的变化；至于行星表面上的斑痕，也不是以相同的情况对着我们；这是由于行星的自转(如火星等)，由于天平动(水星、金星、月亮)或由于季节性的现象(火星)．我们不在这里讨论这些变化．它一方面，相角函数也不是与以上所说的效应无关；虽然这函数随大气的情况而变化，但以下用的是由在各种情形下多数测量而得来的 m 与 $f(\lambda)$ 的平均值.

若所讨论的天体是外行星或月亮，m_0 的数值可由行星在冲前后的光度测量而算出；若天体是水星或金星，则可由这两星在上合时的光度测量而算出．反之，相角函数的决定须先知道在 0 至 180° 范围内各相角的星等之值．可是只有两颗内行星与月亮才是太阳系里能够在其一切位相加以星等测量的天体．至于外行星，其相角绝不会超过以下的数值

火星	46°	天王星	3°
木星	12°	海王星	2°
土星	6°		

地球的星等变化，人们可从月亮的灰光的光度测量，而决定到一个相当大的范围之内．我们知道，灰光不是由于太阳的直接照明，而是来自地球的漫射光．这个观测的范围从地球的相角自 15° 至 130° 之间．因此，地球光度性质，不如水星、金星或月亮那样清楚，但比火星却好得多.

我们可用极坐标明确地表达相角的函数，即以相角为极角，以 $f(\lambda)$ 为向径．这样绘出的曲线叫做行星的漫射指示线．图 182 表示水星、金星、地球、月亮与火星的漫射指示线，这些曲线有一共同的性质，即在太阳的方向上表现一个尖点．这一点上，两切线间之角与一平角之差，对于有大气的金星与地球，比无大气的水星与月亮，要少一些．使人注意的是，弦月的照度仅是满月的照度的十二分之一.

关系式(1)里的 $\log f(\lambda)$ 对于一般的应用，将其表达为相角的有限项展开式，便可得到正确的表达：

$$m=m_0+5\log r\Delta+a\,\frac{\lambda}{100^\circ}+b\left(\frac{\lambda}{100^\circ}\right)^2+c\left(\frac{\lambda}{100^\circ}\right)^3 \tag{2}$$

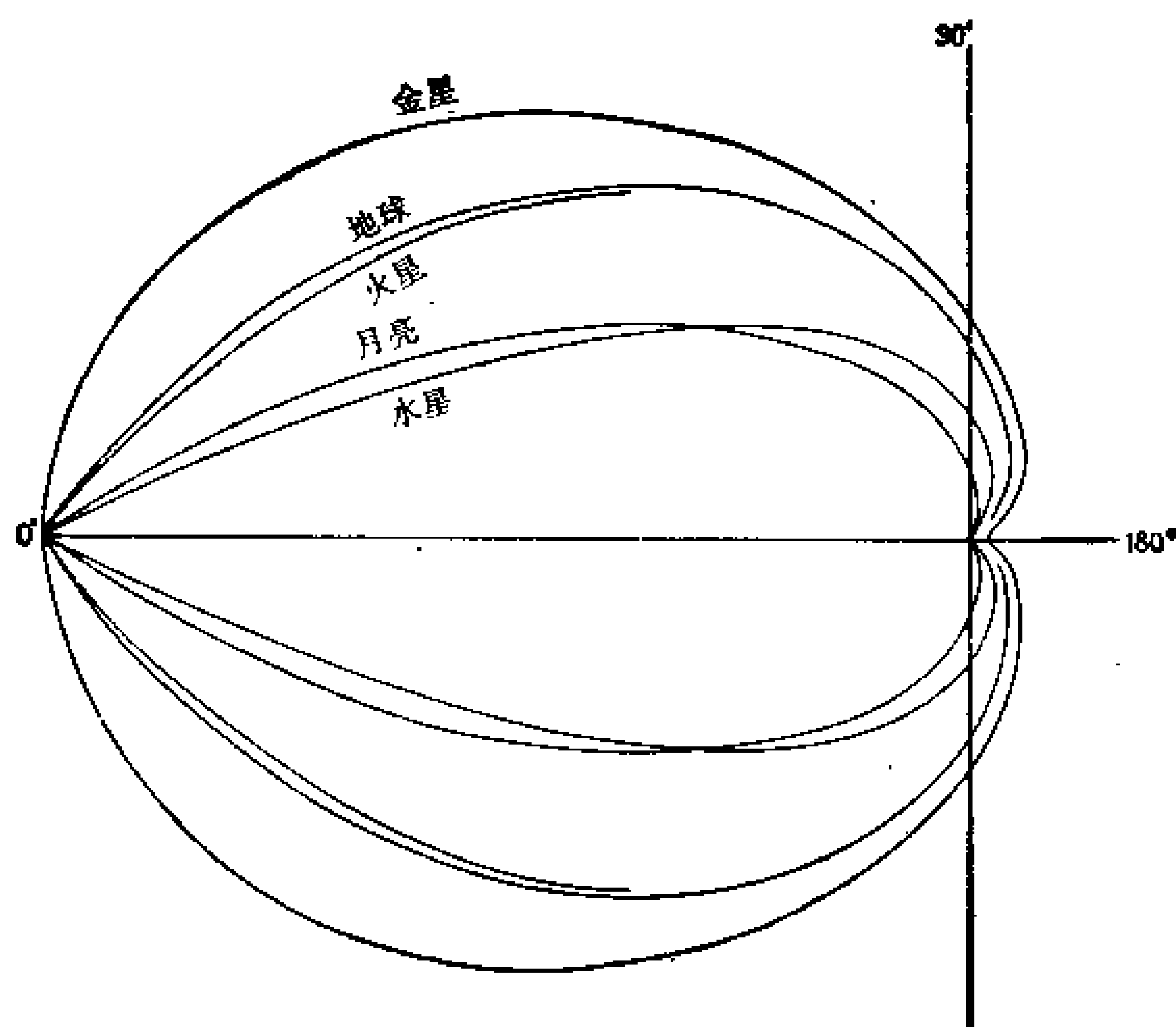


图 182　行星与月亮漫射的指示线

a, b, c 三个常数，在最好的情形下可由观测求得，即测量须达到 0 至 180° 的相角范围内，至少在这范围的大部分之内（水星、金星、地球、月亮）．对于火、木、土三星而言，线性展开式已经够用，观测只提供 a 的数值；对于天王星与海王星，这系数只能出自猜测．

下表内载行星与月亮的 m_0, a, 与 b 和 c（对某些情形）；最后还有累积反照率 A（定义在后面）：

	m_0	a	b	c	A	作　者
水星	−0.21	3.80	−2.73	+2.00	0.055	A. Danjon
金星	−4.14	0.09	+2.39	−0.65	0.64	A. Danjon
地球	−3.92	1.30	+0.19	+0.48	0.40	A. Danjon
火星	−1.36	1.50	—	—	0.13	G. Muller, S. King
木星	−8.99	1.48	—	—	0.37	Guthnick
土星	−8.68	1.7	—	—	0.40	Schoenberg
天王星	−7.04	?			0.43?	Stebbins
海王星	−7.06	?			0.48?	Stebbins
月亮	+0.38	2.97	−0.78	+0.90	0.073	G. Rougier

(1) 表内 m_0 的数值是据行星与许多已知星等的亮星之比较而求得的．但地球与月亮是直接和太阳比较而算出的，在计算时设太阳的星等为 −26.86．

(2) 反照率的计算，以太阳星等为 −26.86，和以前的作者的假设稍有出入，因而表内 A 的数值与前人采取的数值稍有差异．可是由以上的说法，地球和月亮的反照率的求得，却与太阳的星等的假定值无关，因为观测是地或月与太阳的光的强度作直接的比较而求得的．至于计算反照率时所采用的视半径之值，取自法国天文年历，唯将水星的视半径

取为 3″.08. 最后，地球的反照率的计算，首先只用含两项的公式，即设 $b=0$. 含三项的公式好象更好一些，这样求得的反照率在 0.39 与 0.40 之间[1].

由于水星的相角函数很迅速地变小，这行星在上合前后表现一个很尖锐的极大值. 假设地球与水星的轨道是正圆的，而且不计其倾角，利用公式 2 与下表内的常数，得出如下的星等：

λ	m	λ	m
0°	−1.56	80°	−0.33
20	−0.96	100	−0.15
40	−0.64	120	+0.30
60	−0.48	140	+1.10

上合前后几天即在昼间，水星容易在小望远镜里看见. 但其亮度在半轮时迅速变弱，因而在下合前很早一般时间里便看不见了.

水星轨道的偏心率与倾角都很大，地球轨道的偏心率也不可略. 水星的星等与以上的表载值可能有显著的差异. 例如水星在近日距上合时(发生于 6 月 8 日)，其星等可达 **−2.0**；但在远日距上合时(12 月 9 日)，星等是 **−0.9**.

金星的相角函数比水星减少得更慢，即使它的地心距的变化是比较大的. 这两个效应大约相互抵消，这是由下表内的平均值看得出来的：

λ	m	λ	m
0°	−3.66	100°	−4.21
20	−3.65	120	−4.31
40	−3.68	140	−4.22
60	−3.78	160	−3.94
80	−3.99	180	−3.52

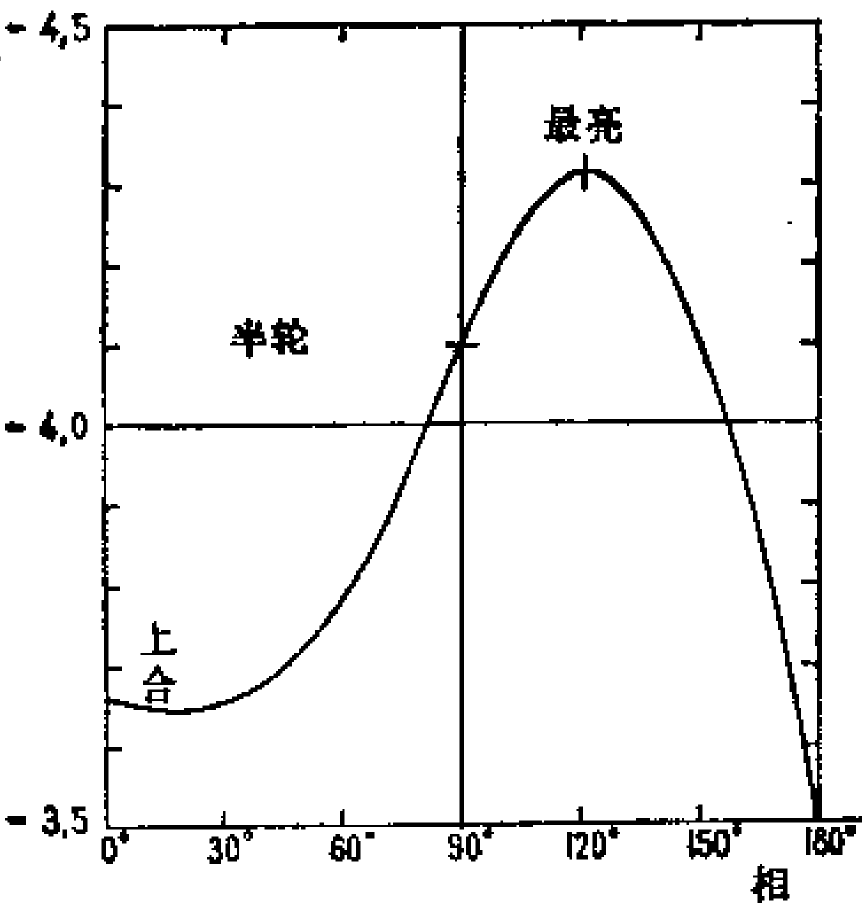


图 183 金星视星等的变化

上合开始时，金星亮度缓慢地变弱；当 $\lambda=25°$ 时，开始变亮；到 $\lambda=120°.5$ 时，亮度达到极大，星等为 **−4.31**. 由于金星轨道的偏心率与倾角都比较小，因而观测得的星等，比较在倾角为零的圆形轨道的假设下所算出的数字，可能有百分之几星等的差异.

当金星表现一丝蛾眉之时，这蛾眉超过边缘的半个圆周，当相角为 177° 时，蛾眉的两角联接一起，成为一个光亮的环圈. 将公式(2)作外推的计算，可得环相的星等.

火星的星等和计算的星等可以相差十分之几星等，因为一方面由于火星表面有分布不规则的明暗斑点，而另一方面火星表面上有很显著的气象的或季节性的变化. 由于火

1) 对于这些光度数据，参看：G. Rougier, *L'Astronomie*, 1937, p. 165; A. Danjon, Annales de l'Observatoire de Strasbourg, III, 3e fascicule; Bulletin Astronomique, XIV, p. 315, XV, p. 105, et XVII, p. 363.

星轨道的偏心率很大，冲时的星等与一年内发生这位相的时期有关．近日冲时（发生于8月29日）星等约为 -2.7；但在远日冲时（2月24日），星等约为 -1.1．火星的极大亮度不恰好发生于冲时，由于轨道的偏心率与倾角的原故，可相隔几日，远日合时，火星的星等达 $+2.0$．

木星亮度的变幅很小，在一会合周里，它的星等只变化一个星等，其平均值为 -1.8．

土星的总亮度是土星本身与其光环的亮度之和．可是这两种亮度所遵循的光度的定律是很不同的．上表内有关土星的数据是只对于土星的本体而言的．如果要再计入光环，便应该象 G. 密勒尔(Muller)那样假设：

$$m_0=-8.68-2.60\sin|D|+1.25\sin^2 D$$

D 表示地球的土心纬度（§146）．当 $D=26^\circ_.9$ 时，求得 $m_0=-9.60$．因此光环张开极宽时，土星的总亮度达到土星本体的亮度的2.3倍．

但密勒尔的公式显然是不完全的，因为它里面不含决定光环亮度的太阳的土心纬度 D_0，也不含决定土星与光环互相投射阴影的情况的 $D-D_0$ 之差．

关于位相还有别的困难．位相的系数 a 对于土星为1.7；对于构成光环的小卫星，无疑比这系数还大得多．不须对行星与光环的亮度分别加以位相效应的改正，然后计算合成的星等，密勒尔提出如下的公式：

$$m=-8.68+5\log r\Delta-2.60\sin|D|+1.25\sin D+4.4\left(\frac{\lambda}{100}\right)$$

这个经验公式用以编制星历表，但无理论上的解释．注意系数4.4大于与月亮或水星在小相角时（即 $b=c=0$ 时），这系数可能大约是3．

还须对行星表内以 A 符号表示的累积反照率，给以一个定义．邦德的定义是：行星或卫星漫射到空间里的光通量与其所遮断的太阳的光通量之比．设 I_s 表示太阳光的强度，σ 表示单位距离处行星或卫星的视半径（表为弧度值），则在这距离处所遮断的光通量为 $\pi I_s\sigma^2$．

为了计算漫射的光通量，考虑在与行星圆心、半径为1的球的内面，这通量在每一点上所给出的照度，等于 $I_0 f(\lambda)$．因此总通量的表达式为

$$2\pi I_0\int_0^\pi f(\lambda)\sin\lambda d\lambda$$

因而累积反照率等于

$$A=\frac{2I_0}{I_s\sigma^2}\int_0^\pi f(\lambda)\sin\lambda d\lambda$$

$I_0:I_s$ 之比可以从星等 m_0 和太阳的星等（取为 -26.86）算出．于是，

$$I_0:I_s=0.4\,\mathrm{anti}\log(-26.86-m_0)$$

以206265除 σ 的角秒的数值，便将其表为弧度值．当相角函数完全确定时，相积分的计算便没有什么困难；例如，使用森普逊公式（见附录）．对于火星、木星与土星的球体，相积分里一部分是臆度的．对于天王星与海王星，我们采用与土星相同的相积分．外行星的 A 的数值，仅是一种概略的数值，只有火星的数值比较可靠．

第十六章　目视双星的轨道

§149　引　　言

双星两子星的运动，是两体在相互摄引的作用下，彼此环绕的运动(第十章)．假设没有外力的作用，双星的质量中心便作匀速直线运动．至于两个子星对于与质心联系的绝对参照系，各在一个开普勒轨道上运动．这两个绝对轨道的同位相似比是 $m_2:m_1$．这里 m_1 与 m_2 分别表示两子星 A 与 B 的质量．这一章内，A 表示较亮的一个子星，一般地说，这也是质量较大的一个．

至于 B 对于 A 的相对轨道，还是开普勒轨道，其根数应该满足下列关系：

$$4\pi^2\frac{a^3}{P^2}=k(m_1+m_2) \tag{1}$$

a 表示半长轴，P 表示周期．

地上观测者所见的视运动，正是真运动在与视向正交的平面上的投影．视轨道仍然是椭圆，但 A 不在其焦点上；B 对于 A 的视运动，还是遵循面积定律．测微器对双星的测量，只关系于其视轨道；若将这一测量至少进行了一周，便可得出周期 P．本章内将陈述将视轨道转换为真轨道的几个方法．

至于绝对轨道那就比相对轨道更难决定．A 或 B 两子星的视轨道，可联合其绝对的轨道运动与质心的匀速直线运动面求得．假设应用 §68 所说的测定自行与视差的方法(子午仪的绝对观测或照相观测)，于整个周期里便能决定这两个轨道．我们首先推出双星系的自身运动，换句话说，即质心的自行．然后对每个子星在各个时期的位置上加以质心运动的改正，便得出它们的绝对轨道．绝对轨道和相对轨道相似，其同位相似比分别为 $m_2:(m_1+m_2)$ 与 $m_1:(m_1+m_2)$．

若已知双星系的真轨道的半长轴与周期，则由 (1) 式给出该系的总质量．由于观测提供的是以角秒表示的视角距离，因而由此推出的半长轴之值也表为这个单位．若更知双星的周年视差，则容易将其换算为天文单位．所谓周年视差即一个天文单位在星所在处所张的角．以视差除半长轴(两者均表为角秒)，便将半长轴表为天文单位．至于周期 P，不表为日，面表为 §90 所规定的周期 P_0，这里将它当做是恒星年或儒略年，在实际上也没有什么不便．若以太阳的质量为单位去表示双星的质量，容易证明公式(1)内的常数 k 之值为 $4\pi^2$，于是这公式可以写为

$$m_1+m_2=\frac{a^3}{P^2} \tag{2}$$

另外，若已决定两星的绝对轨道，便给出了它们的同位相似比，即 m_1 与 m_2 之比．这样便可分别计算得两星的质量．质量是恒星天文学的一种基本数据，只能借双星去求得它．

测量子星间的距离 $\rho=AB$ 和 B 对于 A 的位置角 θ(§11)所使用的测微器，有多种类

型，我们不在这里去分别讨论．全部古代观测和大部近代观测，都是来自动丝测微器．由双象测微器以及日益流行的照象观测而得的结果更为精密，这将对双星天文学作出贡献．可是目前应当尽量利用动丝测微器所作的观测，现在对这一种观测作如下的讨论．

若两子星过于密近，除了在某些情况下使用干涉法之外，更无别的方法能够正确地提供子星间的距离．即便是相隔很显著的双星，由动丝测微器所作的观测，亦常表现有系统性的误差．这误差随观测者与所用的仪器而变化．为举例起见，试讨论双星北冕 η 的半长轴之值，这是以下作者根据不同的观测计算而得的结果，而这些作者皆是有名的观测者，以其技巧和经验，而成为这方面的权威的．

	a		a		a
Lohse	1″.09	Dunér	0″.91	W. Struve	0″.85
Dembowski[3]	1.03	Van Biesbroeck	90	J. Herschel	85
Schiaparelli	0.94	Dawes	90	R. Aitken	84
Doolittle	94	Leavenworth	89	Comstock	83
Bigourdan	94	Rabe	88	Kuiper	81
Doberck	94	A. Hall	88	Hussey	80
Phillips	93	Burnham	88	mädler	79
P. Baize	91	Dembowski[2]	87	Dembowski[1]	66

表内两极端值之比约为 3:5．由此可见，双星距离的测量很受人差的影响．

可是，如果只研究某一个人的观测（其观测范围达到轨道相当大的一部分的），我们提出另外一个检验的方法．将观测的距离表为计算距离的函数所绘出的典型直线（图 184），一般不通过原点，而常在原点之上．换句话说，在由为零的计算的距离处，由外推法得出一个非零而为正数的测量的距离．这是可由勒文沃思（Leavenworth）对于白冕 η 双星所作的长期观测而得到说明（图 184）．由此可见，由动丝测微器所作的距离的测量，含有系统差，一般常是超差，即测量值大于计算值，而且测量的距离愈短，所产生的误差愈大．上表内的观测者里，只有马德累尔（Mädler）的典型直线通过原点之下．

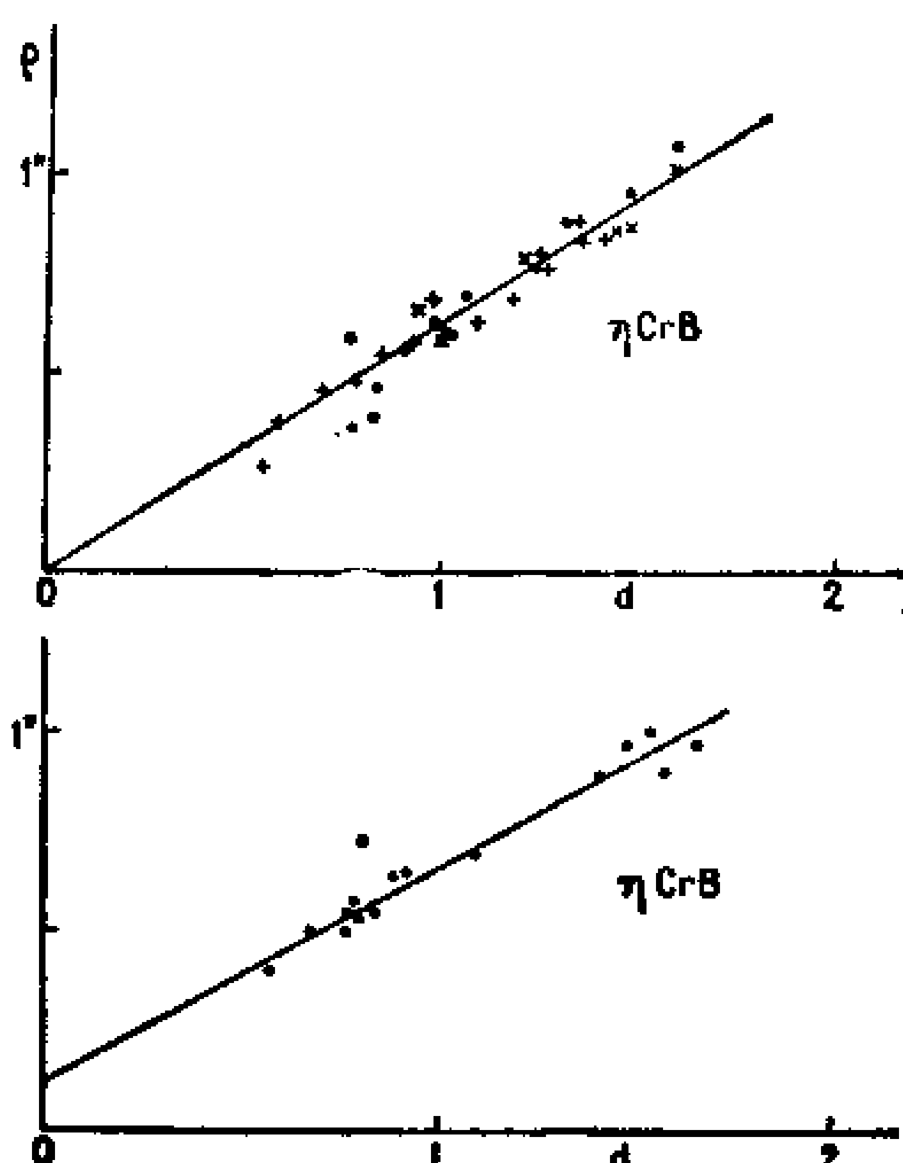


图 184

上图 • Struve 下图 • Leavenworth
+ Comstock
× Aitken

但是只有三个观测者，W. 斯特鲁维、康斯托克（Comstock）与艾特肯（Aitken），他们的典型直线才大致经过原点（图 184），这好象表示他们的观测里没有系统差．同时这三人提供相同的典型直线，因而他们求得的半长轴之值相当接近，其平均值为 0″.84；可是以上 24 个测定的平均值为 0″.89．于是我们合理地把由前三组观测所提供的结果（0″.84）

当做最可几值．但是这样便须承认 24 位观测者之中 16 位所测量的距离皆有很大的系统差，而且只有 4 位的系统差偏于小的一面．因此，这些测量上的偏差不应当看做是偶然差，即不应当把它们看做是高斯式的分布，因而不应当使用最小二乘法去处理它们．计算双星轨道的人，不应当忽略这里所举出的应该注意的事项．

回去讨论公式 (1)：那里说明双星系的质量随长轴的立方而变化．若用上表内有关长轴的数字分别去计算北冕 η 双星的质量，则其两极端值之比为 27:125；由最概值 $0''.84$ 所算出的质量比较由总平均值 ($0''.89$) 所算出的质量，要少 15%．所以我们要问，由双星决定的恒星的质量是否含有一种偏高的系统差？

位置角的测量，好象可以避免严重的系统差．这一类测量的弥散度，比距离的测量要小得多．为了说明问题，试讨论一个实际的例子．双星 OΣ644 在优良的观测条件下，两星差不多一样明亮(星等：6.7 与 7.0)．自有观测以来，两星之间的距离好象总是 $1''.7$，没有什么变化．在口径大于 18 厘米的望远镜里容易分开它们，因而这不是一对难于观测的双星．可是观测到的距离，分布在 $1''.3$ 与 $2''.0$ 之间．下表内的数字是用以绘制图 185 里的累积误差图的，它使我们认识由 40 个观测所给出的平均偏差小于一个极限值．表内第二行是指距离上的偏差 $\Delta\rho$，第三行是指横向上的偏差 $\rho\Delta\theta$．

偏差 <	$\Delta\rho$	$\rho\Delta\theta$
$-0''.40$	0	
35	1	
30	1	
25	2	
20	2	
15	3	0
10	8	2
-0.05	16	6
0.00	22	20
$+0.05$	26	38
10	33	40
15	36	
20	36	
25	38	
30	39	
-0.35	40	

距离上或然偏差达 $\pm 0''.075$，但横向上的偏差却不超过 $\pm 0''.030$．表示弥散度的椭圆(包含观测的位置的一半)，在向径上特别伸长，两轴之比为 2.5．在观测困难的情况下，这比例可达 4 或 5．

使用双象测微器，偏差显著地变小，在两坐标轴上有相同的概值 (P. 密勒尔)．当两星明显地被这仪器分开时，距离的测量上可以免除系统差．照相观测也同样给出良好的结果，但需要焦距在 8 米数量级的望远镜(焦面上 1 毫米 $=25''$)．

计算双星轨道根数以前，我们应先讨论所用的观测．根据的原则不管怎样的好，如果

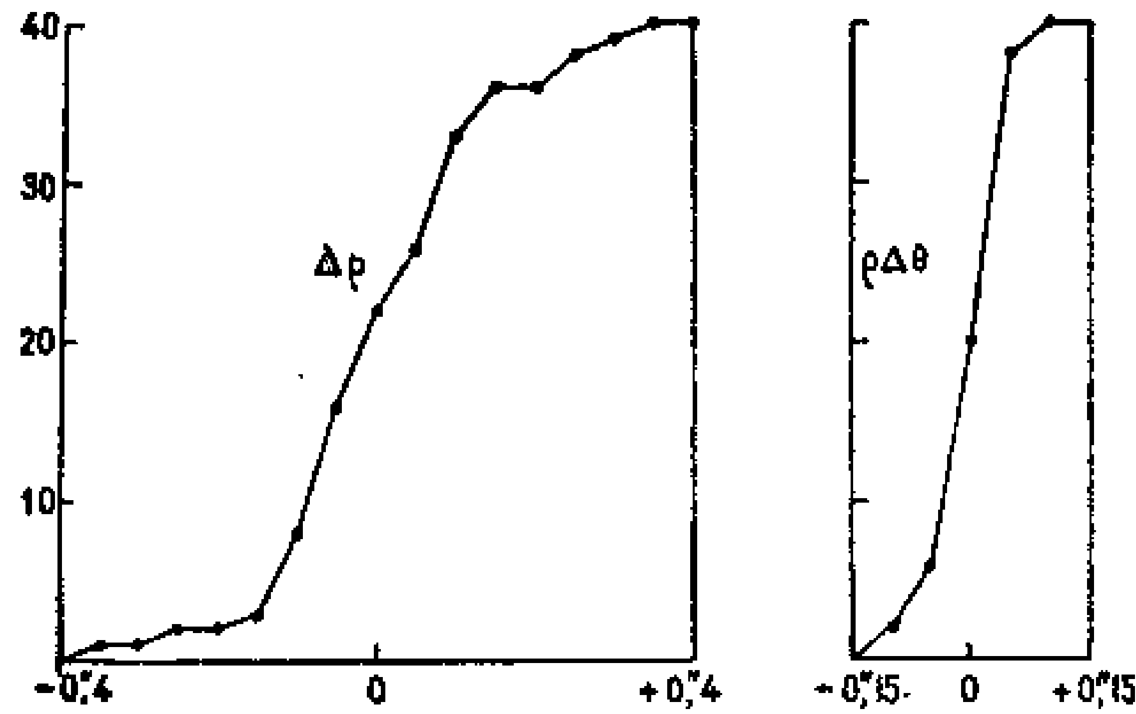


图 185

不正确地使用观测的数据，计算的方法便无实际的价值．以上的讨论表明一个重要的事实，即现在所掌握的距离的测量值，其权重远远低于位置角的测量值，前者常含有严重的系统差．计算者所用的方法，若不能消除距离的数据的误差，而只突出位置角的数据，便应该丢弃那个方法．试举一例说明于下．

许多观测者建议以直角坐标 x 与 y 代替极坐标 ρ 与 θ.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

（这一章内所用的记法与 § 11 里相反，即 x 与 y 互异，这是双星轨道计算者的传统方法）．先计算对直角坐标所带来的偏差：

$$\Delta x=\Delta\rho\cos\theta-\rho\Delta\theta\sin\theta$$

$$\Delta y=\Delta\rho\sin\theta+\rho\Delta\theta\cos\theta$$

若 $\theta=0$，则 $\Delta x=\Delta\rho$，$\Delta y=\rho\Delta\theta$；若 $\theta=90°$，则两坐标上偏差的数值互相调换（不论符号）．因此，以时间函数表示 x 与 y 的周期曲线，在时轴附近比在其顶点附近有更好的决定．若以直角坐标代替极坐标，应给与前者以一个变化的权重．我们不在这里讨论这一类的方法，因为它们只用于有缺欠情况下的观测数据．

结束本节以前，略述双星天文学的现状．已经发现的双星约有 25000 对．若用更多的大型望远镜去探寻，这数目会迅速地增多．在相同的情况下，发现的机会与双星对于太阳的距离成反比例；轨道交角与偏心率增大时，双星之数减少；即使是太阳附近的双星也有很多未被发现，直到现今还很少人探索微弱的双星．

最近刊布的一个双星表[1)]载有 265 对双星的轨道根数，半长轴的分布如下：

半长轴		数目
由 0″.0	至 0″.1	2
0.1	0.2	23
0.2	0.3	40
0.3	0.4	26
0.4	0.5	22
0.5	0.6	19

1) P. Buize, Journal des Observateurs, Vol. 33, p. 1, 1950.

0.6	0.7	18
0.7	0.8	16
0.8	0.9	9
0.9	1.0	9
1.0	2.0	42
2.0	5.0	25
>5″.0		14

双星的数目无疑是半长轴的减函数，因为我们预料，双星的数目是随其与太阳的距离而增多的. 可是据已知双星的数目，它开始随 a 增长，只在 a 超过 0″.2 时才开始减少，这显然是一种选择效应. 距离小于 0″.2 的双星很少被人观测，这是由于一方面所用的望远镜口径不够大，另一方面大气的情况很少能使大望远镜发挥作用. 现时掌握的既微弱又密近的双星的知识异常之少，这是一件很遗憾的缺陷.

§ 150 轨道根数，锡埃耳-因内斯常数

和其他开普勒轨道一样，子星 B 对于子星 A 的相对轨道，由其半长轴 a、偏心率 e，周期 P（或其平均运动 n，表为每年若干角秒），与过近星点的时期 T 而决定. 还须加入决定轨道面的根数.

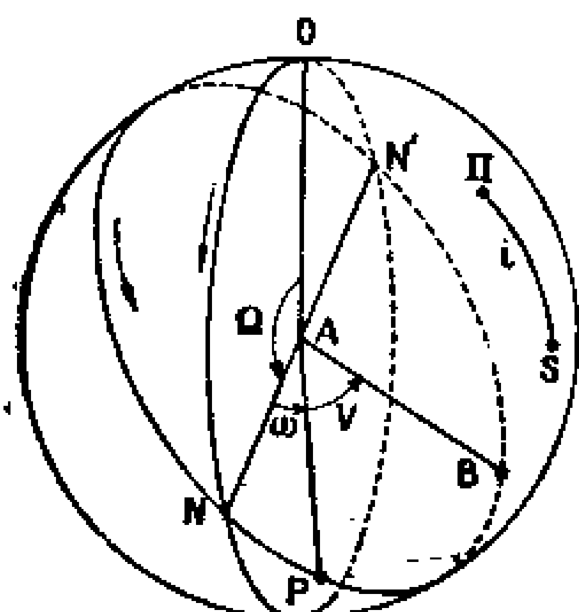


图 186

在以 A 星为心的天球上（图 186），令 S 表示从那里所看到的太阳的方向点. 以 S 为极的大圆是地上观测 B 星的相对轨道所投射的平面，换句话说，即观测所提供的视椭圆平面. 再以 O 点表示位置角的起点，这个角在这大圆上，按箭头所表示的方向计算.

令 NPB 表示轨道而，再令 π 表示其一个极点，从这一点看 B 星的运动是顺向的. 据定义，πS 弧表示轨道的交角 i. 若视运动是顺向的，则 i 在 0 与 90° 之间（θ 与 t 同时增加）；若视运动是逆向的，则 i 在 90° 与 180° 之间（t 增时 θ 减少）.

交线 NN' 由其位置角 Ω 而规定，公认其在 0 与 180° 之间变化. 交角所属的交点 N，按情形可以是升交点或降交点；决定时须测定两星的视向速度. 由于常缺少这一数据，它与轨道投射面的对称情况便难区分.

最后，将轨道准确地放在它的平面上，还须决定拱线（远近线）的方向. 这方向由近星点 P 与交点 N 的经度之差而决定. 这个角以 ω 表示，可有 0 至 360° 之间的任何一个数值；从交点起按星在轨道上运动的方向计算. 总之，双星的轨道由以下 7 个根数决定：

a	半长轴
e	偏心率
P	周期（或 n 平均平行度）
Ω	交点的位置角
ω	近星点对于交点的经度
i	交角

T　　过近星点时刻

设伴星经过交点 N 之时，是离开太阳而去，则交角为正，相反的情形为负．若没有视向速度的数据去作出决定时，我们在 i 上加以双符号，以表示不确定的情况．

观测提供 a，与距离 ρ 都表为角秒．至于周期 P，可表为儒略年．

由于椭圆的焦点不具投射性，A 星不在视轨道的焦点处；但真轨道的中心却投射为视轨道的中心，两轴投射为两共轭径．此外，视运动亦遵循面积定律．

令 r 表示真轨道上的向径(第十章)；v, u 与 M 分别表示真、偏与平三个近点角，则

$$r=a(1-e\cos u)$$

$$r\cos v=a(\cos u-e)$$

$$r\sin v=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

$$u-e\sin u=M=n(t-T)$$

令

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{r}{a}\cos v=\cos u-e\\ Y&=\frac{r}{a}\sin v=\sqrt{1-e^2}\sin u\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

X 与 Y 是 B 星在真轨道上的约化坐标．上节里所规定的坐标 x 与 y 和约化坐标，为下列齐次线性式所联系：

$$\left.\begin{aligned}x&=AX+FY\\ y&=BX+GY\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

这两个关系式中，常数 A, B, F, G，叫做锡埃耳-因内斯 (Thiele-Innes) 常数．这些常

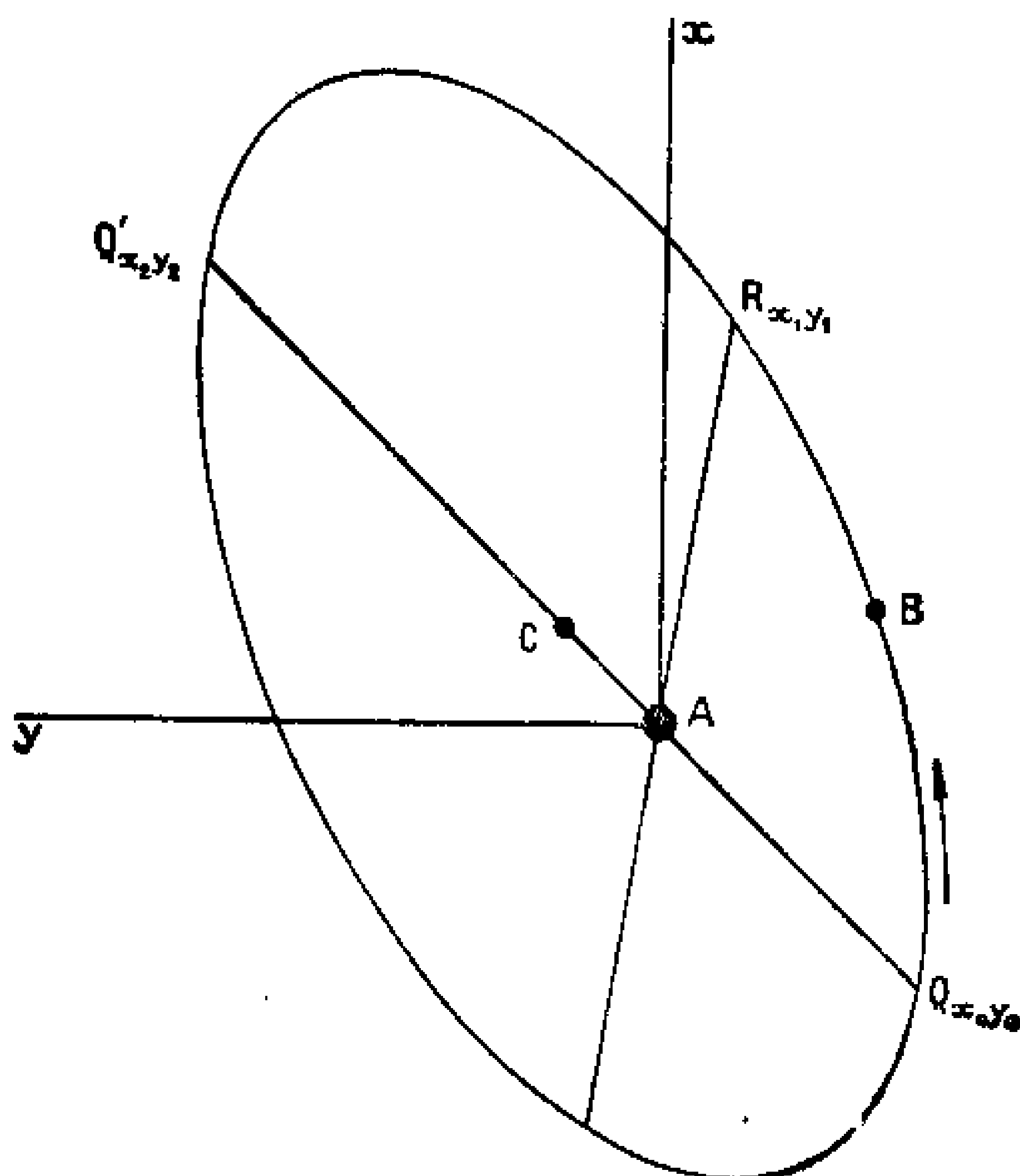


图 187　北冕座 η 星的轨道

数亦如半长轴以角秒表示．将约化坐标表为偏心率与偏近点角的函数，编制有便于使用的数字表[1]．只须知道锡埃耳-因内斯常数和平均运动，偏心率与过近星点时刻，便可编制视轨道的星历表．换句话说，编制星历表时以锡-因常数代替轨道根数 a, Ω, ω, i 更为便利．许多作者刊布轨道根数时，附以锡-因常数或甚至只刊布这些常数，不过对于双星轨道作统计讨论之时，是需要轨道根数的．

我们容易将这两系数字作相互的转换．在视轨道上，令（图 187）Q 表示近星点的投影，x_0y_0 表示 Q 点的坐标；R 表示真近星点，等于 $+90°$，x_1y_1 表示它的坐标．于是近星点的约化坐标为 $1-e$ 与 0；因此

$$x_0=A(1-e) \quad y_0=B(1-e)$$

R 点的约化坐标为 0 与 $1-e^2$，则

$$x_1=F(1-e^2) \quad y_1=G(1-e^2)$$

我们可将这些坐标表为轨道根数的函数；由图 186 可以求出关于近星点的下列公式：

$$\left.\begin{aligned} x_0&=a(1-e)(\cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i)\\ y_0&=a(1-e)(\cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i)\end{aligned}\right\}$$

若在这两式里，以 $1-e^2$ 代 $1-e$，以 $\omega+90°$ 代 ω，便将其转化为表示 R 点的公式：

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a(1-e^2)(-\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i)\\ y_1&=a(1-e^2)(-\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i)\end{aligned}\right\}$$

综合以上两组公式，便得如下的恒等式：

$$\left.\begin{aligned} A&=a(\cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos i)\\ B&=a(\cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos i)\\ F&=a(-\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\sin\Omega\cos i)\\ G&=a(-\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega\cos i)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

利用上式作如下的组合：

$$\left.\begin{aligned} A+G&=2a\cos(\Omega+\omega)\cos^2\frac{i}{2}\\ B-F&=2a\sin(\Omega+\omega)\cos^2\frac{i}{2}\\ A-G&=2a\cos(\Omega-\omega)\sin^2\frac{i}{2}\\ B+F&=2a\sin(\Omega-\omega)\sin^2\frac{i}{2}\end{aligned}\right\}$$

于是轨道根数可以锡-因常数表出：

$$\left.\begin{aligned} &\tan(\Omega+\omega)=\frac{B-F}{A+G} \quad (0<\Omega<180°)\\ &\tan(\Omega-\omega)=\frac{B+F}{A-G} \quad (0<\omega<360°)\\ &\tan^2\frac{i}{2}=\frac{A-G}{A+G}\,\frac{\cos(\Omega+\omega)}{\cos(\Omega-\omega)}=\frac{B+F}{B-F}\,\frac{\sin(\Omega+\omega)}{\sin(\Omega-\omega)}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

剩下的是计算 a，这是可由面积常数而求得的．令 C 表示真轨道里的这个常数，Γ 表示

1) 例如：Tables of X and Y; Appendix to Union Observatory Circular no. 71, Pretoria, 1927——这些表里的 X 与 Y 达到 5 位小数，M 的间距为度，e 从 0 到 1，间距为 0.01.

投影运动里的面积常数，则

$$\Gamma = C\cos i$$

但

$$\Gamma = xy' - yx' = (XY' - YX')(AG - BF) = \frac{C}{a^2}(AG - BF)$$

故

$$a^2 = \frac{AG - BF}{\cos i} \tag{7}$$

§151 视椭圆的绘制

目视双星轨道根数的计算方法，可以分为主要的两类.

1．几何学方法，须用观测数据先绘制视轨道，这样一方面须利用椭圆的一般性质，另一方面须利用真轨道投射面成的视轨道的某些性质，如 A 星在焦点，B 星的运动遵守面积定律.

2．动力学方法，须用椭圆运动的理论，但并不须绘出视椭圆；原则上只须掌握双星的三个位置．计算双星轨道的动力学方法，与十一章内所说的计算行星或彗星轨道的方法，很是相似.

在以上两种方法的基础上有许多综合或改进的方法．叙述了视椭圆的绘制法之后，我们将叙述三个方法于下.

以上讲过，由于测量值的弥散度相当大，在绘制视轨道之时，须对观测数据加以仔细的讨论．若在一张极坐标纸上，绘出测微器所给出的 B 里的位置（自然须先经过较差岁差的改正，将这些位置归属于相同的一个春分点)，这样绘出的点子表现相当大的弥散．初步描绘的视椭圆表现相当大的随机性.

但是计算者应根据下列几个有指导性的原则，改进这种粗糙的结果．例如，在视椭圆上，由其几点所算出的 $\rho^2\frac{d\theta}{dt}$ 一量应有相同的数值，即面积常数 Γ．于是分别绘出 $\rho(t)$ 与 $\theta(t)$ 两根曲线，面在 $\rho(t)$ 选出某些时刻的 ρ 的数值，并在 $\theta(t)$ 上选出相同时刻的 $\frac{d\theta}{dt}$ 的数值．第一次所推得的几个面积常数，常有相当大的差异．于是修正这两根曲线，以使 $\rho^2\frac{d\theta}{dt}$ 趋向于相同的数值．以上讲过位置角比距离测量得更加精确，因此须主要修正的是曲线 $\rho(t)$．绘曲线 $\theta(t)$ 时，我们尽量使其经过观测点的平均位置，但绘曲线 $\rho(t)$ 时（如须描绘的话)，则应受到下述原则的指导.

对于视轨道的初步调准所提供的遵守面积定律的曲线，一般不会是椭圆的．因此须作再度的调整，即将这个视轨道上的凹凸突出的部分加以修整，面在遵守面积定律的原则下，使其与最接近的椭圆相重合．在这一系列的近似调整里，有时须作重大的修改，因面其结果使这两根曲线离开观测的点子，其中受影响最大的是 $\rho(t)$.

由以上的探索所绘出的椭圆，与单凭观测的位置所绘出的曲线，常有相当大的偏离．图 188 表示双星 A 88 的观测位置与经过探索后所采取的视椭圆；读者可以领会，在绘制过程中作了怎样大的调整．不过这里所举的一例是一个特别困难的情形；双星间的距离从来没有达到 0″.20．因测量的距离和其平均值相差不大，因而观测的位置可能表示为以

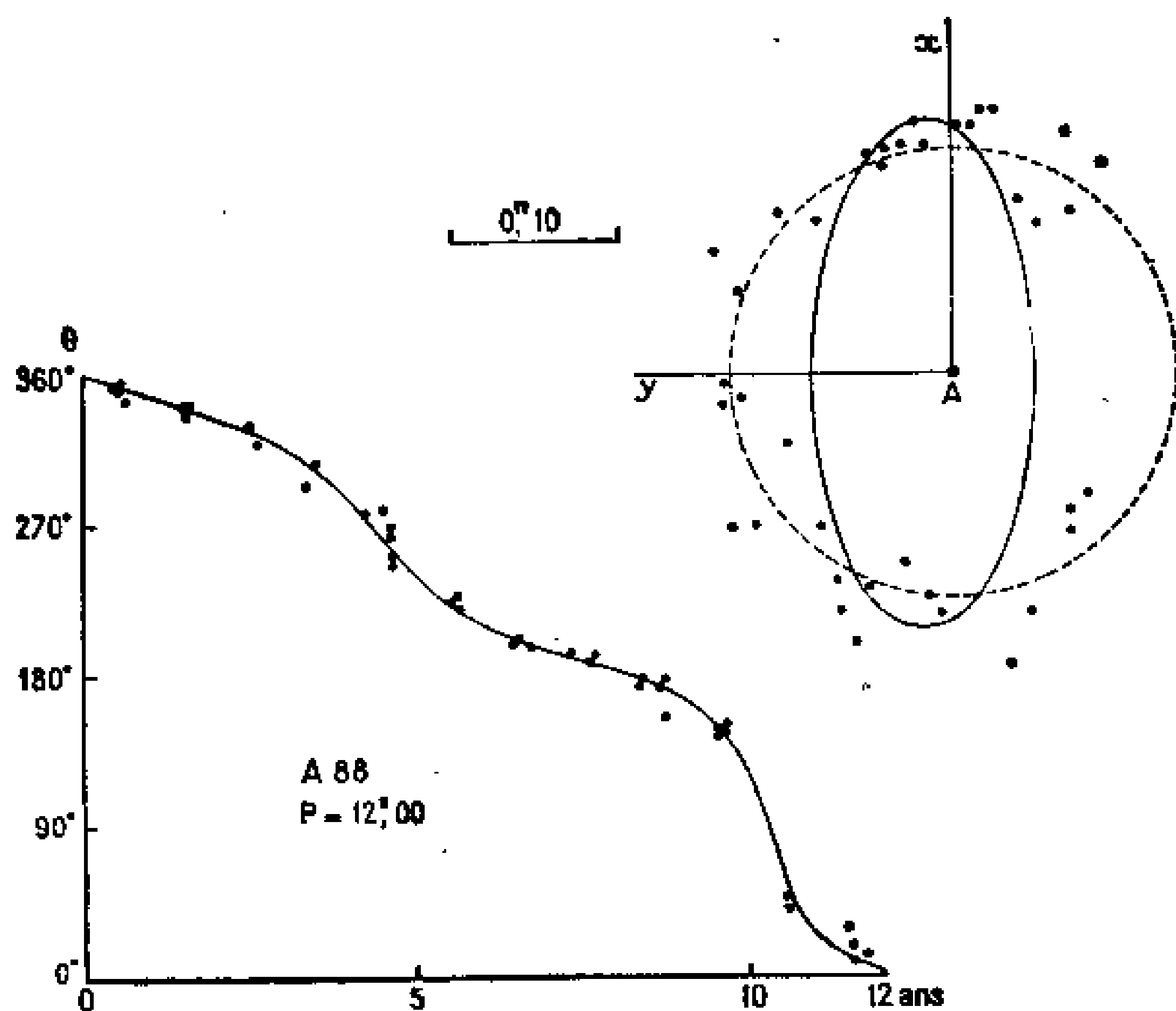


图 188

A 为心的视正圆(图中的虚线)．但是另一方面，$\theta(t)$ 却和直线相差太远，因而我们不能采用正圆作为视轨道的假设；这曲线(图中的实线)只能与一个相当扁长的轨道相适合．

若观测的范围超过一个全周之时，我们在改正了岁差的位置角里，寻找其再度取得同一数值所经过的时间，而觅得其周期．但是观测的范围不及一周时，只能用外插法，去估计周期的数值，因面根数便很不确定．若想使用周期里一段时间的观测，去确切地决定轨道，则距离的数据必须比现时所掌握的要精密得多．照象或双象测微器所作的观测，在这一点上作了显著的贡献．

结束本节时，我们提出一个有实际意义的问题．位置角无疑是观测中比较好的一部分；但在描绘视椭圆的过程中，我们使用的不是 θ 而是 $\frac{d\theta}{dt}$．我们知道，根据经验函数去求导数具有相当大的偶然性．因此，我们不禁要问，用视椭圆去计算轨道根数的方法，是否将观测的数据作了最好的利用．

§152 几何学方法

假想视轨道已经绘成(图 187)，令 C 为其中心，这一点可由下法求出．选两个适当的方向，求其平行弦中点的轨迹，因为这轨迹作成两个共轭直径，故其交点即是椭圆的中心．

于是，我们绘出真轨道的长轴的投影 CA，这便决定了近星点 Q 与偏心率 e:

$$e=\frac{\overline{CA}}{\overline{CQ}}$$

若已知 Q 点的位置角，则过近星点的时刻 T，可由 $\theta(t)$ 曲线读出．另外，周期 P 可由位置角再度取得同一数值时而决定．

令 x_0 与 y_0 为近星点 Q 的坐标，x_2 与 y_2 为远星点的坐标；下列的关系式提供为首的两个锡-因常数：

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{x_0}{1-e}=\frac{x_2}{1+e}\\ B&=\frac{y_0}{1-e}=\frac{y_2}{1+e}\end{aligned}\right\}$$

为了求另外两个常数，只须绘出真近点角为 $+90°$ 的 R 点的投影. 这是可在视轨道上描绘与 QQ' 为共轭的弦 AR 而求得的；这直径是平行于 QQ' 的弦线中点的轨迹. 令 x_1 与 y_1 表示 R 点的坐标，则

$$\left.\begin{aligned} F&=\frac{x_1}{1-e^2}\\ G&=\frac{y_1}{1-e^2}\end{aligned}\right\}$$

利用 §150 里的公式，这问题便得到了完全的解决.

求真轨道根数有几种图解法，现在只谈兹维尔斯 (Zwiers) 的方法. 设 E 表示视椭圆 (图 189)，依次决定拱线 QQ'，偏心率 e 和视轨道里与 QQ' 共轭的直径 VV'. 因 VV' 是真轨道的半短轴的投影，若延长与 VV' 平行的半弦 HB 至 B' 点，使

$$HB'=HB:\sqrt{1-e^2},$$

这样便逐点绘出辅助椭圆 E'，这是真轨道的大圆的投影. 这辅助椭圆的长轴 MM' 之长度为 $2a$，其方向平行于交线 NN'，于是便可确定这交线的位置角 Ω. 再将 E' 围绕 MM' 轴旋转，便得真轨道(为清晰起见没有绘在图内). 在这平面，我们量度 $\angle MCQ_1=\omega$，这是因为交角 $i=\angle Q_1KQ_2$ 的原故. 旋转后的真轨道拱线便是 Q_1C.

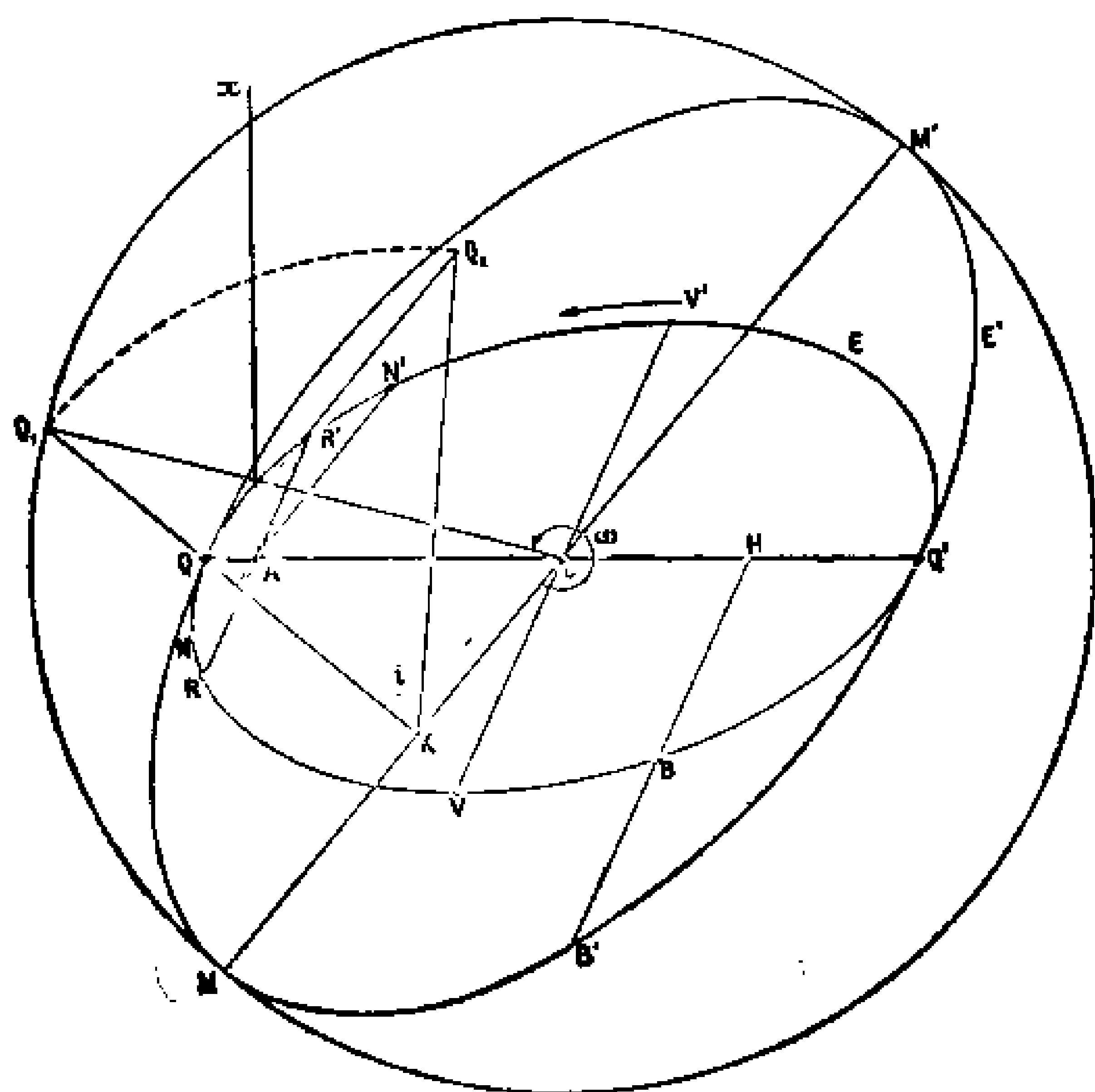


图 189 宝瓶座 24 号双星的轨道

当 $i=90°$ 时，以上两个方法都不合用. 视轨道退化为一根直线. B 星在 A 星两旁作周期性的往返. 它的位置角更替为 Ω 与 $\Omega+180°$. 在两星视合前后的或长或短的一段时间内，我们观测不到它们之间的距离，因而在每一运行周内观测数据里有一或长或短的缺空. 若所有轨道根数(除了 Ω)的决定都依靠距离，则这是一个特别不利的情形. 下节所谈的几何学方法是稍加改进的克罗弗德(Crawford)方法.

设以距离达到其极大值的方向为负，其反方向为正. 以交线 NN' 为表示距离的轴，并以 At 为表示时间的轴 (图 190)，则距离 $\rho(t)$ 的变化是一条周期性的曲线. B 星所走

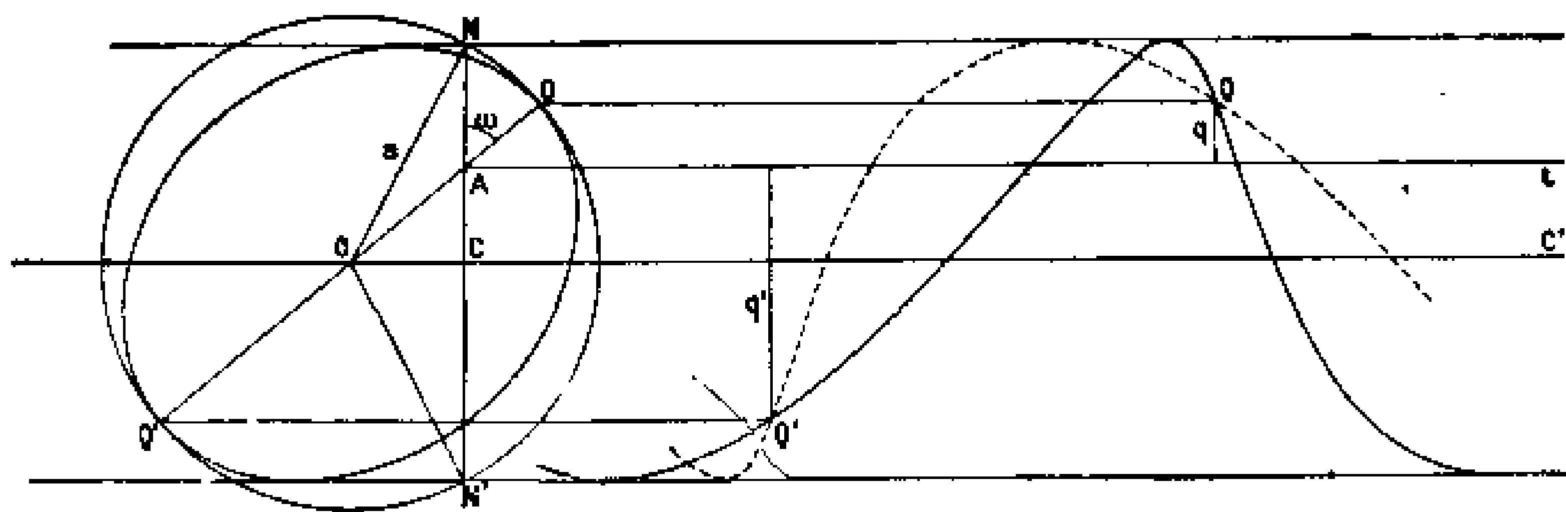


图 190

过的 NN' 线段的中点 C 是轨道中心的投影；作 CC' 平行于 At. 假想轨道是绕交线旋转而形成的(图的左面)．

在曲线 $\rho(t)$ 上,与近星点和远星点对应的 Q 与 Q' 两点，满足如下三个关系：这两点对 CC' 是等距的,但在这直线的两侧；它们的坐标相差半个周期；最后，一点在曲线的升支上，另一点在曲线的降支上．于是在一张透明纸上绘上与 CC' 对称的曲线 $\rho(t)$；其实这只须描摹这曲线，而将纸面对面地旋转 180°．作半周期的平移，于是对称的曲线便放在虚线所表示的位置上．曲线 $\rho(t)$ 与其转变后的曲线的交点，便是要寻找的 Q 与 Q' 点．我们容易由其不能满足以上三个条件之点,面剔除不需要之解,并采取纵标为正之一点作为近星点．其横标提供过近星点的时刻 T.

设 q 与 q' 表示和 Q 与 Q' 对应的 ρ 的绝对值,则

$$e=\frac{q'-q}{q'+q}$$

另外，焦点在椭圆的切线上的投影是大辅助圆上的一点．令 d 与 d' 表示 B 星对于 A 星的最大距离 AN 与 AN' 的绝对值．在 AON 与 AON' 两三角形里，

$$\left.\begin{aligned}a^2&=a^2e^2+d^2+2aed\cos\omega\\a^2&=a^2e^2+d'^2-2aed'\cos\omega\end{aligned}\right\}$$

并有

$$2ae\cos\omega=2\overline{AC}=q'-q$$

故

$$\left.\begin{aligned}a^2(1-e^2)&=d(d+q'-q)=d'(d'-q'+q)\\\cos\omega&=\frac{q+q'}{2a}\end{aligned}\right\}$$

这问题可算是完全解决了,但如上所说,解答却很不确定．不须说，若交角虽非 90°，而却和 90° 相差不多时,不确定的情形仍然是存在的．

再回到一般的情形．由以上任何一个方法,借视椭圆描绘而得出的轨道,只能看做是一种暂用的轨道,其根数是须加以改进的．这里可用微差改正法．对于用过的每一位置,先计算观测值与计算值之差 $\Delta\theta$ 与 $\Delta\rho$．每一位置提供两个如下形式的条件方程式：

$$\Delta\theta=\alpha\Delta\Omega+\beta\Delta\omega+\gamma\Delta i+\delta\Delta e+\varepsilon\Delta T+\zeta\Delta P$$
$$\Delta\rho=\alpha'\Delta a+\beta'\Delta\omega+\gamma'\Delta i+\delta'\Delta e+\varepsilon'\Delta T+\zeta'\Delta P$$

式内 α, α', β, $\beta'\cdots$ 系数是暂用轨道根数和平近点角或偏近点角的函数，$\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, $\Delta i\cdots$ 是要求的这些轨道根数的改正值．可以最小二乘法或科希(Cauchy)方法去解这些条件方程式[1]．

1) 我们不在这里给出条件方程式里的系数的表达式．读者可在 R. Aitken, The Binary Stars 书中寻得，亦容易由椭圆运动的公式推导出来．

一般地说，计算者只须解与位置角的离差 $\Delta\theta$ 有关的条件方程式，因为只有这些离差才大约遵守高斯分布. 只利用位置角，我们可以求得半长轴（因其不在含 $\Delta\theta$ 的条件方程内）以外的其他根数（同时也可看见含 $\Delta\rho$ 的方程内没有交点的位置角）. 这以后我们计算 $\Delta\rho$ 对于改进后的根数的数值，并利用只含 Δa 的方程式去计算 Δa.

总之，计算的过程分为三段：1. 用极坐标 ρ 与 θ 相当复杂的组合，先描绘出视椭圆；2. 用几何作图或简单计算决定一个暂用轨道；3. 改正暂用根数；在最后的计算里，只用位置角，除了必须依靠测量的距离去决定半长轴之时. 这一计算法好象不很调和. 为什么在暂定 7 个根数中的 6 个时引入距离的数据，而在最后的确定解内反不用距离呢？我们不应当对第 2 计算过程的简单性发生幻觉. 事实上，几何学方法里有很繁冗的探索过程，其不确定的情形常使计算者感觉不很满意.

§ 153 动力学方法

这方法是由第九章而来的动力学的方法，须利用 § 93 里的关系式. 因其先由锡埃耳提出，更经因内斯与万·登·博斯 (Van den Bos) 改进，故又以锡埃耳–因内斯–万·登·博斯的方法命名.

设已知 B 星在视轨道上的三个位置，令 t, x, y（并附以下标 1, 2, 3）表示对应于这些位置的时间与坐标. 令

$$\theta_1=t_2-t_1 \qquad \theta_2=t_3-t_2 \qquad \theta_3=t_3-t_1$$

$$2s_1=x_1y_2-x_2y_1$$

$$2s_2=x_2y_3-x_3y_2$$

$$2s_3=x_1y_3-x_3y_1$$

s 表示以 A 和 B 星的连续两个位置为三顶点的三角形的面积. 并以 S 表示真轨道上对应的面积，则

$$s_j=S_j\cos i \quad (j=1,\ 2,\ 3)$$

设 u 表示偏近点角，更令

$$h_1=u_2-u_1 \qquad h_2=u_3-u_2 \qquad h_3=u_3-u_1$$

则 § 93 里的公式(11)（那里以 $2g$ 表示 h），可以写为

$$2nS_j=C(n\theta_j-h_j+\sin h_j) \quad (j=1,\ 2,\ 3)$$

C 表示真轨道里的面积常数. 由真轨道过渡到视轨道，应在以上的关系式里，以 s 代 S，以 Γ（投影面内的面积常数）代 C，于是推出锡埃耳方法的基本关系式：

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1-\frac{2s_1}{\Gamma}=\frac{1}{n}(h_1-\sin h_1)\\
&\theta_2-\frac{2s_2}{\Gamma}=\frac{1}{n}(h_2-\sin h_2)\\
&\theta_3-\frac{2s_3}{\Gamma}=\frac{1}{n}(h_3-\sin h_3)\\
&h_3=h_1+h_2
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

有两种情形可以出现. 设已知周期 P，因而平均运动 n. 方程组(1)里的未知数为 Γ, h_1,

h_2, h_3. 用 $h-\sin h$ 函数数字表，容易以逐渐逼近法求解. 先给与 Γ 以几个选定的数值，由每一个数值在三个方程里去计算 h; 然后在这些 Γ 的数值里去作内插，以求一个能够满足最后一式的 Γ.

若观测的范围不到双星运动的一周，则周期不能决定，因而平均运动 n 便是一个未知数. 于是须回到视轨道去决定面积常数 Γ. 这一决定不很可靠，因为测定的范围只在一个扇形，而不在整个视轨道之内. 将这样求得的 Γ 代入方程组(1)，再给与 n 以几个不同的数值而解方程组(1)，以期寻得 n 的一个数值，足以使前三个方程所给出的 h，能够满足最后的那个关系式.

跟着应该决定一个近点角(例如 u_2) 的数值. 克普勒方程提供下列两个关系式:

$$\left.\begin{aligned} e(\sin u_2-\sin u_1)&=h_1-n\theta_1 \\ e(\sin u_2-\sin u_2)&=h_2-n\theta_2 \end{aligned}\right\}$$

因有

$$u_1=u_2-h_1 \qquad u_3=u_2+h_3$$

以上两式可以写为

$$\left.\begin{aligned} e[\sin u_2(1-\cos h_1)+\cos u_2\sin h_1]&=h_1-n\theta_1 \\ e[\sin u_2(\cos h_2-1)+\cos u_2\sin h_2]&=h_2-n\theta_2 \end{aligned}\right\}$$

且由此推得

$$\left.\begin{aligned} e\sin u_2&=\frac{(h_1-n\theta_1)\sin h_2-(h_2-n\theta_2)\sin h_1}{\sin h_1+\sin h_2-\sin h_3} \\ e\cos u_2&=\frac{(h_1-n\theta_1)(1-\cos h_2)+(h_2-n\theta_2)(1-\cos h_1)}{\sin h_1+\sin h_2-\sin h_3} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这两式提供 e 与 u_2.

在方程组(1)和(2)之间消去 h 与 θ，可得出另外两个与(2)等价的方程组:

$$\left.\begin{aligned} e\sin u_2&=\frac{-s_1\sin h_2+s_3\sin h_1}{s_1+s_2-s_3} \\ e\cos u_2&=\frac{s_1\cos h_2+s_2\cos h_1-s_3}{s_1+s_2-s_3} \end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

既知 e 与 u_2 之后，可以推算 u_1 与 u_3，然后再算出对应于三个位置的平近点角以及它们的约化坐标. 更可由平近点角与其对应的时刻，而推得过近星点的时刻 T. 最后解下列方程而得锡-因常数:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=AX_1+FY_1 \\ x_3&=AX_3+FY_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y_1&=BX_1+GY_1 \\ y_3&=BX_3+GY_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这问题可算是初步解决了. 不用说，这样求得的暂用轨道，应根据上节所说的微差改正法加以改进.

在原则上，动力学方法不需先绘制视椭圆，但观测的范围不满一周时，亦允许利用视椭圆. 由实践得知，描绘视椭圆(如果可能的话)是有很大帮助的. 事实上，因观测的弥散度很大，这样求得的轨道与实际的情况相差很远. 为了综合尽量多的数据去作轨道的决定，最后的调整实际上与绘制视椭圆时所作的调整大致相同.

总之，不论是否要描绘视轨道，在暂用轨道的决定上必须使用距离的数据. 因此，动力学方法和几何学方法一样，在这一点上应作类似的保留.

动力学方法应用于观测不满一周的轨道上，有其无可辩驳的优点，但若所用的数据是从动丝测微器得来的，则这优点仅是理论的而已. 我们只好希望使用双像测微器或照像

观测所提供的比较精确的数据，从部分视轨道去推出长周期双星的轨道根数。只有在这情形下，动力学方法才能在实际上表现出它的优点。

§ 154 对 点 法

以上几节所提出的论点，使我们认识在轨道的决定上由测量而得的距离之使用，应尽量推迟到最后的阶段。就事实(而非就原则)来说，若我们所掌握的一长序的观测，既无系统差，而且在两个坐标上一样的精确，在计算过程里便可自始至终作合理的使用；但现今的情况却不是这样的。

为了只用位置角的数据，去决定轨道根数(半长轴除外)，本书作者提出了对点法[1]。这方法除了曲线 $\theta(t)$ 的绘制外，不须有其他的作图，既不须用视椭圆(这样节省不少计算者的劳力)，也不须计算 $d\theta/dt$，这更消除一个不定的因素。

叙述这方法之先，试在开普勒轨道上推导出对点的几个性质。所谓"对点"是轨道上真近点角(因而其位置角)相差为 180° 的 B_1 与 B_2 两点。因此 AB_1B_2 所形成的三角形的面积为零，锡埃耳的基本方程对于两个对点便简化为

$$n\theta = M_2 - M_1 = h - \sin h = u_2 - u_1 - \sin(u_2 - u_1) \tag{1}$$

M_1 与 M_2 表示这两点的平近点角，u_1 与 u_2 表示其偏近点角。

令

$$n\theta = 180° - \Delta \tag{2}$$

容易证明，$u_2 - u_1$(因而 Δ)只是平近点角 M_1 与偏心率 e 的函数。由于(§ 83 内 10 式)

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

故

$$\tan\frac{u_2}{2} = -\frac{1-e}{1+e}\cot\frac{u_1}{2} \tag{3}$$

$$\tan\frac{u_2-u_1}{2} = -\frac{1-e\cos u_1}{e\sin u_1} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin v_1} \tag{4}$$

但因 v_1 是 M_1 与 e 的函数，故 $u_2 - u_1$ 也只是 M_1 与 e 的函数。

设在(2)式里，以 $v_2 - v_1$ 代 180°，则这关系式可以写为

$$\Delta = (v_2 - M_2) - (v_1 - M_1)$$

可见 Δ 角等于两对点的中心差之差；这一结论为编制含两参数的函数 $\Delta(e, M)$ 的数字表，提供一个迅速的方法，这里可以利用开普勒运动表。图 191 表示 Δ 对于 e 的几个数值，随 M_1 的函数而变化的曲线；这些曲线叫做特征曲线，因其只随一个参数 e 而变化。为了推广到 M_0 大于 180° 的数值，只须作对于 $M = 180°$，$\Delta = 0$ 为对称之点的曲线。

设已知 Δ 与 e，则由这数字表示可求平近点角 M_1，再用开普勒运动表示推算真近点角 v_1[2]。

---

1) 参看：Nouvelle méthode pour la détermination des éléments des étoiles doubles visuelles. Bulletin Astronomique, XI, fasc. 4, p. 191, 1938.

2) P. Muller, Table pour le calcul des éléments des orbites des étoiles doubles visuelles, Ann. de l'Obs. de Strasbourg, V, 5e fasc., 1956，表中有本书作者的序言。表内给出 M 为 Δ 与 e 的函数。还有 F. Schlesinger et S. Udick, Tables for the true anomaly in elliptié orbits. Publications of the Allegheny Observatory, II, no. 17, p. 155. 表内的间距，v 为 0°.01，M 为每一度，e 为 0.01 直到 e=0.77 而止。

经过这些初步讨论以后，再进行轨道根数的计算．因曲线 $\theta(t)$ 至少描绘了一整周，故可从那里推出周期 P 和平均运动 n. 然后在这曲线上取出 B 星经过某些对点的时刻．为明确起见，我们选择适合于 0 与 180°，10° 与 190°… 的若干双对点（每隔 10° 选择一对）．设 t_1 与 t_2 表示两对点在这些选择点的时刻，则对应的 $\varDelta$ 之值为

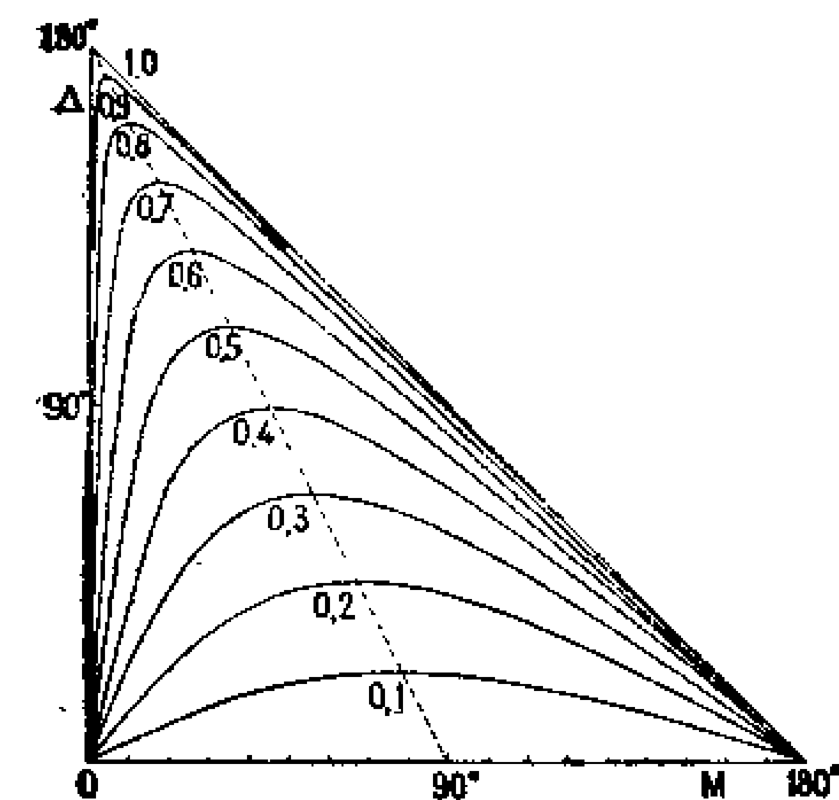


图 191

$$\varDelta=n(t_2-t_1)-180° \tag{5}$$

于是由此计算对于每双对点的 $\varDelta$ 的数值．另一方面，设 T 表示过近星点的时刻，则平点角 M_1:

$$M_1=n(t_1-T)=nt_1-M_0 \tag{6}$$

T 还是未知数，我们只能计算 nt_1，它和 M_1 差一个常数 M_0，但这便足够去描绘特征曲线 $\varDelta(e, M_1)$，它和 M_0 只差一个平移．这里所陈述的方法便建立在这一前提之上．

事实上，$\varDelta$ 从增长值为零之点，相当于横标 M_0，于是可以推得与它对应的时刻 T，因而可以计算轨道上每一点的平近点角．另一方面，以同一尺度在透明纸上描绘图 191 中的特征曲线网，而将其放在刚才所绘的曲线上去，便可读出偏心率的一个数值，然后再用计算去改进这个数值．为了使由观测得来的特征线规范化，这里应对曲线 $\theta(t)$ 作一度调准．从此，真近点角 v 的计算便没有什么困难了．

这以后便只有代数式的计算了，目的在决定锡-因常数．§150 里的公式所规定的锡-因常数，可以写为如下的形式：

$$a\rho\cos\theta=r(A\cos v+F\sin v)$$
$$a\rho\sin\theta=r(B\cos v+G\sin v)$$

由此消去 $a\rho$ 与 r，便得

$$A\sin\theta\cos v+F\sin\theta\sin v-B\cos\theta\cos v-G\cos\theta\sin v=0 \tag{7}$$

但是对于每一对对点，现在所知道的不只是位置角，而且有平近点角，因而还有真近点角 v．与这些点中每一点相对应的有一方程式(7)．$\theta(t)$ 曲线描绘上的误差，表现在 $\varDelta$ 的误差之上，因而也在 M 与 v 之上，所以我们由两对点所求得 v 之差，一般不恰好是 180°；因此最好将这两个角分别引入两个不同的方程里去．

为了这部分的计算，我们可以再回到观测上去，即在方程(7)里介入对应的每个或每组观测的 θ．然后求出每个观测的位置角的离差 O–C，更由残差的整体讨论去校验以上的计算．

方程(7)的解，可用最小二乘法，但因系数的符号有改变，最好使用捷速得多的科希方法．这样求得的未知数 A, B, F, G 差了一个因数，这因数可能是它的一个的倒数；换句话说，这些未知数可能是 A/F, B/F 与 G/F.

由于以上求得的锡-因常数是相对值，轨道根数便不能确定（半长轴除外，因其计算需要距离 ρ 的测量值）．为了利用 ρ 的测量值，我们应在与视轨道类似的辅助椭圆内，去计算同一时期的 d．于是我们因给与这些常数之一以任意的数值，譬如令 F 为 1，而规定

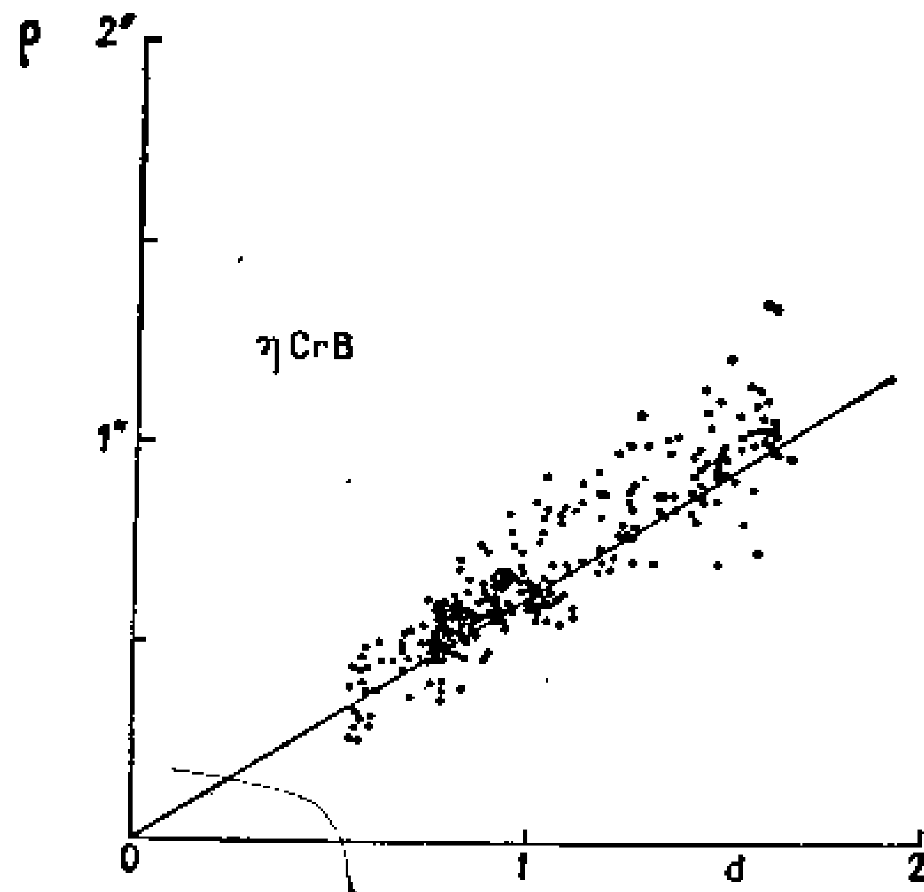


图 192

了轨道．原则上每一观测提供一个 F，即 ρ/d 的数值．这样求得了 F 之后，可求出其他三个常数，且将它们表为若干角秒；于是半长轴也决定了．

这里须对距离的测量值进行一番讨论．观测值 ρ 表为计算值 d 的函数的图解，常表现有相当大的指导意义．§149 里曾举出几个例子，生动地表明观测里所含的系统差的性质．图 184 表示几位观测者对于北冕 η 星的 $\rho(d)$ 的图解．图 192 表示这颗星的全部观测的情况．图中的点子绝不象分布在过原点斜率为 F 的一条直线的附近．事实上，这些点子分布在斜率很不相同的两直线之间的空隙里．§149 里所指出的理由使我们采取 $F=0''.625$，比较由图 192 里的直线定出，即由整个观测定出的总平均值 $0''.67$，稍微小了一点．由此求得北冕 η 双星的轨道根数如下：

	P	41.56 年	
	T	1892.39	
	e	0.276	
A	$-0''.476$	a	$0''.839$
B	-0.520	Ω	$24^\circ.2$
F	$+0.625$	ω	$219^\circ.6$
G	-0.086	i	$\pm 58^\circ.9$

因双星系的视差为 $0''.065$，故

$$a=12.9 \text{ 天文单位}$$

$$m_1+m_2=1.25 \text{ 太阳质量}$$

图 187 表示这双星的视轨道，图中极长的距离只有 $1''.01$，这规定了图中的标尺．

附录　据数字表所定的函数求插值、导数与积分

1. 一次、二次与高次差

函数 $y(x)$ 的表，提供与 x 等区间的数值 $x_0, x_0+h, x_0+2h, \cdots$ 对应的 y 的数值．所谓求插值，便是决定一个表内所不载的与 x 对应的 y 的数值．

以下所说的插值法，须用表载的差数．令 $\cdots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2\cdots$ 为某些等区间的表载值，而 $\cdots y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2\cdots$ 是和它们对应的 y 值．所谓一次差即相连两个 y 的数值之差，至于二次、三次差…便是一次、二次差…的差．下表内的符号，不须解说，自能表明其意义．每个差写在它所对应的区间的右边．

x_{-2}	y_{-2}					
		Δ'_{-2}				
x_{-1}	y_{-1}		Δ''_{-1}			
		Δ'_{-1}		Δ'''_{-1}		
x_0	y_0		Δ''_0		Δ^{IV}_0	
		Δ'_1		Δ'''_1		Δ^{V}_1
x_1	y_1		Δ''_1		Δ^{IV}_1	
		Δ'_2		Δ'''_2		
x_2	y_2		Δ''_2			
		Δ'_3				
x_3	y_3					

所谓 x_0 的降阶差，是在上表中，从 y_0 开始，在向下的一个对角线上的连续各次之差；而升阶差是从 y_1 开始，在向上的一个对角线上的连续各次之差．据此容易推出下列各式：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta'_1&=y_1-y_0\\
\Delta''_1&=y_2-2y_1+y_0\\
\Delta'''_2&=y_3-3y_2+3y_1-y_0\\
\Delta^{IV}_2&=y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\text{对于 } x_0 \text{ 的降阶差数}$$

这些公式内符号交替改换，系数是巴斯卡三角版上的数字（或二项式系数）．

同样：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta'_1&=y_1-y_0\\
\Delta''_0&=y_1-2y_0+y_{-1}\\
\Delta'''_{-1}&=y_1-3y_0+3y_{-1}-y_{-2}\\
\Delta^{IV}_{-1}&=y_1-4y_0+6y_{-1}-4y_{-2}+y_{-3}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\text{对于 } x_0 \text{ 的升阶差数}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta'_1&=y_1-y_0\\
\Delta''_0&=y_1-2y_0+y_{-1}\\
\Delta''_1&=y_2-2y_1+y_0\\
\Delta'''_1&=y_2-3y_1+3y_0-y_{-1}\\
\Delta^{IV}_0&=y_2-4y_1+6y_0-4y_{-1}+y_{-2}\\
\Delta^{IV}_1&=y_3-4y_2+6y_1-4y_0+y_{-1}
\end{aligned}\right\}\text{对于 } x_0 \text{ 的中心差数}$$

设有一 p 次多项式

$$y(x)=a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

容易证明其各次差的几个性质如下:

1. p 次差是常数,其值为

$$\Delta^p=a_p p!\, h^p$$

h 是表内的区间值.

一般地说,连续各次差逐渐变小,到 $p+1$ 次差为零.

2. 设 $x_0=0$, 且设 p 为偶数,则

$$\Delta_1^{p-1}=-\Delta_{-1}^{p-1}=\frac{1}{2}\Delta^p$$

3. 设 $x_0=0$, 且设 p 为奇数,则

$$\Delta_0^{p-1}=a_{p-1}(p-1)!\, h^{p-1}$$

这些性质对于从 p 次差开始利用各次差之和去编制多项式的表,特别是编制整数的整乘幂的表,是有用的.

差数的计算引起一些实际用途. 表中的数字末一位都有 0.5 单位的近似情况. 因此差数本身是近似值,差的次数增高时,则其误差迅速增大. 下面一个例子说明一个函数只有一个的数值为 1, 其余均为零时,其各次差迅速变大的情形有如下表:

y	Δ'	Δ''	Δ'''	Δ^{IV}	Δ^{V}	Δ^{VI}
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+1	+1
0	0	0	+1	+1	−5	−6
0	+1	+1	−3	−4	+10	+15
1	−1	−2	+3	+6	−10	−20
0	0	+1	−1	−4	+5	+15
0	0	0	0	+1	−1	−6
0	0	0	0	0	0	+1
0		0		0		0

表中的数字仍然是二项式系数. 由于任何表中的数字,一般都是函数的近似值,具有强或弱(即四舍或五入)的误差,于是连续各次差迅速地变为不连贯. 表中的数字,若有一个有 0.5 的误差,则在其对应的中心差上所引入的误差(绝对值)如下:

Δ'	Δ''	Δ'''	Δ^{IV}	Δ^{V}	Δ^{VI}	Δ^{VII}	Δ^{VIII}	Δ^{IX}	Δ^{X}	Δ^{XI}	Δ^{XII}
0.5	1	1.5	3	5	10	17.5	35	63	126	231	462…

这误差,对于奇数差而言,在两个中心差上表现为反方向的误差;对于偶数差,在中心差上表现为某一方向上的误差,而且在两个邻近的差上的误差较小,而方向相反.

事实上,偏差可以达到更大的数值,特别是连续几个表载值交替地由强而弱或进与不进位的这种不利情形.

由以上的讨论得出如下的结果: 1. 使用各次差的计算里,应当确定高次差的系数变得相当小,以致其误差可以略而不计. 2. 用差数表去校核一个数字表时,应当只用前几次差,因为高次差一般含有较大的偶然误差. 例如 1000 至 1009 十个数的 5 位对数表里的

9 次差为 -62; 显然我们不能从这结果去判断这对数表的正确性. 但其二次差却在 -1, 0 与 $+1$ 的范围内, 这便足以保证表载值的正确性.

表中的数字若有一个抄写上的错误, 可从表中对应的中心差所表现的系统性的情况, 而被查出. 据以上所讲的, 使人一眼便可看出写错了的数字. 为举例计, 下表内列出 100 至 109 的 5 位对数, 其中一个是故意弄错了的.

y	Δ'	Δ''	Δ'''	Δ^{IV}	Δ^{V}	Δ^{VI}
000						
	+432					
432		−4				
	428		0			
860		−4		+1		
	424		+1		−6	
1284		−3		−5		+20
	421		−4		+14	
1705		−7		+9		−31
	414		+5		−17	
2119		−2		−8		+26
	412		−3		+9	
2531		−5		+1		−8
	407		−2		+1	
2938		−3		+2		
	404		0			
3342		−3				
	401					
3743						

对于 1705 那个数, 各次中心差, 因其数值较大, 而且符号作有规则的变化, 使人发生怀疑. 事实上, 表中的正确数字应该是 1703.

2. 拉格朗日公式

为了求出一个数字表在 x_0 与 $x_1=x_0+h$ 的区间里的内插值, 对于 x 的任何数来计算其数值的函数时, 我们将以 $f(x)$, 去代替表载函数 $y(x)$; 我们选择这函数的方式是使 f 与 y 在 x_0 附近对于 p 个表中的 x 的数值, 和 y 重合; 而且特别在其两极端值 x_0 与 x_1 上. 一般以多项式作为插值函数, 由以上的讨论, 这个选择是合理的, 因为从某次差起, 表载的差数便可认为是可以忽略的. 这一点以后还要谈到.

写出一个 p 次多项式 $f_p(x)$, 其对于 $x_0, x_1, \cdots x_p$ 的数值与 y 相合, 至于这些 x 的分布我们暂不给与任何值设. 这多项式的表达式可由下列 $p+2$ 个线性方程式之解来给出:

$$a_p x_0^p + a_{p-1} x_0^{p-1} + \cdots + a_0 = y_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_p x_p^p + a_{p-1} x_p^{p-1} + \cdots + a_0 = y_p$$

$$a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_0 - f_p(x) = 0$$

$f(x)$ 的展开式变为万德蒙德(Vandermonde)行列式的展开式:

$$f_p(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_p)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_p)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_p)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_p)}$$

$$+ \cdots + y_p \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{p-1})}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\cdots(x_p-x_{p-1})}$$

这便是拉格朗日公式, 不管 x 的数值怎样分布, 均属有效.

一般数字表的区间值之选定, 在使用多项式作内插值成为可能而且有效. 在这情形下, 拉格朗日公式给与问题以通解. 下节讨论在实际上怎样使用这个方法. 我们不讨论

非多项式作为插值函数的情形，那里连续各次差一般不趋近于零；实际上这是很少见的情形，而且从来不用它作为常用数字表的插值函数.

3．牛顿插值公式

设在 x_0x_1 的区间里，令 $x=x_0+nh$，h 为表中的区间，在一切表中皆是常数，n 是在 0 与 1 之间变化的辅助量.

写拉格朗日多项式，使其在 x_0 与 x_1 处与 y 相合；然后在 x_0，x_1，x_0 处相合，每次增加一个相合点，其中第一个总在 $x=x_0$ 点相合，则

$$f_1=n(n-1)\left[\frac{y_1}{n-1}-\frac{y_0}{n}\right]=y_0+n\Delta_1'$$

$$f_2=\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}\left[\frac{y_2}{n-2}-\frac{2y_1}{n-1}+\frac{y_0}{n}\right]$$

……………………………………

$$f_p=\frac{n(n-1)\cdots(n-p)}{p!}\left[\frac{y_p}{n-1}-p\frac{y_{p-1}}{n-p+1}+\frac{p(p-1)}{2!}\frac{y_{p-2}}{n-p+2}-\cdots+(-1)^p\frac{y_0}{n}\right]$$

f_p-f_{p-1} 之差容易表为函数 y 的降阶差的函数. 事实上，我们求得

$$f_2-f_1=\frac{n(n-1)}{2!}(y_2-2y_1+y_0)=\frac{n(n-1)}{2!}\Delta_1''$$

$$f_3-f_2=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(y_3-3y_2+3y_1-y_0)=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta_2'''$$

……………………………………………

故待寻的多项式(可以停在随意要达到的次数)可以写为

$$f(n)=y_0+n\Delta_1'+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta_1''+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta_2'''+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+2)}{(2k-1)!}\Delta_k^{2k-1}+\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{(2k)!}\Delta_k^{2k}+\cdots$$

这便是牛顿的插值公式.

若只取头两项，则函数简化为线性的，这函数之值在 $n=0$ 与 1 时与 y 相合. 若一次差是常数，二次差可以不计时，则线性内插是合理的. 这判别标准可能容许的情形是怎样的呢？若 $n=0.5$，Δ_1'' 的系数是极大，其值为 1:8 或 0.125. 因此，设 Δ_1'' 不超过末一位数的四个单位，若在 y 的插值的这一位数上容许有一个单位的误差，则 f_2-f_1 不超过半个单位，而可略去其对应之项.

以上说明 p 次多项式的 p 次差含有 h^p 为因数，若将表内的区间减小，则这一差数迅速地变小. 大多数表的区间都小到足以值线性内插为合理，虽然不在整个表里，至少也在其大部分范围之内.

不难核对：当 $n=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，Δ_2''' 的系数是极大，其值为

$$\frac{\sqrt{3}}{27}=0.06415$$

因此，当这数值小于 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$，即小于 7 (强)时，便可以略去其三次差. 这条件满足以后，

便可使用如下的公式：

$$f(n)=y_0+n\Delta_1'-\frac{n(1-n)}{2}\Delta_1'' \tag{1}$$

由此得出一个规则：从线性插值的结果里，减去二次差与 $\frac{n(1-n)}{2}$ 的乘积．书末附表 I 给出这个 n 的函数的一半之值，即 $\frac{n(1-n)}{4}$ 的表．为了决定一个上限使小于它时某给定次数的差数便认为可以忽略，我们计算它的系数的极大值；这待寻的极限是其倒数的一半．于是求得

差数的次数	n 的极大值	差数的上限
2	0.50000	4
3	0.42265	7
4	0.38197	12
5	0.35557	16
6	0.33655	21
7	0.32196	26

某次差数认为可以忽略的判别标准：三次差数应小于 7，四次差数应小于 12 … 上限缓慢地、并随差数的次数作有规则地增大．

每逢二次差数缓慢地变化时，公式(1)常为人使用．这公式保证函数与代替它的多项式在 x_0, x_1 与 x_2 三值处是重合的．我们可以从表的第一行开始使用这个公式，因为它只用到降阶差数．我们还可将公式 (1) 转换为另外一种使用升阶差数的形式，以便在表的最后区间里去作插值．

若将牛顿公式展开成为 n 的整级数的形式，结果便很类似泰劳级数：

$$f(n)=y_0+n\left(\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta_1''+\frac{1}{3}\Delta_2'''-\frac{1}{4}\Delta_2^{\mathrm{IV}}+\cdots\right)+\frac{n^2}{2!}\left(\Delta_1''-\Delta_2'''+\frac{11}{12}\Delta_2^{\mathrm{IV}}-\frac{5}{6}\Delta_3^{\mathrm{V}}+\cdots\right)$$
$$+\frac{n^3}{3!}\left(\Delta_2'''-\frac{3}{2}\Delta_2^{\mathrm{IV}}+\frac{7}{4}\Delta_3^{\mathrm{V}}-\cdots\right)+\frac{n^4}{4!}(\Delta_2^{\mathrm{IV}}-2\Delta_3^{\mathrm{V}}+\cdots)+\cdots\cdots$$

由叠合法，可得

$$f'(0)=\frac{1}{h}\left(\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta_1''+\frac{1}{3}\Delta_2'''-\frac{1}{4}\Delta_2^{\mathrm{IV}}+\cdots\right)$$
$$f''(0)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta_1''-\Delta_2'''+\frac{11}{12}\Delta_2^{\mathrm{IV}}-\frac{5}{6}\Delta_3^{\mathrm{V}}+\cdots\right)$$
$$f'''(0)=\frac{1}{h^3}\left(\Delta_2'''-\frac{3}{2}\Delta_2^{\mathrm{IV}}+\frac{7}{4}\Delta_3^{\mathrm{V}}-\cdots\right)$$
$$f^{\mathrm{IV}}(0)=\frac{1}{h^4}(\Delta_2^{\mathrm{IV}}-2\Delta_3^{\mathrm{V}}+\cdots)$$

…………………………………

这些关系式可用以计算函数的导数，但一般是不合用的，因为它们须用降阶差数．但是它们的优点是使我们认识连续各次差数的数量级：

$$\Delta^p=h^pf^p(0)+\cdots$$

编算数字表之先，首先要决定的是使与表中差数的容许值相适合的最大区间．以上的公式使我们决定最有利的 h．若须编算的表是周期函数或与指数函数有关的函数，则 h 的

选择更为重要.

为了明确起见，设想要编制一个15位数的正弦或余弦表，而且这张表是可用展至二次差为止的牛顿公式、而且在整个表里求插值的. 各阶导数的绝对值最大等于1. 若 h^3 最大等于 7×10^{-15} 或 h 至大等于 1.9×10^{-5}，则三次差数最大等于第15位数的7个单位. 因此,我们在表中所采取的区间最大等于 0°001.

4. 白塞耳与埃弗雷特公式

以上讲过，牛顿公式保证多项式与要表达的函数，对于几个表载值的重合性; 但它们的分布对于插值的区间的中点是不对称的. 白塞耳多项式给出一个比较正确的表达式,因为所用的函数之值的分布是对称的; 例如，二次差数的引入靠4个表载值，而不象牛顿公式只靠3个. 最后,所用的差数都是中心差. 由差数表得

$$\Delta'_1=y_1-y_0$$
$$\Delta''_0+\Delta''_1=y_2-y_1-y_0+y_{-1}$$
$$\Delta'''_1=y_2-3y_1+3y_0-y_{-1}$$
$$\Delta^{IV}_0+\Delta^{IV}_1=y_3-3y_2+2y_1+2y_0-3y_{-1}+y_{-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在拉格朗日的公式里依次引入包含在这些关系式里的 y 的数值，便得如下的几个多项式:

$$f_1=n(n-1)\left[\frac{y_1}{n-1}-\frac{y_0}{n}\right]=y_0+n\Delta'_1$$
$$f_2=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{3!}\left[\frac{y_2}{n-2}-\frac{3y_1}{n-1}+\frac{3y_0}{n}-\frac{y_{-1}}{n+1}\right]$$
$$f_3=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}$$
$$\times\left[\frac{y_3}{n-3}-\frac{5y_2}{n-2}+\frac{10y_1}{n-1}-\frac{10y_0}{n}+\frac{5y_{-1}}{n+1}-\frac{y_{-2}}{n+2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

f_p-f_{p-1} 之差容易表为函数 y 之差的函数:

$$f_2-f_1=\frac{n(n-1)}{2\cdot2!}\left[\Delta''_0+\Delta''_1+\frac{2n-1}{3}\Delta'''_1\right]$$
$$f_3-f_2=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot4!}\left[\Delta^{IV}_0+\Delta^{IV}_1+\frac{2n-1}{5}\Delta^{V}_1\right]$$

用递推法求得一般的公式如下:

$$f_{k+1}-f_k=\frac{(n+k+1)\cdots(n-k)}{2(2k)!}\left[\Delta^{2k}_0+\Delta^{2k}_1+\frac{2n-1}{2k+1}\Delta^{2k+1}_1\right]$$

因此白塞耳公式可以写为

$$f(n)=y_0+n\Delta'_1+\frac{n(n-1)}{4}(\Delta''_0+\Delta''_1)+\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}\Delta'''_1+\cdots$$
$$+\frac{(n+k-1)\cdots(n-k)}{2(2k)!}(\Delta^{2k}_0+\Delta^{2k}_1)+\frac{(n+k-1)\cdots(n-k)(2n-1)}{2(2k+1)!}\Delta^{2k+1}_1+\cdots$$

由此可见,当 $n=0$ 或1时，偶次项的系数为零; 当 $n=0.5$ 时为极大(绝对值). 但当 $n=0.5$ 时,奇次项的系数为零; 其实这些项经常是很小的数. 当

$$n=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$$

即为 0.2113 与 0.7887 时，三次差的系数的绝对值为极大，其值为

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{216}=\pm 0.00802$$

因此三次差的绝对值若不超过 $36\sqrt{3}$ 或 62 (强)时，将其略去，所引起的误差小于最后一位数的半个单位．这仍然是从牛顿公式所得出的极限的 9 倍．限制在二次差的白塞耳公式比牛顿公式的使用更为广泛；它可以用于二次差有显著变化的情形．按照所用的是二次差或一次差，白塞耳公式可能有下列的两个形式：

$$f(n)=y_0+n\Delta_1'-\frac{n(1-n)}{4}(\Delta_0''+\Delta_1'')=y_0+n\Delta_1'-\frac{n(1-n)}{4}(\Delta_2'-\Delta_{-1}')$$

规则：在线性插值的结果里，减去中心二次差数之和（或在中心差两侧的两个一次差之差）与 $\frac{n(1-n)}{4}$ 的乘积．附表 I 给出因数 $\frac{n(1-n)}{4}$ 的数值（等于牛顿公式里的因数之半）．

给出几个上限，小于它们时，以后的差数是认为可以忽略的：

差数的次数	n 的极大值	差数的上限
2	0.50000	4
3	0.21132; 0.78868	62
4	0.50000	21
5	0.21861; 0.78139	575
6	0.50000	102
7	0.22112; 0.77868	3913

这些极限值比牛顿公式里的极限值增长得更快，而且变化是无规则的．例如，三次差可略时，四次差不一定是可略的．

下表足以说明白塞耳公式里为首几个因数的变化情况．

n	B''	B'''	B^{IV}	B^{V}	B^{VI}
	$(\Delta_0''+\Delta_1'')$	(Δ_1''')	$(\Delta_0^{\text{IV}}+\Delta_1^{\text{IV}})$	(Δ_1^{V})	$(\Delta_0^{\text{VI}}+\Delta_1^{\text{VI}})$
0.0	0.0000	0.000	0.0000	0.00000	0.00000
0.1	−225	+6	+039	−63	−080
0.2	400	8	072	86	148
0.3	525	7	097	77	200
0.4	600	+4	112	−45	233
0.5	625	0	117	0	244
0.6	600	−4	112	+45	233
0.7	525	7	097	77	200
0.8	400	8	072	86	148
0.9	−225	6	+039	+63	−080
1.0	0.0000	0.000	0.0000	0.00000	0.00000

读者可以校核：整个5位三角对数表可以使用限制在二次差的内插法，但对于 log sin 与 log tan 两表，须将为首的 11′ 除外；若用牛顿公式，则这不利范围须推广到为首的 21′. 若用直线式插值法，便须从 1°52′ 开始，方才有效.

例 1 根据区间为一度的 10 位三角对数表，用白塞耳公式计算 cos 0°54′.

x	$\cos x$	Δ'	Δ''	Δ'''	Δ^{IV}
0	1.0000000000		−3046097		+928
		−1523048+		+464	
1	0.9998476951+		−3045633		928
		−4568681+		+1392	
2	9993908270		−3044241		+926+
		−7612922+		+2318	
3	9986295347+		−3041922		
		−10654845			
4	9975640502+				

因为 $\cos(-x)=\cos x$，所以我们可以计算中心差. 表内有+字记号的数字，应在 11 位数上以 5 代替(见 §4 里的脚注).

这里 $n=0.9$，插值计算的过程表如下：

y_0	1.0000000000
$0.9\Delta'_1$	−1370743 5
$-0.0225(\Delta''_0+\Delta''_1)$	+ 137063 9
$-0.006\Delta'''_1$	−2 8
$+0.0039(\Delta^{IV}_0+\Delta^{IV}_1)$	+7 2
	$\cos 0°54'=0.9998766324\ 8$

(确切值为 0.99987 66324 8).

例 2 用下表计算插值 cot 2°.87295；这里只计算到二次差便合适了.

		Δ'	
2°.86	20.016648		
		−69862	$\Delta'_1=-69376$
2.87	19.946986		
		−69376	$\Delta''_1+\Delta''_0=\Delta'_2-\Delta'_{-1}=+965$
2.88	19.877610		
		−68897	
2.89	19.808713		

容易校验三次差等于 −7，因而它和它以后的差数均可忽略. 由线性插值所得的结果为

$$19.926520$$

这数里应减去用以作线性插值的中心差两侧的一次差和因数 0.0520 (由附表 I 对 $n=0.295$ 而求得的)的乘积. 这改正数是第六位小数的 −50 单位. 故[1]

$$\cot 2°.87295=19.926470$$

若编有各次差的插值系数表，便可以大大地缩小常用数字表的范围. 例如，若有须用的一切差数，则对于 8 位数的正弦或余弦表，区间为 10°，亦能满足需要. 在这一点上，由

1) 参看：A. Danjon, Tables des valeurs naturelles à 6 décimales de centième en centième du degré, 118 页上有列线图，直接给出这个改正数.

自塞耳公式变化而来的埃弗雷特(Everett)公式,有其特殊的优点,因其只有偶次差(自然一次差除外). 因

$$\Delta_1^{2k+1}=\Delta_1^{2k}-\Delta_0^{2k}$$

自塞耳公式立即转化为埃弗雷特公式:

$$f(n)=y_0+n\Delta_1'+\left[\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}\Delta_1''-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta_0''\right]+\cdots$$

$$+\left[\frac{(n+k)\cdots(n-k)}{(2k+1)!}\Delta_1^{2k}-\frac{(n+k-1)\cdots(n-k-1)}{(2k+1)!}\Delta_0^{2k}\right]+\cdots$$

同一括弧内的两项不应分开. 若以 B^p 表示自塞耳公式里 p 次差的系数, 以 E_0^q 和 E_1^q 表示埃弗雷特公式里 Δ_1^q 次差的系数,则易看出

$$E_0^{2k}=B^{2k}-B^{2k+1}$$

$$E_1^{2k}=B^{2k}+B^{2k+1}$$

$$E_0^{2k}(n)=E_1^{2k}(1-n)$$

这些关系式很适合于计算埃弗雷特公式里的系数表之用, 并给与这表以一个很密集的形式. 为举例起见,给出下列两表,以供 8 位正弦函数的计算.

x	$\sin x$	Δ'	Δ''	Δ^{IV}	Δ^{VI}
0°	0.0000 0000	+1736 4818	0	0	0
10	1736 4818	1683 7196+	−52 7621+	+16032	−488
20	3420 2014+	1579 7985+	103 9211	31576	959+
30	5000 0000	1427 8761	151 9224+	46160+	1402
40	6427 8761	1232 5683+	195 3077+	59343	1802+
50	7660 4444+	999 8096	232 7587+	70723	2149+
60	8660 2540+	736 6721+	263 1374+	79953+	2431+
70	9396 9262	451 1513+	285 5208	86752+	2630
80	9848 0775+	+151 9224+	299 2289	90921	2769+
90	1.0000 0000		−303 8449	+92320	−2798

埃弗雷特公式

n	E_0''	E_0^{IV}	E_0^{VI}	
0.0	0.0000	0.000000	0.000000	1.0
0.1	−285	+004546	−0886	0.9
0.2	480	08064	1605	0.8
0.3	595	10442	2116	0.7
0.4	640	11648	2396	0.6
0.5	625	11719	2441	0.5
0.6	560	10752	2263	0.4
0.7	455	08895	1887	0.3
0.8	320	06336	1352	0.2
0.9	−165	+03292	−0705	0.1
1.0	0.0000	0.000000	0.000000	0.0
	E_1''	E_1^{IV}	E_1^{VI}	n

对于$n=0.5$，白塞耳公式里只含二次差之项；它可用以将表的区间简约一半：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=y_0+\frac{1}{2}\Delta_1'-\frac{1}{16}(\Delta_0''+\Delta_1'')+\frac{3}{256}(\Delta_0^{\mathrm{IV}}+\Delta_1^{\mathrm{IV}})-\frac{5}{2048}(\Delta_0^{\mathrm{VI}}+\Delta_1^{\mathrm{VI}})+\cdots$$

5. 求经验函数的导数

有时需要对数字表所给的函数计算导数．将常用的插值公式对于n求导数，便得出直接解决这问题的公式．但是更可靠(虽然不是更简单)的方法，是先计算对于x表载值的导数的辅助表，然后再对给定的n值，在这表内去求插值．这条件满足之后，我们再表明由于y值最后一位数字的近似情形所产生的无规则性．另外，对于$n=0$，公式成了一个密集的形式，使计算特别迅速．

若用降阶差，则由牛顿公式求导数，得出的结果如下：

$$f'(0)=\frac{1}{h}\left(\Delta_1'-\frac{\Delta_1''}{2}+\frac{\Delta_2'''}{3}-\frac{\Delta_2^{\mathrm{IV}}}{4}+\frac{\Delta_3^{\mathrm{V}}}{5}\cdots\right) \tag{1}$$

式内的系数很慢地变小，更有利的办法是从白塞耳公式出发，并用中心差；简化后求得

$$f'(0)=\frac{1}{2h}\left[(\Delta_1'+\Delta_{-1}')-\frac{1}{6}(\Delta_1'''+\Delta_{-1}''')+\frac{1}{30}(\Delta_1^{\mathrm{V}}+\Delta_{-1}^{\mathrm{V}})-\frac{1}{140}(\Delta_1^{\mathrm{VII}}+\Delta_{-1}^{\mathrm{VII}})+\cdots\right] \tag{2}$$

式内的系数为$1/2h$与

$$1,\quad -\frac{1^2}{3!},\quad +\frac{2^2}{5!},\quad -\frac{3^2}{7!},\quad \cdots$$

数的乘积．

对这些公式的使用须加以说明．主要项的数字，当h(因而Δ')愈大时，决定得愈好．若表中的区间小时，则一次差也小，那样，这表只能对一阶导数提供少数几位数字；但我们可以随意去选择h，即在2行，5行或10行中只选1行来用，以确定不给与高阶差以大于容许的极限值．举一例而言，试对$x=100$，求$\log x$的导数．若使用连续整数的5位对数表，则由公式(2)算出的数值为0.00434(这导数的确切值为$M/100=0.0043429$)．若使用区间为10的对数表，可多得一位有效数字，即求得这导数的数值为0.004343．但是若将区间增为20单位，则应计算的差数的次数将推广到第七次去；可是对于$x=100$，九次差变为无限大。由此可见，据数字表求导数，常可得出使人迷惑的结果，这个说明更可应用二阶或高阶导数的计算，自然，导数的阶数愈高时，这样计算得的结果愈不精确．

公式(2)可转变为另外一种形式．即在那里只引入y的表载值，而不用其差数．设a, b, c, d, e, f, g为函数的连续七个表载值，与$y=d$对应的一阶导数，若不计其三次差；则其值为

$$f'=\frac{e-c}{2h}$$

若不计其五次差，则其值为

$$f'=\frac{8(e-c)-(f-b)}{12h}$$

若不计其七次差，则其值为

$$f'=\frac{45(e-c)-9(f-b)+(g-a)}{60h}$$

例 天文年历里载的太阳的直角坐标，区间为12时．这区间对于导数的计算，尚嫌

过小(在拉普拉斯的轨道决定法里,须求这些导数,见 § 101). 因此将这区间加倍,试计算 1939 年 2 月 18 日 0 时的 X 的一阶导数. 改为新区间的表如下:

1939 年 2 月 15 日 0 时	+0.8131094	a
16	8230395	b
17	8327165	c
18	8421374	d
19	8512992	e
20	8601990	f
21	8688341	g

$e-c=+0.0185827$

$f-b=\quad 371595 \qquad (h=1)$

$g-a=\quad 557247$

若略去三次差,则

$$X'=+0.00929135$$

若略去五次差,则

$$X'=+0.00929184$$

若略去七次差,则

$$X'=+0.009291845$$

我们不能精密地定出最后这个结果的近似程度. 若我们取 36 时为区间的表去求这导数,便得到一个稍微不同的数值.

辅助表一经编就以后,我们可对表中所没有的一个给定值 x, 去计算插值.

6. 据变差求插值法

设 y', $y''\cdots$ 为表载函数的连续几阶导数. 泰劳公式给出这函数对于 n 的新展开式为

$$f(n)=y_0+nhy'(x_0)+n^2\frac{h^2}{2!}y''(x_0)+\cdots$$

我们将

$$v_0^p=\frac{h^p}{p!}y^p(x_0)$$

这样一个量叫做 p 阶变差. 若已知为首的 p 个变差的表载值, 则可导出一个新的插值多项式:

$$f(n)=y+v_0'n+v_0''n^2+\cdots+v_0^pn^p$$

若已知变差的文字表达式时(例如三角函数表),则可用这公式去剖分表内的区间.

这个公式也可用以对经验函数求插值,但只有在三次差可以略去时,这公式才真正有用. 天文年历里许多表, 不仅给出函数的数值, 而且有一次变差 v. 这些变差的区间是 $h:N$, 常与表值的区间不同. 在这情形,

$$v_0=\frac{h}{N}y'(x_0) \qquad v_1=\frac{h}{N}y'(x_1)$$

上节内已经证明(对于这里所容许的近似度):

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}\left(\Delta_1'-\frac{\Delta_1''}{2}\right) \qquad y'(x_1)=\frac{1}{h}\left(\Delta_2'-\frac{\Delta_2''}{2}\right)$$

因此变差 v_0 与 v_1 的一次差等于

$$D_1' = v_1 - v_0 = \frac{\Delta_1''}{N}$$

于是迄至二次差为止的牛顿公式，有如下的形式：

$$f(n) = y_0 + nN\left(v_0 + \frac{nD_1'}{2}\right)$$

因而得出这样一个规则：在 y_0 上加入对插值区间的中点（即对 $n/2$）的变差线性插值与 nN 的乘积.

例 用下表（赤经的区间为 3 时，并给出每分的变差），求月亮在世界时 1^h 的赤经.

0^h	$8^h 12^m 4^s.07$	$+2^s.4265$	$D_1' = -0^s.0113 \quad v_0 + \frac{nD_1'}{2} = +2^s.4246$
3^h	$8^h 19^m 19^s.83$	$+2^s.4152$	

这里 $n = 1/3$，$N = 180$，$nN = 60$，因此

$$\alpha = 8^h 12^m 4^s.07 + 145^s.48 = 8^h 14^m 29^s.55$$

7. 数字积分的实用公式

设 y 为 x 的函数，我们要在 x 的两个值之间求其积分，而这积分的原函数是未知的. 将积分的区间分为 p 个等区间 h；并以 x_0，x_1，$\cdots x_p$ 表示这些区间的界限值，而以 y_0，y_1，$\cdots y_p$ 表示函数的对应值.

若我们所知道的只有这些 y 的数值，则由它们组成的差数表必然是一个有限的三角形：上面的一边是从 y_0 起点的下降对角线，下面的一边是从 y_p 起点的上升对角线. 对于每个区间 h，牛顿公式的积分提供一个包含对于 $y_0 \cdots y_{p-1}$ 的一切降阶差的函数的积分之值；因此容易消去三角形差数表之外的其他差数，而推得格里高利的积分公式：

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_p} y\,dx = h\Big[&\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \cdots + y_{p-1} + \frac{1}{2}y_p\right) - \frac{1}{12}(\Delta_p' - \Delta_1') \\ &- \frac{1}{24}(\Delta_{p-1}'' + \Delta_1'') - \frac{19}{720}(\Delta_{p-1}''' - \Delta_2''') - \frac{3}{160}(\Delta_{p-2}^{IV} + \Delta_2^{IV}) \\ &- \frac{863}{60480}(\Delta_{p-2}^{V} - \Delta_3^{V}) - \frac{275}{24192}(\Delta_{p-3}^{VI} + \Delta_3^{VI})\cdots\Big] \qquad (1)\end{aligned}$$

式内系数的倒数的近似值为

$\Delta_p' - \Delta_1'$	12	$\Delta_{p-2}^{IV} + \Delta_2^{IV}$	53
$\Delta_{p-1}'' - \Delta_1''$	24	$\Delta_{p-2}^{V} - \Delta_3^{V}$	70
$\Delta_{p-1}''' - \Delta_2'''$	37	$\Delta_{p-3}^{VI} + \Delta_3^{VI}$	87

这些倒数缓缓地增大. 格里高利公式只用于我们不能将积分区域表向两端延伸之时，其可靠性仅表现在连续各次差迅速变小的一种情况中.

若二次差可以略去，则 $\Delta_p' - \Delta_1'$ 亦可略去，于是

$$\int_{x_0}^{x_p} y\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{p-1} + y_p) \qquad (2)$$

这是最简单的积分公式，可由"梯形法"求出. 我们可将它用在准线性函数上. 误差的数量级为 $(x_p - x_0)\Delta'':12$.

有几个由白塞耳公式而来的积分公式. 例如,

$$\int_0^1 f(n)dn=\int_{x_0}^{x_1} ydx=\frac{h}{2}\Big[\ y_0+y_1-\frac{1}{12}(\varDelta_0''+\varDelta_1'')+\frac{11}{720}(\varDelta_0^{\text{IV}}+\varDelta_1^{\text{IV}})-\frac{191}{60480}(\varDelta_0^{\text{VI}}+\varDelta_1^{\text{VI}})$$
$$+\frac{2497}{3628800}(\varDelta_0^{\text{VIII}}+\varDelta_1^{\text{VIII}})+\cdots\Big] \tag{3}$$

式内只出现偶次差,其系数迅速地变小,这些系数的倒数的近似值为

$\varDelta_0''+\varDelta_1''$	12	$\varDelta_0^{\text{VI}}+\varDelta_0^{\text{VI}}$	316
$\varDelta_0^{\text{IV}}+\varDelta_1^{\text{IV}}$	65	$\varDelta_0^{\text{VIII}}+\varDelta_0^{\text{VIII}}$	1453

我们可通过各种方式去用公式(3). 设四次差可以略去,则有

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx=\frac{h}{2}\Big[y_0+2y_1+y_2-\frac{1}{12}(\varDelta_0''+2\varDelta_1''+\varDelta_2'')\Big]$$
$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)-\frac{h\varDelta_1^{\text{IV}}}{24}$$

式内末尾一项是可以略去的. 若积分区域分为 $2k$ 个偶数等值区间,使用以上的公式去处理每一个区间,便得

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} y\,dx=\frac{x_{2k}-x_0}{6k}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}] \tag{4}$$

这是森普逊公式,当四次差可略去时,便可作合理的使用. 结果的误差是与 $kh\varDelta^{\text{IV}}:90$ 同数量级的.

用相同的方法可以推出所谓“八分之三”的公式, 可以应用于基本区间的个数是 3 的倍数之时:

$$\int_{x_0}^{x_{3k}} y\,dx=\frac{3}{8}\,\frac{x_{3k}-x_0}{3k}[y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+\cdots+y_{3k}] \tag{5}$$

式内下标为 3 的倍数的表载值, 系数为 2; 其他项的系数为 3, 但首尾两项除外. 和森普逊公式一样,“八分之三”公式也假定四次差可以略去, 误差是与 $3kh\varDelta^{\text{IV}}:80$ 同数量级的.

公式 3 适用于表载函数的原函数的表的计算. 设

$$Y_p=y_p-\frac{1}{12}\varDelta_p''+\frac{11}{720}\varDelta_p^{\text{IV}}-\frac{191}{60480}\varDelta_p^{\text{VI}}-\frac{2497}{3628800}\varDelta_p^{\text{VIII}}+\cdots \tag{6}$$

方程(3)还可写为

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx=\frac{h}{2}(Y_0+Y_1) \tag{7}$$

换句话说,这是将梯形法应用于函数 Y,而得的积分,则将 7 式内的数量加在一起,便形成原函数的表:

$$\int_{x_0}^{x_p} y\,dx=h\left(\frac{Y_0}{2}+Y_1+Y_2+\cdots+\frac{Y_p}{2}\right) \tag{8}$$

由于这些差数都是偶次中心差,故

$$\begin{aligned}Y=y&-0.0833333333\varDelta''\\&+0.0152777778\varDelta^{\text{IV}}\\&-0.0031580688\varDelta^{\text{VI}}\\&+0.0006881063\varDelta^{\text{VIII}}\\&-0.0001544567\varDelta^{\text{X}}\\&+0.0000353403\varDelta^{\text{XII}}\\&-\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

例 用 e^{-x^2} 函数的表，编算 $\int_0^x e^{-x^2}dx$ 的表。

x	e^{-x^2}	Δ''	Δ^{IV}	$-\frac{\Delta''}{12}$	$+\frac{11\Delta^{IV}}{720}$	$+\frac{1}{2}Y$	$\int_0^x e^{-x^2}dx$
0.0	1.00000	−1990	+118	+166	+2	0.50084	0.000000
1	0.99005	1931	112	161	2	49584	099668
2	96079	1760	96	147	1	48113+	197365
3	91393	1493	71	124	1	45759	291238
4	85214	1155	39	96	+1	42655+	379652
5	77880	778	+8	65	0	38972+	461280
6	69768	393	−21	33	0	34900+	535153
7	61263	−29	44	+2	−1	30632	600686
8	52729	+291	66	−24	1	26352	657670
9	44486	545	69	45	1	22220	706242
1.0	36788	+730	−74	−61	−1	18363	746825

虽然在这一求和的过程里，累积误差是不可避免的，可是表中最末一位数，在六位小数上才有一个单位的误差．对数字表求积分比求导数更可靠得多；甚至可以得到更多的有效数字．

还可将积分的基本区间作两两的组合，而得出一个收敛迅速的公式．这些便是对于(3)式里出现的加倍区间的中点，应用在这一情形的偶次中心差．令

$$Z_{2p+1}=\frac{1}{h}\int_{x_{2p}}^{x_{2p+2}} y\,dx=2y_{2p+1}+\frac{1}{3}\Delta''_{2p+1}-\frac{1}{90}\Delta^{IV}_{2p+1}+\frac{1}{756}\Delta^{VI}_{2p+1}-\frac{23}{113400}\Delta^{VIII}_{2p+1}+\cdots$$

原函数的一次差为 hZ_1, hZ_3, $hZ_5\cdots$，于是

$$\int_{x_0}^{x_{2k}} y\,dx=h(Z_1+Z_3+Z_5+Z_7+\cdots+Z_{2k-1})$$

这样便得偶数行的表载值的积分的数值，如果需要，可用 §5 之末所推出的插值公式去填满这些区间．由于下标为 $2p+1$ 之项是隐含在里面的，故

$$\begin{aligned}Z=2y&+0.3333333333\Delta''\\&-0.0111111111\Delta^{IV}\\&+0.0013227513\Delta^{VI}\\&-0.0002028219\Delta^{VIII}\\&+0.0000351398\Delta^{X}\\&-0.0000065478\Delta^{XII}\\&+\cdots\cdots\end{aligned}$$

Y 和 Z 两公式可用以计算唯一的定积分和编制数字表；其收敛性一般比格里高利公式迅速，因此这两个公式使用于高次差要方便得多．

例 由 10 位数的正弦表示的积分，去计算 $\cos 20°$, $\cos 40°$ 与 $\cos 60°$．这里

$$h=10°=0.1745329251994\cdots$$

x	$\sin x$	$\frac{1}{3}\Delta''$	$-\frac{1}{90}\Delta^{IV}$	$\frac{1}{756}\Delta^{VI}$	$-\frac{23}{113400}\Delta^{VIII}$
0°	0.00000 00000				
10	17364 81777	−175873737	−178128	−644	−03
20	34202 01433				
30	50000 00000	−506408233	−512899	−1855	−08
40	64278 76097				
50	76604 44431	−775862423	−785806	−2842	−13
60	86602 54038				

由此求得 $hZ_1=0.06030737922$ $1-\cos 20°=0.03030737922$

$hZ_3=0.17364817767$ $1-\cos 40°=0.23395555689$

$hZ_5=0.26604444312$ $1-\cos 60°=0.50000000001$

这些结果正确到第11位小数上的一个单位。

I. 用白塞耳公式求插值

$\frac{n(1-n)}{4}$ 系数表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
0,000	0,0000	0,0002	0,0005	0,0007	0,0010	0,0012	0,0015	0,0017	0,0020	0,0022	0,0025	0,990
010	025	027	030	032	035	037	039	042	044	047	049	980
020	049	051	054	056	059	061	063	066	068	070	073	970
030	073	075	077	080	082	084	087	089	091	094	096	960
040	096	098	101	103	105	107	110	112	114	116	119	950
050	119	121	123	125	128	130	132	134	137	139	141	940
060	141	143	145	148	150	152	154	156	158	161	163	930
070	163	165	167	169	171	173	176	178	180	182	184	920
080	184	186	188	190	192	194	197	199	201	203	205	910
090	205	207	209	211	213	215	217	219	221	223	225	0,900
0,100	225	227	229	231	233	235	237	239	241	243	245	890
110	245	247	249	251	253	254	256	258	260	262	264	880
120	264	266	268	270	272	273	275	277	279	281	283	870
130	283	285	286	288	290	292	294	296	297	299	301	860
140	301	303	305	306	308	310	312	313	315	317	319	850
150	319	320	322	324	326	327	329	331	333	334	336	840
160	336	338	339	341	343	344	346	348	349	351	353	830
170	353	354	356	358	359	361	363	364	366	367	369	820
180	369	371	372	374	375	377	379	380	382	383	385	810
190	385	386	388	389	391	392	394	395	397	398	400	0,800
0,200	400	401	403	404	406	407	409	410	412	413	415	790
210	415	416	418	419	421	422	423	425	426	428	429	780
220	429	430	432	433	435	436	437	439	440	441	443	770
230	443	444	445	447	448	449	451	452	453	455	456	760
240	456	457	459	460	461	462	464	465	466	467	469	750
250	469	470	471	472	474	475	476	477	479	480	481	740
260	481	482	483	485	486	487	488	487	490	492	493	730
270	493	494	495	496	497	498	500	501	502	503	504	720
280	504	505	506	507	508	509	511	612	513	514	515	710
290	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	0,700
0,300	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	690
310	535	536	537	538	539	539	540	541	542	543	544	680
320	544	545	546	547	548	548	549	550	551	552	553	670
330	553	554	554	555	556	557	558	559	559	560	561	660
340	561	562	563	563	564	565	566	566	567	568	569	650
350	569	569	570	571	572	572	573	574	575	575	576	640
360	576	577	577	578	579	579	580	581	581	582	583	630
370	583	583	584	585	585	586	587	587	588	588	589	620
380	589	590	590	591	591	592	593	593	594	594	595	610
390	595	595	596	596	597	597	598	598	599	599	600	0,600
0,400	600	600	601	601	602	602	603	603	604	604	605	590
410	605	605	606	606	607	607	607	608	608	609	609	580
420	609	609	610	610	611	611	611	612	612	612	613	570
430	613	613	613	614	614	614	615	615	615	616	616	560
440	616	618	617	617	617	617	618	618	618	618	619	550
450	619	619	619	619	620	620	620	620	621	621	621	540
460	621	621	621	622	622	622	622	623	623	623	623	530
470	623	623	623	623	623	623	624	624	624	624	624	520
480	624	624	624	624	624	624	625	625	625	625	625	510
0,490	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,500
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	n

$$y(x_0+nh)=y(x_0)+n\Delta'_1-\frac{n(1-n)}{4}(\Delta''_0+\Delta''_1)=y(x_0)+n\Delta'_1-\frac{n(1-n)}{4}(\Delta'_2-\Delta'_{-1})$$

II. 化度与分为秒

	0°	1°	2°	3°	4°	5°		
0'	0"	3600"	7200"	10800"	14400"	18000"	0°	0"
1	60	3660	7260	10860	14460	18060	6	21 600
2	120	3720	7320	10920	14520	18120	12	43 200
3	180	3780	7380	10980	14580	18180	18	64 800
4	240	3840	7440	11040	14640	18240	24	86 400
5	300	3900	7500	11100	14700	18300	30	108 000
6	360	3960	7560	11160	14760	18360	36	129 600
7	420	4020	7620	11220	14820	18420	42	151 200
8	480	4080	7680	11280	14880	18480	48	172 800
9	540	4140	7740	11340	14940	18540	54	194 400
10	600	4200	7800	11400	15000	18600	60	216 000
11	660	4260	7860	11460	15060	18660	66	237 600
12	720	4320	7920	11520	15120	18720	72	259 200
13	780	4380	7980	11580	15180	18780	78	280 800
14	840	4440	8040	11640	15240	18840	84	302 400
15	900	4500	8100	11700	15300	18900	90	324 000
16	960	4560	8160	11760	15360	18960	96	345 600
17	1020	4620	8220	11820	15420	19020	102	367 200
18	1080	4680	8280	11880	15480	19080	108	388 800
19	1140	4740	8340	11940	15540	19140	114	410 400
20	1200	4800	8400	12000	15600	19200	120	432 000
21	1260	4860	8460	12060	15660	19260	126	453 600
22	1320	4920	8520	12120	15720	19320	132	475 200
23	1380	4980	8580	12180	15780	19380	138	496 800
24	1440	5040	8640	12240	15840	19440	144	518 400
25	1500	5100	8700	12300	15900	19500	150	540 000
26	1560	5160	8760	12360	15960	19560	156	561 600
27	1620	5220	8820	12420	16020	19620	162	583 200
28	1680	5280	8880	12480	16080	19680	168	604 800
29	1740	5340	8940	12540	16140	19740	174	626 400
30	1800	5400	9000	12600	16200	19800	180	648 000
31	1860	5460	9060	12660	16260	19860	186	669 600
32	1920	5520	9120	12720	16320	19920	192	691 200
33	1980	5580	9180	12780	16380	19980	198	712 800
34	2040	5640	9240	12840	16440	20040	204	734 400
35	2100	5700	9300	12900	16500	20100	210	756 000
36	2160	5760	9360	12960	16560	20160	216	777 600
37	2220	5820	9420	13020	16620	20220	222	799 200
38	2280	5880	9480	13080	16680	20280	228	820 800
39	2340	5940	9540	13140	16740	20340	234	842 400
40	2400	6000	9600	13200	16800	20400	240	864 000
41	2460	6060	9660	13260	16860	20460	246	885 600
42	2520	6120	9720	13320	16920	20520	252	907 200
43	2580	6180	9780	13380	16980	20580	258	928 800
44	2640	6240	9840	13440	17040	20640	264	950 400
45	2700	6300	9900	13500	17100	20700	270	972 000
46	2760	6360	9960	13560	17160	20760	276	993 600
47	2820	6420	10020	13620	17220	20820	282	1 015 200
48	2880	6480	10080	13680	17280	20880	288	1 036 800
49	2940	6540	10140	13740	17340	20940	294	1 058 400
50	3000	6600	10200	13800	17400	21000	300	1 080 000
51	3060	6660	10260	13860	17460	21060	306	1 101 600
52	3120	6720	10320	13920	17520	21120	312	1 123 200
53	3180	6780	10380	13980	17580	21180	318	1 144 800
54	3240	6840	10440	14040	17640	21240	324	1 166 400
55	3300	6900	10500	14100	17700	21300	330	1 188 000
56	3360	6960	10560	14160	17760	21360	336	1 209 600
57	3420	7020	10620	14220	17820	21420	342	1 231 200
58	3480	7080	10680	14280	17880	21480	348	1 252 800
59	3540	7140	10740	14340	17940	21540	354	1 274 400
60	3600	7200	10800	14400	18000	21600	360	1 296 000

III. $\Delta_s = x - \sin x$ 函数表

x	x-sin x		x	x-sin x		x	x - sin x		x	x - sin x	
0"	0",000	0	5000"	0",490	30	10000"	3",917	119	15000"	13",218	266
100	000	0	5100	520	31	10100	4,036	121	15100	13,484	269
200	000	0	5200	551	32	10200	4,157	123	15200	13,753	274
300	000	0	5300	583	34	10300	4,280	126	15300	14,027	276
400	000	0	5400	617	35	10400	4,406	128	15400	14,303	281
500	0",000	1	5500	0,652	36	10500	4,534	131	15500	14,584	284
600	001	0	5600	688	37	10600	4,665	133	15600	14,868	288
700	001	1	5700	725	39	10700	4,798	136	15700	15,156	291
800	002	1	5800	764	41	10800	4,934	138	15800	15,447	295
900	003	1	5900	805	41	10900	5,072	141	15900	15,742	299
1000	0",004	1	6000	0,846	43	11000	5,213	144	16000	16,041	302
1100	005	2	6100	889	45	11100	5,357	146	16100	16,343	307
1200	007	2	6200	934	45	11200	5,503	149	16200	16,650	310
1300	009	2	6300	0,979	48	11300	5,652	151	16300	16,960	314
1400	011	2	6400	1,027	49	11400	5,803	154	16400	17,274	318
1500	0,013	3	6500	1,076	50	11500	5,957	157	16500	17,592	322
1600	016	3	6600	126	52	11600	6,114	159	16600	17,914	325
1700	019	4	6700	178	54	11700	6,273	162	16700	18,239	330
1800	023	4	6800	232	55	11800	6,435	165	16800	18,569	333
1900	027	4	6900	287	57	11900	6,600	168	16900	18,902	338
2000	0,031	5	7000	1,344	58	12000	6,768	171	17000	19,240	341
2100	036	6	7100	402	60	12100	6,939	173	17100	19,581	346
2200	042	6	7200	462	62	12200	7,112	176	17200	19,927	349
2300	048	6	7300	524	63	12300	7,288	180	17300	20,276	354
2400	054	7	7400	587	66	12400	7,468	182	17400	20,630	357
2500	0,061	8	7500	1,653	67	12500	7,650	185	17500	20,987	362
2600	069	8	7600	720	68	12600	7,835	188	17600	21,349	366
2700	077	9	7700	788	71	12700	8,023	191	17700	21,715	370
2800	086	10	7800	859	72	12800	8,214	194	17800	22,085	374
2900	096	10	7900	1,931	75	12900	8,408	197	17900	22,459	379
3000	0,106	11	8000	2,008	76	13000	8,605	200	18000	22,838	382
3100	117	11	8100	082	78	13100	8,805	203	18100	23,220	387
3200	128	13	8200	160	80	13200	9,008	206	18200	23,607	391
3300	141	13	8300	240	82	13300	9,214	210	18300	23,998	396
3400	154	14	8400	322	84	13400	9,424	212	18400	24,394	400
3500	0,168	15	8500	2,406	85	13500	9,636	216	18500	24,794	404
3600	183	15	8600	491	88	13600	9,852	219	18600	25,198	408
3700	198	17	8700	579	90	13700	10,071	222	18700	25,606	413
3800	215	17	8800	669	92	13800	10,293	225	18800	26,019	417
3900	232	19	8900	761	95	13900	10,518	229	18900	26,436	422
4000	0,251	19	9000	2,856	96	14000	10,747	232	19000	26,858	426
4100	270	20	9100	2,952	98	14100	10,979	235	19100	27,284	431
4200	290	21	9200	3,050	101	14200	11,214	239	19200	27,715	435
4300	311	23	9300	151	102	14300	11,453	241	19300	28,150	440
4400	334	23	9400	253	105	14400	11,694	246	19400	28,590	444
4500	0,357	24	9500	3,358	107	14500	11,940	248	19500	29,034	449
4600	381	26	9600	465	110	14600	12,188	253	19600	29,483	453
4700	407	26	9700	575	112	14700	12,441	255	19700	29,936	458
4800	433	28	9800	687	114	14800	12,696	259	19800	30,394	463
4900	461	29	9900	801	116	14900	12,955	263	19900	30,857	468
5000	0,490		10000	3,917		15000	13,218		20000	31,325	

1" = 0,00000 48481 36811

IV. $\Delta_t = \tan x - x$ 函数表

x	tan x-x		x	tan x-x		x	tan x-x		x	tan x-x	
0"	0",000	0	5000"	0",980	60	10000"	7",842	238	15000"	26",499	534
100	000	0	5100	1,040	62	10100	8,080	243	15100	27,033	541
200	000	0	5200	1,102	65	10200	8,323	247	15200	27,574	549
300	000	1	5300	1,167	67	10300	8,570	252	15300	28,123	556
400	001	0	5400	1,234	70	10400	8,822	257	15400	28,679	563
500	001	1	5500	1,304	72	10500	9,079	262	15500	29,242	570
600	002	1	5600	1,376	75	10600	9,341	267	15600	29,812	578
700	003	1	5700	1,451	78	10700	9,608	272	15700	30,390	586
800	004	2	5800	1,529	81	10800	9,880	278	15800	30,976	592
900	006	2	5900	1,610	83	10900	10,158	282	15900	31,568	601
1000	008	2	6000	1,693	86	11000	10,440	288	16000	32,169	608
1100	010	4	6100	1,779	89	11100	10,728	292	16100	32,777	615
1200	014	3	6200	1,868	92	11200	11,020	298	16200	33,392	624
1300	017	4	6300	1,960	95	11300	11,318	304	16300	34,016	631
1400	021	5	6400	2,055	97	11400	11,622	309	16400	34,647	638
1500	026	6	6500	2,152	101	11500	11,931	314	16500	35,285	647
1600	032	6	6600	2,253	104	11600	12,245	320	16600	35,932	654
1700	038	8	6700	2,357	108	11700	12,565	325	16700	36,586	663
1800	046	8	6800	2,465	110	11800	12,890	331	16800	37,249	670
1900	054	9	6900	2,575	114	11900	13,221	336	16900	37,919	678
2000	063	10	7000	2,689	116	12000	13,557	342	17000	38,597	687
2100	073	10	7100	2,805	121	12100	13,899	348	17100	39,284	694
2200	083	12	7200	2,926	123	12200	14,247	353	17200	39,978	703
2300	095	13	7300	3,049	127	12300	14,600	360	17300	40,681	711
2400	108	14	7400	3,176	131	12400	14,960	365	17400	41,392	719
2500	122	16	7500	3,307	134	12500	15,325	371	17500	42,111	727
2600	138	16	7600	3,441	138	12600	15,696	377	17600	42,838	736
2700	154	18	7700	3,579	141	12700	16,073	383	17700	43,574	744
2800	172	19	7800	3,720	145	12800	16,456	389	17800	44,318	753
2900	191	21	7900	3,865	149	12900	16,845	395	17900	45,071	761
3000	212	21	8000	4,014	152	13000	17,240	402	18000	45,832	770
3100	233	24	8100	4,166	157	13100	17,642	407	18100	46,602	778
3200	257	25	8200	4,323	160	13200	18,049	414	18200	47,380	787
3300	282	26	8300	4,483	164	13300	18,463	420	18300	48,167	796
3400	308	28	8400	4,647	168	13400	18,883	427	18400	48,963	804
3500	336	30	8500	4,815	172	13500	19,310	432	18500	49,767	813
3600	366	31	8600	4,987	176	13600	19,742	440	18600	50,580	822
3700	397	33	8700	5,163	180	13700	20,182	445	18700	51,402	831
3800	430	35	8800	5,343	184	13800	20,627	453	18800	52,233	840
3900	465	37	8900	5,527	189	13900	21,080	458	18900	53,073	849
4000	502	38	9000	5,716	193	14000	21,538	466	19000	53,922	858
4100	540	41	9100	5,909	197	14100	22,004	472	19100	54,780	867
4200	581	42	9200	6,106	201	14200	22,476	479	19200	55,647	876
4300	623	45	9300	6,307	206	14300	22,955	485	19300	56,523	885
4400	668	46	9400	6,513	210	14400	23,440	493	19400	57,408	895
4500	714	49	9500	6,723	215	14500	23,933	499	19500	58,303	903
4600	763	51	9600	6,938	219	14600	24,432	506	19600	59,206	913
4700	814	53	9700	7,157	224	14700	24,938	513	19700	60,119	923
4800	867	55	9800	7,381	228	14800	25,451	520	19800	61,042	932
4900	922	58	9900	7,609	233	14900	25,971	528	19900	61,974	941
5000	0,980		10000	7,842		15000	26,499		20000	62,915	

1" = 0,00000 48481 36811

V. 化度为径

度						分				秒			
0°	0,000 0000	30°	0,523 5988	60°	1,047 1976	0'	0,000 0000	30'	0,008 7266	0"	0,000 0000	30"	0,000 1454
1	017 4533	31	541 0521	61	064 6508	1	000 2909	31	009 0175	1	0048	31	1503
2	034 9066	32	558 5054	62	082 1041	2	000 5818	32	009 3084	2	0097	32	1551
3	052 3599	33	575 9587	63	099 5574	3	000 8727	33	009 5993	3	0145	33	1600
4	069 8132	34	593 4119	64	117 0107	4	001 1636	34	009 8902	4	0194	34	1648
5	087 2665	35	610 8652	65	134 4640	5	001 4544	35	010 1811	5	0242	35	1697
6	104 7198	36	628 3185	66	151 9173	6	001 7453	36	010 4720	6	0291	36	1745
7	122 1730	37	645 7718	67	169 3706	7	002 0362	37	010 7629	7	0339	37	1794
8	139 6263	38	663 2251	68	186 8239	8	002 3271	38	011 0538	8	0388	38	1842
9	157 0796	39	680 6784	69	204 2772	9	002 6180	39	011 3446	9	0436	39	1891
10	174 5329	40	698 1317	70	221 7305	10	002 9089	40	011 6355	10	0485	40	1939
11	191 9862	41	715 5850	71	239 1838	11	003 1998	41	011 9264	11	0533	41	1988
12	209 4395	42	733 0383	72	256 6371	12	003 4907	42	012 2173	12	0582	42	2036
13	226 8928	43	750 4916	73	274 0904	13	003 7815	43	012 5082	13	0630	43	2085
14	244 3461	44	767 9449	74	291 5436	14	004 0724	44	012 7991	14	0679	44	2133
15	261 7994	45	785 3982	75	308 9969	15	004 3633	45	013 0900	15	0727	45	2182
16	279 2527	46	802 8515	76	326 4502	16	004 6542	46	013 3809	16	0776	46	2230
17	296 7060	47	820 3047	77	343 9035	17	004 9451	47	013 6717	17	0824	47	2279
18	314 1593	48	837 7580	78	361 3568	18	005 2360	48	013 9626	18	0873	48	2327
19	331 6126	49	855 2113	79	378 8101	19	005 5269	49	014 2535	19	0921	49	2376
20	349 0659	50	872 6646	80	396 2634	20	005 8178	50	014 5444	20	0970	50	2424
21	366 5191	51	890 1179	81	413 7167	21	006 1087	51	014 8353	21	1018	51	2473
22	383 9724	52	907 5712	82	431 1700	22	006 3995	52	015 1262	22	1067	52	2521
23	401 4257	53	925 0245	83	448 6233	23	006 6904	53	015 4171	23	1115	53	2570
24	418 8790	54	942 4778	84	466 0766	24	006 9813	54	015 7080	24	1164	54	2618
25	436 3323	55	959 9311	85	483 5299	25	007 2722	55	015 9989	25	1212	55	2666
26	453 7856	56	977 3844	86	500 9832	26	007 5631	56	016 2897	26	1261	56	2715
27	471 2389	57	0,994 8377	87	518 4364	27	007 8540	57	016 5806	27	1309	57	2763
28	488 6922	58	1,012 2910	88	535 8897	28	008 1449	58	016 8715	28	1357	58	2812
29	506 1455	59	029 7443	89	553 3430	29	008 4358	59	017 1624	29	1406	59	2860
30	0,523 5988	60	1,047 1976	90	1,570 7963	30	0,008 7266	60	0,017 4533	30	0,000 1454	60	0,000 2909

VI. 化度、分、秒为时、分、秒

度				分		秒		秒的小数	
0°	$0^{h}\ 0^{m}$	60°	$4^{h}\ 0^{m}$	$0'$	$0^{m}\ 0^{s}$	$0''$	$0^{s},000$	$0'',0$	$0^{s},000$
1	0 4	61	4 4	1	0 4	1	0,067	0,1	0,007
2	0 8	62	4 8	2	0 8	2	0,133	0,2	013
3	0 12	63	4 12	3	0 12	3	0,200	0,3	020
4	0 16	64	4 16	4	0 16	4	0,267	0,4	027
5	0 20	65	4 20	5	0 20	5	0,333	0,5	033
6	0 24	66	4 24	6	0 24	6	0,400	0,6	040
7	0 28	67	4 28	7	0 28	7	0,467	0,7	047
8	0 32	68	4 32	8	0 32	8	0,533	0,8	053
9	0 36	69	4 36	9	0 36	9	0,600	0,9	060
10	0 40	70	4 40	10	0 40	10	0,667	1,0	0,067
11	0 44	71	4 44	11	0 44	11	0,733		
12	0 48	72	4 48	12	0 48	12	0,800		
13	0 52	73	4 52	13	0 52	13	0,867		
14	0 56	74	4 56	14	0 56	14	0,933		
15	1 0	75	5 0	15	1 0	15	1,000		
16	1 4	76	5 4	16	1 4	16	1,067		
17	1 8	77	5 8	17	1 8	17	1,133		
18	1 12	78	5 12	18	1 12	18	1,200		
19	1 16	79	5 16	19	1 16	19	1,267		
20	1 20	80	5 20	20	1 20	20	1,333		
21	1 24	81	5 24	21	1 24	21	1,400		
22	1 28	82	5 28	22	1 28	22	1,467		
23	1 32	83	5 32	23	1 32	23	1,533		
24	1 36	84	5 36	24	1 36	24	1,600		
25	1 40	85	5 40	25	1 40	25	1,667		
26	1 44	86	5 44	26	1 44	26	1,733		
27	1 48	87	5 48	27	1 48	27	1,800		
28	1 52	88	5 52	28	1 52	28	1,867		
29	1 56	89	5 56	29	1 56	29	1,933		
30	2 0	90	6 0	30	2 0	30	2,000		
31	2 4	91	6 4	31	2 4	31	2,067		
32	2 8	92	6 8	32	2 8	32	2,133		
33	2 12	93	6 12	33	2 12	33	2,200		
34	2 16	94	6 16	34	2 16	34	2,267		
35	2 20	95	6 20	35	2 20	35	2,333		
36	2 24	96	6 24	36	2 24	36	2,400		
37	2 28	97	6 28	37	2 28	37	2,467		
38	2 32	98	6 32	38	2 32	38	2,533		
39	2 36	99	6 36	39	2 36	39	2,600		
40	2 40	100	6 40	40	2 40	40	2,667		
41	2 44	200	13 20	41	2 44	41	2,733		
42	2 48	300	20 0	42	2 48	42	2,800		
43	2 52			43	2 52	43	2,867		
44	2 56			44	2 56	44	2,933		
45	3 0			45	3 0	45	3,000		
46	3 4			46	3 4	46	3,067		
47	3 8			47	3 8	47	3,133		
48	3 12			48	3 12	48	3,200		
49	3 16			49	3 16	49	3,267		
50	3 20			50	3 20	50	3,333		
51	3 24			51	3 24	51	3,400		
52	3 28			52	3 28	52	3,467		
53	3 32			53	3 32	53	3,533		
54	3 36			54	3 36	54	3,600		
55	3 40			55	3 40	55	3,667		
56	3 44			56	3 44	56	3,733		
57	3 48			57	3 48	57	3,800		
58	3 52			58	3 52	58	3,867		
59	3 56			59	3 56	59	3,933		
60	4 0			60	4 0	60	4,000		

VII. 化时、分、秒为度、分、秒

时		分		秒		秒的百分数			
0^h	0°	0^m	0° 0'	0^s	0' 0"	0^s,00	0",00	0^s,50	7",50
1	15	1	0 15	1	0 15	0,01	0,15	0,51	7,65
2	30	2	0 30	2	0 30	0,02	0,30	0,52	7,80
3	45	3	0 45	3	0 45	0,03	0,45	0,53	7,95
4	60	4	1 0	4	1 0	0,04	0,60	0,54	8,10
5	75	5	1 15	5	1 15	0,05	0,75	0,55	8,25
6	90	6	1 30	6	1 30	0,06	0,90	0,56	8,40
7	105	7	1 45	7	1 45	0,07	1,05	0,57	8,55
8	120	8	2 0	8	2 0	0,08	1,20	0,58	8,70
9	135	9	2 15	9	2 15	0,09	1,35	0,59	8,85
10	150	10	2 30	10	2 30	0,10	1,50	0,60	9,00
11	165	11	2 45	11	2 45	0,11	1,65	0,61	9,15
12	180	12	3 0	12	3 0	0,12	1,80	0,62	9,30
13	195	13	3 15	13	3 15	0,13	1,95	0,63	9,45
14	210	14	3 30	14	3 30	0,14	2,10	0,64	9,60
15	225	15	3 45	15	3 45	0,15	2,25	0,65	9,75
16	240	16	4 0	16	4 0	0,16	2,40	0,66	9,90
17	255	17	4 15	17	4 15	0,17	2,55	0,67	10,05
18	270	18	4 30	18	4 30	0,18	2,70	0,68	10,20
19	285	19	4 45	19	4 45	0,19	2,85	0,69	10,35
20	300	20	5 0	20	5 0	0,20	3,00	0,70	10,50
21	315	21	5 15	21	5 15	0,21	3,15	0,71	10,65
22	330	22	5 30	22	5 30	0,22	3,30	0,72	10,80
23	345	23	5 45	23	5 45	0,23	3,45	0,73	10,95
24	360	24	6 0	24	6 0	0,24	3,60	0,74	11,10
		25	6 15	25	6 15	0,25	3,75	0,75	11,25
		26	6 30	26	6 30	0,26	3,90	0,76	11,40
		27	6 45	27	6 45	0,27	4,05	0,77	11,55
		28	7 0	28	7 0	0,28	4,20	0,78	11,70
		29	7 15	29	7 15	0,29	4,35	0,79	11,85
		30	7 30	30	7 30	0,30	4,50	0,80	12,00
		31	7 45	31	7 45	0,31	4,65	0,81	12,15
		32	8 0	32	8 0	0,32	4,80	0,82	12,30
		33	8 15	33	8 15	0,33	4,95	0,83	12,45
		34	8 30	34	8 30	0,34	5,10	0,84	12,60
		35	8 45	35	8 45	0,35	5,25	0,85	12,75
		36	9 0	36	9 0	0,36	5,40	0,86	12,90
		37	9 15	37	9 15	0,37	5,55	0,87	13,05
		38	9 30	38	9 30	0,38	5,70	0,88	13,20
		39	9 45	39	9 45	0,39	5,85	0,89	13,35
		40	10 0	40	10 0	0,40	6,00	0,90	13,50
		41	10 15	41	10 15	0,41	6,15	0,91	13,65
		42	10 30	42	10 30	0,42	6,30	0,92	13,80
		43	10 45	43	10 45	0,43	6,45	0,93	13,95
		44	11 0	44	11 0	0,44	6,60	0,94	14,10
		45	11 15	45	11 15	0,45	6,75	0,95	14,25
		46	11 30	46	11 30	0,46	6,90	0,96	14,40
		47	11 45	47	11 45	0,47	7,05	0,97	14,55
		48	12 0	48	12 0	0,48	7,20	0,98	14,70
		49	12 15	49	12 15	0,49	7,35	0,99	14,85
		50	12 30	50	12 30	0,50	7,50	1,00	15,00
		51	12 45	51	12 45				
		52	13 0	52	13 0				
		53	13 15	53	13 15				
		54	13 30	54	13 30				
		55	13 45	55	13 45				
		56	14 0	56	14 0				
		57	14 15	57	14 15				
		58	14 30	58	14 30				
		59	14 45	59	14 45				
		60	15 0	60	15 0				

VIII. 化时、分、秒为日的小数

时	日的小数	分	日的小数	秒	日的小数
1	0.041667	1	0.000694	1	0.000012
2	0.083333	2	0.001389	2	0.000023
3	0.125000	3	0.002083	3	0.000035
4	0.166667	4	0.002778	4	0.000046
5	0.208333	5	0.003472	5	0.000058
6	0.250000	6	0.004167	6	0.000069
7	0.291667	7	0.004861	7	0.000081
8	0.333333	8	0.005556	8	0.000093
9	0.375000	9	0.006250	9	0.000104
10	0.416667	10	0.006944	10	0.000116
11	0.458333	11	0.007639	11	0.000127
12	0.500000	12	0.008333	12	0.000139
13	0.541667	13	0.009028	13	0.000150
14	0.583333	14	0.009722	14	0.000162
15	0.625000	15	0.010417	15	0.000174
16	0.666667	16	0.011111	16	0.000185
17	0.708333	17	0.011806	17	0.000197
18	0.750000	18	0.012500	18	0.000208
19	0.791667	19	0.013194	19	0.000220
20	0.833333	20	0.013889	20	0.000231
21	0.875000	21	0.014583	21	0.000243
22	0.916667	22	0.015278	22	0.000255
23	0.958333	23	0.015972	23	0.000266
		24	0.016667	24	0.000278
		25	0.017361	25	0.000289
		26	0.018056	26	0.000301
		27	0.018750	27	0.000312
		28	0.019444	28	0.000324
		29	0.020139	29	0.000336
		30	0.020833	30	0.000347
		31	0.021528	31	0.000359
		32	0.022222	32	0.000370
		33	0.022917	33	0.000382
		34	0.023611	34	0.000394
		35	0.024306	35	0.000405
		36	0.025000	36	0.000417
		37	0.025694	37	0.000428
		38	0.026389	38	0.000440
		39	0.027083	39	0.000451
		40	0.027778	40	0.000463
		41	0.028472	41	0.000475
		42	0.029167	42	0.000486
		43	0.029861	43	0.000498
		44	0.030556	44	0.000509
		45	0.031250	45	0.000521
		46	0.031944	46	0.000532
		47	0.032639	47	0.000544
		48	0.033333	48	0.000556
		49	0.034028	49	0.000567
		50	0.034722	50	0.000579
		51	0.035417	51	0.000590
		52	0.036111	52	0.000602
		53	0.036806	53	0.000613
		54	0.037500	54	0.000625
		55	0.038194	55	0.000637
		56	0.038889	56	0.000648
		57	0.039583	57	0.000660
		58	0.040278	58	0.000671
		59	0.040972	59	0.000683
		60	0.041667	60	0.000694

IX. 化日与时为回归年的小数

为了求民用年开始以来经过的日数，加上附表内相当于每月初的日数。

日	年	日	年	日	年	日	年	日	年	日	年	日	年	日	年
0	0,0000	50	0,1369	100	0,2738	150	0,4107	200	0,5476	250	0,6845	300	0,8214	350	0,9583
1	0027	51	1396	101	2765	151	4134	201	5503	251	6872	301	8241	351	9610
2	0055	52	1424	102	2793	152	4162	202	5531	252	6900	302	8268	352	9637
3	0082	53	1451	103	2820	153	4189	203	5558	253	6927	303	8296	353	9665
4	0110	54	1478	104	2847	154	4216	204	5585	254	6954	304	8323	354	9692
5	0137	55	1506	105	2875	155	4244	205	5613	255	6982	305	8351	355	9720
6	0164	56	1533	106	2902	156	4271	206	5640	256	7009	306	8378	356	9747
7	0192	57	1561	107	2930	157	4299	207	5667	257	7036	307	8405	357	9774
8	0219	58	1588	108	2957	158	4326	208	5695	258	7064	308	8433	358	9802
9	0246	59	1615	109	2984	159	4353	209	5722	259	7091	309	8460	359	9829
10	0,0274	60	0,1643	110	0,3012	160	4381	210	0,5750	260	0,7119	310	0,8488	360	0,9856
11	0301	61	1670	111	3039	161	4408	211	5777	261	7146	311	8515	361	9884
12	0329	62	1698	112	3066	162	4435	212	5804	262	7173	312	8542	362	9911
13	0356	63	1725	113	3094	163	4463	213	5832	263	7201	313	8570	363	9939
14	0383	64	1752	114	3121	164	4490	214	5859	264	7228	314	8597	364	9966
15	0411	65	1780	115	3149	165	4518	215	5887	265	7255	315	8624	365	9993
16	0438	66	1807	116	3176	166	4545	216	5914	266	7283	316	8652		
17	0465	67	1834	117	3203	167	4572	217	5941	267	7310	317	8679		
18	0493	68	1862	118	3231	168	4600	218	5969	268	7338	318	8707		
19	0520	69	1889	119	3258	169	4627	219	5996	269	7365	319	8734		
20	0,0548	70	0,1917	120	0,3285	170	0,4654	220	0,6023	270	0,7392	320	0,8761		
21	0575	71	1944	121	3313	171	4682	221	6051	271	7420	321	8789		
22	0602	72	1971	122	3340	172	4709	222	6078	272	7447	322	8816		
23	0630	73	1999	123	3368	173	4737	223	6106	273	7474	323	8843		
24	0657	74	2026	124	3395	174	4764	224	6133	274	7502	324	8871		
25	0684	75	2053	125	3422	175	4791	225	6160	275	7529	325	8898		
26	0712	76	2081	126	3450	176	4819	226	6188	276	7557	326	8926		
27	0739	77	2108	127	3477	177	4846	227	6215	277	7584	327	8953		
28	0767	78	2136	128	3505	178	4874	228	6242	278	7611	328	8980		
29	0794	79	2163	129	3532	179	4901	229	6270	279	7639	329	9008		
30	0,0821	80	0,2190	130	0,3559	180	0,4928	230	0,6297	280	0,7666	330	0,9035		
31	0849	81	2218	131	3587	181	4956	231	6325	281	7694	331	9063		
32	0876	82	2245	132	3614	182	4983	232	6352	282	7721	332	9090		
33	0904	83	2272	133	3641	183	5010	233	6379	283	7748	333	9117		
34	0931	84	2300	134	3669	184	5038	234	6407	284	7776	334	9145		
35	0958	85	2327	135	3696	185	5065	235	6434	285	7803	335	9172		
36	0986	86	2355	136	3724	186	5093	236	6461	286	7830	336	9199		
37	1013	87	2382	137	3751	187	5120	237	6489	287	7858	337	9227		
38	1040	88	2409	138	3778	188	5147	238	6516	288	7885	338	9254		
39	1068	89	2437	139	3806	189	5175	239	6544	289	7913	339	9282		
40	0,1095	90	0,2464	140	0,3833	190	0,5202	240	0,6571	290	0,7940	340	0,9309		
41	1123	91	2491	141	3860	191	5229	241	6598	291	7967	341	9336		
42	1150	92	2519	142	3888	192	5257	242	6626	292	7995	342	9364		
43	1177	93	2546	143	3915	193	5284	243	6653	293	8022	343	9391		
44	1205	94	2574	144	3943	194	5312	244	6680	294	8049	344	9418		
45	1232	95	2601	145	3970	195	5339	245	6708	295	8077	345	9446		
46	1259	96	2628	146	3997	196	5366	246	6735	296	8104	346	9473		
47	1287	97	2656	147	4025	197	5394	247	6763	297	8132	347	9501		
48	1314	98	2683	148	4052	198	5421	248	6790	298	8159	348	9528		
49	1342	99	2711	149	4079	199	5448	249	6817	299	8186	349	9555		
50	1369	100	0,2738	150	0,4107	200	0,5476	250	0,6845	300	0,8214	350	0,9583		

时	年
0	0,0000
1	0,0001
2	0,0002
3	0,0003
4	0,0005
5	0,0006
6	0,0007
7	0,0008
8	0,0009
9	0,0010
10	0,0011
11	0,0013
12	0,0014
13	0,0015
14	0,0016
15	0,0017
16	0,0018
17	0,0019
18	0,0021
19	0,0022
20	0,0023
21	0,0024
22	0,0025
23	0,0026
24	0,0027

	平年	闰年		平年	闰年
1月	-1	-1	7月	180	181
2月	+30	+30	8月	211	212
3月	58	59	9月	242	243
4月	89	90	10月	272	273
5月	119	120	11月	303	304
6月	150	151	12月	333	334

X. 回归年的岁首

本表给出民用年岁首(世界时1月1日半夜)到回归年岁首(根据纽康表算出的，若换算为勒威耶表，去取得相同的时间，迄至1966年须减去0.0003日，1966年后减去0.0004日)所经历的时间。

1940	+0,5014	+0,00137	1960	+0,3453	+0,00095	1980	+0,1892	+0,00052
1	-0,2564	-70	1	-0,4125	-113	1	-0,5686	-156
2	-0,0142	-4	2	-0,1703	-47	2	-0,3264	-89
3	+0,2280	+62	3	+0,0719	+20	3	-0,0842	-23
4	+0,4702	+129	4	+0,3141	+86	4	+0,1580	+43
5	-0,2876	-79	5	-0,4437	-121	5	-0,5998	-164
6	-0,0454	-12	6	-0,2015	-55	6	-0,3576	-98
7	+0,1968	+54	7	+0,0407	+11	7	-0,1154	-32
8	+0,4390	+120	8	+0,2829	+77	8	+0,1268	+35
9	-0,3188	-87	9	-0,4749	-130	9	-0,6310	-173
1959	-0,0766	-0.00021	1970	-0,2327	-0,00064	1990	-0,3888	-0,00106
1	+0,1656	+45	1	+0,0095	+3	1	-0,1466	-40
2	+0,4078	+112	2	+0,2517	+69	2	+0,0956	+26
3	-0,3500	-96	3	-0,5061	-139	3	-0,6622	-181
4	-0,1078	-30	4	-0,2639	-72	4	-0,4200	-115
5	+0,1343	+37	5	-0,0217	-6	5	-0,1778	-49
6	+0,3765	+103	6	+0,2205	+60	6	+0,0644	+18
7	-0,3813	-104	7	-0,5373	-147	7	-0,6934	-190
8	-0,1391	-38	8	-0,2952	-81	8	-0,4512	-124
9	+0,1031	+28	9	-0,0530	-15	9	-0,2090	-57
1960	+0.3453	+0,00095	1980	+0,1892	+0.00052	2000	+0,0332	+0.00009

为了定出一个事件在回归年与在民用年的小数里(见表IX)的时期，先将其换算为自民用年岁首以来所经历的日与时数(用表IX)，然后在这结果里减去这时期到回归年岁首所经历的时间(从表X取出)。

例：1947年7月3日19时=1947.5010+0.0022−0.0005=1947.5027

XI. 儒略周期

表A (格里历)

年	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1900	241 5021	5386	5751	6116	6481	6847	7212	7577	7942	8308
1910	8673	9038	9403	9769	•0134	•0499	•0864	•1230	•1595	•1960
1920	242 2325	2691	3056	3421	3786	4152	4517	4882	5247	5613
1930	5978	6343	6708	7074	7439	7804	8169	8535	8900	9265
1940	9630	9996	•0361	•0726	•1091	•1457	•1822	•2187	•2552	•2918
1950	243 3283	3648	4013	4379	4744	5109	5474	5840	6205	6570
1960	6935	7301	7666	8031	8396	8762	9127	9492	9857	•0223
1970	244 0588	0953	1318	1684	2049	2414	2779	3145	3510	3875
1980	4240	4606	4971	5336	5701	6067	6432	6797	7162	7528
1990	7893	8258	8623	8989	9354	9719	•0084	•0450	•0815	•1180

表 B

月	年	
	平	闰
I 1月	-1	-1
II 2月	+30	+30
III 3月	58	59
IV 4月	89	90
V 5月	119	120
VI 6月	150	151
VII 7月	180	181
VIII 8月	211	212
IX 9月	242	243
X 10月	272	273
XI 11月	303	304
XII 12月	333	334

本表的使用法。为了求得一个日子在儒略周期里的序数，从A表里取出与年数对应的儒略日，加上从B表里取出与月数对应的数字(若为闰年须取右边一行里的数字)，然后再加上日数。例：求1944年11月23日的儒略日

对应于1944年:	2431091
11月:	304
23日:	23
	2431418

儒略日2431418开始于1944年11月23日正午(世界时)

注：1. 求19世纪里的一天的儒略日，在年数上加100，再象上面那样计算，然后在结果里减去36524 (因1900年是平年)。

2. 求21世纪里的一天的儒略日，在年数上减去100，然后换算为儒略日，再在结果里加上36525 (因2000年是闰年；与之对应的儒略日是2451545，这一天仍属于20世纪)。

XII. 化恒星时为平太阳时

平时＝恒星时－改正值

时		分		秒	
0^h	0^m 0^s,000	0^m	0^m0^s,000	0^s	0^s,000
1	0 9,830	1	0 0,164	1	0,003
2	0 19,659	2	0 0,328	2	0,005
3	0 29,489	3	0 0,491	3	0,008
4	0 39,318	4	0 0,655	4	0,011
5	0 49,148	5	0 0,819	5	0.014
6	0 58,977	6	0 0,983	6	0,016
7	1 8,807	7	0 1,147	7	0,019
8	1 18,636	8	0 1,311	8	0,022
9	1 28,466	9	0 1,474	9	0,025
10	1 38,296	10	0 1,638	10	0,027
11	1 48,125	11	0 1,802	11	0,030
12	1 57,955	12	0 1,966	12	0,033
13	2 7,784	13	0 2,130	13	0,035
14	2 17,614	14	0 2,294	14	0,038
15	2 27,443	15	0 2,457	15	0,041
16	2 37,273	16	0 2,621	16	0,044
17	2 47,102	17	0 2,785	17	0,046
18	2 56,932	18	0 2,949	18	0,049
19	3 6,762	19	0 3,113	19	0,052
20	3 16,591	20	0 3,277	20	0,055
21	3 26,421	21	0 3,440	21	0,057
22	3 36,250	22	0 3,604	22	0,060
23	3 46,080	23	0 3,768	23	0,063
24	3 55,910	24	0 3,932	24	0,066
		25	0 4,096	25	0,068
		26	0 4,259	26	0,071
		27	0 4,423	27	0,074
		28	0 4,587	28	0,076
		29	0 4,751	29	0,079
		30	0 4,915	30	0,082
		31	0 5,079	31	0,085
		32	0 5,242	32	0,087
		33	0 5,406	33	0,090
		34	0 5,570	34	0,093
		35	0 5,734	35	0,096
		36	0 5.898	36	0,098
		37	0 6,062	37	0,101
		38	0 6,225	38	0,104
		39	0 6,389	39	0,106
		40	0 6.553	40	0,109
		41	0 6,717	41	0,112
		42	0 6,881	42	0.115
		43	0 7,045	43	0,117
		44	0 7,208	44	0,120
		45	0 7,372	45	0,123
		46	0 7,536	46	0,126
		47	0 7,700	47	0.128
		48	0 7,864	48	0,131
		49	0 8,027	49	0,134
		50	0 8,191	50	0,137
		51	0 8,355	51	0,139
		52	0 8,519	52	0,142
		53	0 8,683	53	0,145
		54	0 8,847	54	0.147
		55	0 9,010	55	0,150
		56	0 9,174	56	0,153
		57	0 9,338	57	0,156
		58	0 9,502	58	0,158
		59	0 9,666	59	0,161
		60	0 9,830	60	0,164

XIII. 化平太阳时为恒星时

恒星时＝平时＋改正值

时		分		秒	
0^h	0^m 0^s,000	0^m	0^m0^s,000	0^s	0^s,000
1	0 9,856	1	0 0,164	1	0,003
2	0 19,713	2	0 0,329	2	0,005
3	0 29,569	3	0 0,493	3	0,008
4	0 39,426	4	0 0,657	4	0,011
5	0 49,282	5	0 0,821	5	0,014
6	0 59,139	6	0 0,986	6	0,016
7	1 8,995	7	0 1,150	7	0,019
8	1 18,852	8	0 1,314	8	0,022
9	1 28,708	9	0 1,478	9	0,025
10	1 38,565	10	0 1,643	10	0,027
11	1 48,421	11	0 1,807	11	0,030
12	1 58,278	12	0 1,971	12	0,033
13	1 8,134	13	0 2,136	13	0,036
14	2 17,991	14	0 2,300	14	0,038
15	2 27,847	15	0 2,464	15	0,041
16	2 37,704	16	0 2,628	16	0,044
17	2 47,560	17	0 2,793	17	0,047
18	2 57,417	18	0 2,957	18	0,049
19	3 7,273	19	0 3,121	19	0,052
20	3 17,129	20	0 3,285	20	0,055
21	3 26,986	21	0 3,450	21	0,057
22	3 36,842	22	0 3,614	22	0,060
23	3 46,699	23	0 3,778	23	0,063
24	3 56,555	24	0 3,943	24	0,066
		25	0 4,107	25	0,068
		26	0 4,271	26	0,071
		27	0 4,435	27	0,074
		28	0 4,600	28	0,077
		29	0 4,764	29	0,079
		30	0 4,928	30	0,082
		31	0 5,093	31	0,085
		32	0 5,257	32	0,088
		33	0 5,421	33	0,090
		34	0 5,585	34	0,093
		35	0 5,750	35	0,096
		36	0 5,914	36	0,099
		37	0 6,078	37	0,101
		38	0 6,242	38	0,104
		39	0 6,407	39	0,107
		40	0 6,571	40	0,110
		41	0 6,735	41	0,112
		42	0 6,900	42	0,115
		43	0 7,064	43	0,118
		44	0 7,228	44	0,120
		45	0 7,392	45	0,123
		46	0 7,557	46	0,126
		47	0 7,721	47	0,129
		48	0 7,885	48	0,131
		49	0 8,049	49	0,134
		50	0 8,214	50	0,137
		51	0 8,378	51	0,140
		52	0 8,542	52	0,142
		53	0 8,707	53	0,145
		54	0 8,871	54	0,148
		55	0 9,035	55	0,151
		56	0 9,199	56	0,153
		57	0 9,364	57	0,156
		58	0 9,528	58	0,159
		59	0 9,692	59	0,162
		60	0 9,856	60	0,164

XIV. 地球椭球体

计算测站的地心坐标用表

(扁率: $\frac{1}{297}$)

$$\begin{cases} \rho\cos\varphi' = C\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi' = S\sin\varphi \end{cases}$$

φ	φ-φ'	ρ	C	S	φ	φ-φ'	ρ	C	S
0°	0' 0",00	1,000000	1,000000	0,993277	45°	11' 35",66	0,998324	1,001685	0,994951
1	+0 24,20	0,999999	1,000001	993278	46	11 35,32	0,998265	1,001744	0,995009
2	0 48,36	0,999996	1,000004	993281	47	11 34,13	0,998206	1,001803	0,995068
3	1 12,47	0,999991	1,000009	993286	48	11 32,09	0,998148	1,001862	0,995126
4	1 36,50	0,999984	1,000016	993294	49	11 29,21	0,998089	1,001920	0,995185
5	2 0,40	0,999975	1,000026	993303	50	11 25,49	0,998031	1,001978	0,995242
6	2 24,16	0,999964	1,000037	993314	51	11 20,94	0,997973	1,002036	0,995300
7	2 47,75	0,999950	1,000050	993327	52	11 15,55	0,997916	1,002094	0,995357
8	3 11,13	0,999935	1,000065	993342	53	11 9,33	0,997859	1,002151	0,995414
9	3 34,28	0,999918	1,000082	993359	54	11 2,30	0,997803	1,002207	0,995470
10	3 57,18	0,999899	1,000101	993378	55	10 54,46	0,997747	1,002263	0,995525
11	4 19,79	0,999878	1,000122	993399	56	10 45,82	0,997692	1,002318	0,995580
12	4 42,08	0,999856	1,000145	993422	57	10 36,39	0,997638	1,002373	0,995634
13	5 4,04	0,999831	1,000170	993446	58	10 26,18	0,997584	1,002426	0,995687
14	5 25,63	0,999804	1,000197	993473	59	10 15,21	0,997532	1,002479	0,995740
15	5 46,82	0,999776	1,000225	993501	60	10 3,48	0,997480	1,002531	0,995791
16	6 7,59	0,999746	1,000255	993531	61	9 51,01	0,997430	1,002581	0,995841
17	6 27,92	0,999714	1,000287	993563	62	9 37,82	0,997380	1,002631	0,995890
18	6 47,79	0,999681	1,000321	993596	63	9 23,92	0,997332	1,002679	0,995939
19	7 7,16	0,999646	1,000356	993631	64	9 9,33	0,997284	1,002726	0,995986
20	7 26,01	0,999609	1,000393	993668	65	8 54,06	0,997239	1,002772	0,996031
21	7 44,32	0,999571	1,000432	993706	66	8 38,15	0,997194	1,002817	0,996076
22	8 2,08	0,999531	1,000472	993746	67	8 21,59	0,997151	1,002860	0,996118
23	8 19,25	0,999490	1,000514	993787	68	8 4,42	0,997109	1,002902	0,996160
24	8 35,81	0,999447	1,000557	993830	69	7 46,66	0,997069	1,002943	0,996200
25	8 51,75	0,999403	1,000601	993874	70	7 28,32	0,997030	1,002981	0,996239
26	9 7,05	0,999357	1,000647	993920	71	7 9,43	0,996993	1,003019	0,996276
27	9 21,69	0,999311	1,000694	993966	72	6 50,02	0,996957	1,003054	0,996311
28	9 35,64	0,999263	1,000742	994014	73	6 30,10	0,996923	1,003088	0,996345
29	9 48,90	0,999214	1,000791	994063	74	6 9,70	0,996891	1,003120	0,996377
30	10 1,45	0,999164	1,000841	994113	75	5 48,85	0,996860	1,003151	0,996407
31	10 13,26	0,999112	1,000893	994164	76	5 27,57	0,996832	1,003180	0,996436
32	10 24,33	0,999060	1,000945	994216	77	5 5,89	0,996805	1,003207	0,996462
33	10 34,65	0,999007	1,000999	994269	78	4 43,83	0,996780	1,003232	0,996487
34	10 44,19	0,998953	1,001053	994323	79	4 21,42	0,996757	1,003255	0,996510
35	10 52,95	0,998899	1,001108	994378	80	3 58,69	0,996735	1,003276	0,996531
36	11 0,92	0,998843	1,001163	994433	81	3 35,66	0,996716	1,003295	0,996550
37	11 8,09	0,998787	1,001220	994489	82	3 12,37	0,996699	1,003313	0,996568
38	11 14,45	0,998730	1,001277	994545	83	2 48,84	0,996683	1,003328	0,996583
39	11 19,98	0,998673	1,001334	994602	84	2 25,11	0,996670	1,003341	0,996596
40	11 24,69	0,998616	1,001392	994660	85	2 1,20	0,996659	1,003353	0,996607
41	11 28,57	0,998558	1,001450	994717	86	1 37,14	0,996650	1,003362	0,996617
42	11 31,67	0,998499	1,001508	994776	87	1 12,96	0,996642	1,003369	0,996624
43	11 33,60	0,998441	1,001567	994834	88	0 48,69	0,996637	1,003374	0,996629
44	11 35,15	0,998382	1,001626	994892	89	0 24,36	0,996634	1,003377	0,996632
45	11 35,66	0,998324	1,001685	994951	90	0 0,00	0,996633	1,003378	0,996633

赤道半径 6 378 388 米 (Hayford)
极半径 6 356 912 米

XV. 半日周弧长

表 A

由于表 A 内给出的弧长表为 h (时)，若 δ 与 φ 同号，则半日周弧长的数值为 6^h+h；若 δ 与 φ 异号；则为 6^h-h。

表 B 给出蒙气差订正值，有时还须加以视差和视半径两种订正数。

φ	$\delta=0°$	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°	42°	44°	46°
0°	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$	$0^h 0^m$
4	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	9	9	10	11	12	13	13	14	15	17
8	0	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	22	23	25	27	29	31	33
12	0	2	3	5	7	9	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	31	33	35	38	41	44	47	51
16	0	2	5	7	9	12	14	16	19	21	24	27	29	32	35	38	41	45	48	52	56	1 0	1 4	1 9
20	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	41	45	49	53	57	1 1	1 6	1 11	1 17	1 22	1 29
22	0	3	6	10	13	16	20	23	27	30	34	38	41	45	50	54	58	1 2	1 8	1 14	1 19	1 25	1 32	1 39
24	0	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	46	50	55	1 0	1 5	1 10	1 15	1 21	1 28	1 35	1 42	1 50
26	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	41	45	50	55	1 0	1 5	1 11	1 17	1 23	1 30	1 37	1 44	1 52	2 1
28	0	4	9	13	17	22	26	30	35	40	45	50	55	1 0	1 6	1 11	1 18	1 24	1 31	1 38	1 46	1 54	2 4	2 14
30	0	5	9	14	19	23	28	33	38	43	49	54	1 0	1 5	1 12	1 18	1 25	1 32	1 39	1 47	1 56	2 5	2 16	2 27
32	0	5	10	15	20	25	31	36	41	47	53	58	1 5	1 11	1 18	1 25	1 32	1 40	1 48	1 57	2 6	2 17	2 28	2 41
34	0	5	11	16	22	27	33	39	45	51	57	1 3	1 10	1 17	1 24	1 32	1 40	1 48	1 57	2 7	2 18	2 30	2 43	2 57
36	0	6	12	18	23	29	36	42	48	55	1 1	1 8	1 16	1 23	1 31	1 39	1 48	1 57	2 7	2 18	2 30	2 43	2 58	3 15
38	0	6	13	19	25	32	38	45	52	59	1 6	1 14	1 21	1 30	1 38	1 47	1 57	2 7	2 18	2 30	2 44	2 59	3 16	3 36
40	0	7	13	20	27	34	41	48	56	1 3	1 11	1 19	1 28	1 37	1 46	1 56	2 6	2 18	2 30	2 44	2 59	3 16	3 36	4 1
42	0	7	14	22	29	37	44	52	1 0	1 8	1 17	1 25	1 35	1 44	1 55	2 6	2 17	2 30	2 43	2 59	3 16	3 37	4 2	4 35
44	0	8	15	23	31	39	47	56	1 4	1 13	1 22	1 32	1 42	1 52	2 4	2 16	2 28	2 43	2 58	3 16	3 36	4 2	4 35	6 0
45	0	8	16	24	32	41	49	58	1 7	1 16	1 25	1 35	1 46	1 57	2 8	2 21	2 35	2 50	3 6	3 26	3 48	4 17	5 0	
46	0	8	17	25	33	42	51	1 0	1 9	1 19	1 29	1 39	1 50	2 1	2 14	2 27	2 41	2 57	3 15	3 36	4 1	4 35	6 0	
47	0	9	17	26	35	44	53	1 2	1 12	1 22	1 32	1 43	1 54	2 6	2 19	2 33	2 48	3 5	3 25	3 48	4 17	5 0		
48	0	9	18	27	36	45	55	1 4	1 14	1 25	1 35	1 47	1 59	2 11	2 25	2 40	2 56	3 14	3 35	4 1	4 35	6 0		
49	0	9	18	28	37	47	57	1 7	1 17	1 28	1 39	1 51	2 3	2 17	2 31	2 46	3 4	3 24	3 47	4 16	4 59			
50	0	10	19	29	39	49	59	1 9	1 20	1 31	1 43	1 55	2 8	2 22	2 37	2 54	3 13	3 34	4 0	4 34	6 0			
51	0	10	20	30	40	50	1 1	1 12	1 23	1 35	1 47	2 0	2 13	2 28	2 44	3 2	3 22	3 46	4 15	4 59				
52	0	10	21	31	41	52	1 3	1 14	1 26	1 38	1 51	2 5	2 19	2 35	2 52	3 11	3 32	3 59	4 34	6 0				
53	0	11	21	32	43	54	1 6	1 17	1 29	1 42	1 56	2 10	2 25	2 41	3 0	3 20	3 44	4 14	4 58					
54	0	11	22	33	45	56	1 8	1 20	1 33	1 46	2 0	2 15	2 31	2 49	3 8	3 30	3 57	4 33	6 0					
55	0	11	23	35	46	58	1 11	1 23	1 37	1 51	2 5	2 21	2 38	2 57	3 18	3 42	4 13	4 58						
56	0	12	24	36	48	1 1	1 13	1 27	1 41	1 55	2 11	2 27	2 45	3 5	3 28	3 55	4 32	6 0						
57	0	12	25	37	50	1 3	1 16	1 30	1 45	2 0	2 16	2 34	2 53	3 15	3 40	4 11	4 57							
58	0	13	26	39	52	1 6	1 19	1 34	1 49	2 5	2 22	2 41	3 2	3 25	3 53	4 30	6 0							
59	0	13	27	40	54	1 8	1 23	1 38	1 54	2 11	2 29	2 49	3 11	3 37	4 9	4 58								
60	0	14	28	42	56	1 11	1 26	1 42	1 59	2 17	2 36	2 58	3 22	3 51	4 28	6 0								
61	0	14	29	44	59	1 14	1 30	1 47	2 5	2 24	2 44	3 7	3 34	4 7	4 54									
62	0	15	30	46	1 1	1 17	1 34	1 52	2 11	2 31	2 53	3 18	3 47	4 26	6 0									
63	0	16	32	48	1 4	1 21	1 39	1 57	2 17	2 38	3 2	3 30	4 4	4 53										
64	0	16	33	50	1 7	1 25	1 43	2 3	2 24	2 47	3 13	3 44	4 24	6 0										
65	0	17	34	52	1 10	1 29	1 48	2 9	2 32	2 57	3 25	4 10	4 51											

表 B

φ	$\delta=0°$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0°	$2^m,3$	$2^m,3$	$2^m,4$	$2^m,4$	$2^m,5$	$2^m,6$	$2^m,8$	$3^m,0$	$3^m,2$
10	2,3	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0	3,3
20	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,3	3,7
30	2,6	2,7	2,7	2,8	3,0	3,2	3,5	3,8	4,6
35	2,8	2,8	2,9	3,1	3,2	3,6	3,9	4,5	5,5
40	3,0	3,0	3,1	3,3	3,6	3,9	4,6	5,4	7,7
45	3,2	3,3	3,4	3,7	4,0	4,5	5,8	7,7	
50	3,6	3,7	3,9	4,2	4,7	5,4	7,8		
55	4,0	4,2	4,4	4,9	5,9	8,1			
60	4,5	4,9	5,3	6,2	8,5				
65	5,4	5,9	6,8	8,1					

为了求计入蒙气差的半周日弧，将由表 B 取出的订正数 Δh 加入在由表 A 取出的时角上去。

如求太阳上边沿升时或落时太阳中心的时角，则订正数 Δh 应以 $1.47\Delta h$ 代替。

对于月亮的中心这改正数平均为 $-0.67\Delta h$ (计入了视差)。

XVI.

岁　差

下列的公式是根据纽康给出 τ 与 $\tau+t$ 两时期间的岁差．时期 τ 从 1900.0 起算；τ 与 t 均以千回归年为单位计算．其他符号与 § 44 和 § 46 所用的相同

$$\varphi = 173^\circ 57' 3'' + 32869''\tau + 56''\tau^2 + (-8694'' - 55''\tau)t + 3''t^2$$

$$k = (471'',07 - 6'',75\tau + 0'',57\tau^2)t + (-3'',37 + 0'',57\tau)t^2 + 0'',05t^3.$$

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 8'',26 - 468'',44\tau - 0'',60\tau^2 + 1'',83\tau^3.$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + (6'',06 - 9'',20\tau)t^2 - 7'',73t^3$$

$$\psi = (50370'',84 + 49'',30\tau - 0'',04\tau^2)t + (-107'',20 - 1'',48\tau)t^2 - 1'',53t^3.$$

$$\chi = (124'',73 - 188'',70\tau - 0'',14\tau^2)t + (-238'',07 - 1'',57\tau)t^2 - 1'',66t^3.$$

$$\lambda = (50256'',41 + 222'',29\tau + 0'',26\tau^2)t + (111'',15 + 0'',26\tau)t^2 + 0'',10t^3.$$

$$\mu = (46085'',06 + 279'',45\tau + 0'',12\tau^2)t + (139'',73 + 0'',12\tau)t^2 + 36'',32t^3.$$

$$j = (20046'',85 - 85'',33\tau - 0'',37\tau^2)t + (-42'',67 - 0'',37\tau)t^2 - 41'',80t^3$$

$$r = \frac{\pi}{2} - \rho = (23042'',53 + 139'',73\tau + 0'',06\tau^2)t + (30'',23 - 0'',27\tau)t^2 + 18'',00t^3.$$

$$s = r + (79'',27 + 0'',66\tau)t^2 + 0'',32t^3.$$

章　动

下列的公式是根据纽康给出章动的数值．式内 $\odot$ 表示太阳的平黄经，ϖ 太阳近地点的黄经；☾ 表示月亮的平黄经，θ 月亮升交点的平黄经，M' 其平近点角．τ 表示时间，单位为 36525 日，即儒略世纪，自 1900.0 起算

$$N = -(17'',234 + 0'',017\tau)\sin\theta + 0'',209\sin 2\theta - 1'',272\sin 2\odot + 0'',126\sin(\odot - \varpi) + 0'',021\sin(\odot + \varpi) - 0'',050\sin(3\odot - \varpi) + 0'',012\sin(2\odot - \theta).$$

$$dN = -0'',204\sin 2☾ + 0'',068\sin M' - 0'',034\sin(2☾ - \theta) - 0'',026\sin(2☾ + M') + 0'',011\sin(2☾ - M') + 0'',006\sin(2☾ - 2\odot) + 0'',015\sin(2☾ - 2\odot - M').$$

$$\Omega = +(9'',210 + 0'',0009\tau)\cos\theta - 0'',090\cos 2\theta + 0'',551\cos 2\odot + 0'',022\cos(3\odot - \varpi) - 0'',009\cos(\odot + \varpi) - 0'',007\cos(2\odot - \theta).$$

$$d\omega = +0'',089\cos 2☾ + 0'',018\cos(2☾ - \theta) + 0'',011\cos(2☾ + M') - 0'',005\cos(2☾ - M').$$

XVII. 岁差计算的系数

τ	m		n		$f=\dfrac{n_\tau}{n_{1950}}$
1850	$3^s,07141$ =	$46'',0711$	$1^s,33674$ =	$20'',0511$	1.000426
60	159	0739	668	0503	1.000383
70	178	0767	663	0494	1.000341
80	196	0795	657	0486	1,000298
90	215	0823	651	0477	1,000255
1900	234	0851	646	0469	1.000213
10	252	0878	640	0460	1,000170
20	271	0906	634	0451	1.000128
30	290	0934	629	0443	1.000085
40	308	0962	623	0434	1,000043
50	327	0990	617	0426	1,000000
60	346	1018	612	0417	0,999957
70	364	1046	606	0409	0,999915
80	383	1074	600	0400	0,999872
90	401	1102	594	0392	0,999830
2000	420	1130	589	0383	0,999787

XVIII. 赤经岁差计算用表

$[p_\alpha = m + n \sin\alpha \tan\delta]$

α	0^h+ 12^h-	1^h+ 13^h-	2^h+ 14^h-	3^h+ 15^h-	4^h+ 16^h-	5^h+ 17^h-	
0^m	0^s,0000	0^s,3458	0^s,6681	0^s.9448	1^s.1572	1^s.2906	60^m
5	0.0291 (291)	0.3739 (281)	0.6932 (251)	0.9652 (204)	1.1715 (143)	1,2979 (73)	55
10	0,0583 (292)	0.4018 (279)	0.7179 (247)	0.9851 (199)	1,1852 (137)	1.3045 (66)	50
15	0,0874 (291)	0,4295 (277)	0.7423 (244)	1.0046 (195)	1.1984 (132)	1.3105 (60)	45
20	0.1165 (291)	0,4570 (275)	0.7664 (241)	1,0236 (190)	1.2110 (126)	1.3159 (54)	40
25	0,1455 (290)	0,4843 (273)	0.7901 (237)	1.0421 (185)	1.2230 (120)	1.3206 (47)	35
30	0,1744 (289)	0.5113 (270)	0.8134 (233)	1.0601 (180)	1.2345 (115)	1.3247 (41)	30
35	0,2033 (289)	0.5381 (268)	0,8363 (229)	1.0775 (174)	1.2453 (108)	1.3282 (35)	25
40	0.2320 (287)	0.5647 (266)	0.8589 (226)	1,0945 (170)	1,2556 (103)	1.3311 (29)	20
45	0,2607 (287)	0,5910 (263)	0,8810 (221)	1,1110 (165)	1,2653 (97)	1.3333 (22)	15
50	0.2892 (285)	0.6170 (260)	0.9027 (217)	1.1269 (159)	1.2743 (90)	1,3349 (16)	10
55	0.3176 (284)	0,6427 (257)	0.9240 (213)	1,1423 (154)	1.2828 (85)	1,3358 (9)	05
60	0,3458 (282)	0,6681 (254)	0.9448 (208)	1.1572 (149)	1.2906 (78)	1,3362 (4)	00
	11^h+ 23^h-	10^h+ 22^h-	9^h+ 21^h-	8^h+ 20^h-	7^h+ 19^h-	6^h+ 18^h-	α

XIX. 赤 纬 岁 差

p_δ(1950.0)

α	0^h+ 12^h-	1^h+ 13^h-	2^h+ 14^h-	3^h+ 15^h	4^h+ 16^h-	5^h+ 17^h-	
0^m	20".0426	19".3596	17".3574	14".1722	10".0213	5".1874	60^m
5	20,0378 (48)	19,2419 (1177)	17,1346 (2228)	13,8597 (3125)	9,6403 (3810)	4,7638 (4236)	55
10	20,0235 (143)	19,1149 (1270)	16,9037 (2309)	13,5406 (3191)	9,2546 (3857)	4,3380 (4258)	50
15	19,9997 (238)	18,9789 (1360)	16,6648 (2389)	13,2150 (3256)	8,8646 (3900)	3,9101 (4279)	45
20	19,9663 (334)	18,8339 (1450)	16,4179 (2469)	12,8831 (3319)	8,4704 (3942)	3,4809 (4292)	40
25	19,9234 (429)	18,6798 (1541)	16,1632 (2547)	12,5451 (3380)	8,0721 (3983)	3,0489 (4320)	35
30	19,8711 (523)	18,5169 (1629)	15,9008 (2624)	12,2011 (3440)	7,6700 (4021)	2,6161 (4326)	30
35	19,8093 (618)	18,3452 (1717)	15,6309 (2699)	11,8514 (3497)	7,2642 (4048)	2,1820 (4341)	25
40	19,7381 (712)	18,1648 (1804)	15,3535 (2774)	11,4959 (3555)	6,8550 (4092)	1,7468 (4352)	20
45	19.6575 (806)	17,9756 (1892)	15,0688 (2847)	11,1351 (3608)	6,4425 (4125)	1,3108 (4360)	15
50	19,5675 (900)	17,7780 (1976)	14,7769 (2919)	10,7689 (3662)	6,0269 (4156)	0,8742 (4366)	10
55	19,4682 (993)	17,5719 (2061)	14,4780 (2989)	10,3975 (3714)	5,6085 (4184)	0,4372 (4370)	05
60	19,3596 (1086)	17,3574 (2145)	14,1722 (3058)	10,0213 (3762)	5,1874 (4211)	0,0000 (4372)	00
	11^h- 23^h+	10^h- 22^h+	9^h- 21^h+	8^h- 20^h+	7^h- 19^h+	6^h- 18^h+	α

XX. 赤经岁差的第二项

$$a_2=\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(再乘以\left(\frac{t}{100}\right)^2\right)$$

(1950,0)

正赤纬	0°	10°	20°	30°	40°	50°	54°	58°	62°	66°	70°	72°	74°	76°	78°	80°	81°	82°	83°	84°	负赤纬
0 h	+0ˢ,09	+0ˢ,35	+0ˢ,64	+0ˢ,96	+1ˢ,35	+1ˢ,87	+2ˢ,15	+2ˢ,48	+2ˢ,90	+3ˢ,45	+4ˢ,20	+4ˢ,69	+6ˢ,3	+6ˢ,1	+7ˢ,1	+8ˢ,6	+9ˢ,5	+10ˢ,7	+12ˢ,3	+14ˢ,3	12 h
1	0,28	0,52	0,82	1,19	1,69	2,43	2,84	3,38	4,10	5,12	6,65	7,75	9,2	11,2	14,2	18,8	22,3	26,9	33,5	43,3	13
2	0,37	0,62	0,92	1,30	1,84	2,70	3,20	3,86	4,77	6,08	8,13	9,64	11,7	14,5	18,8	25,7	30,9	37,9	48,1	63,4	14
3	0,42	0,62	0,88	1,23	1,74	2,58	3,07	3,74	4,66	6,02	8,16	9,76	11,9	15,0	19,7	27,2	32,8	40,7	51,9	68,0	15
4	0,37	0,52	0,71	0,98	1,38	2,03	2,43	2,97	3,72	4,83	6,60	7,92	9,7	12,3	16,2	22,6	27,3	34,0	43,5	58,1	16
5	0,26	0,33	0,43	0,53	0,79	1,14	1,36	1,66	2,08	2,70	3,69	4,44	+5,5	+6,9	+9,1	+12,7	+15,5	+19,2	+24,7	+33,1	17
6	+0,09	+0,09	+0,08	+0,08	+0,07	+0,06	+0,05	+0,05	+0,04	+0,03	+0,02	+0,01	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,2	18
7	-0,07	-0,15	-0,26	+0,42	-0,65	-1,02	-1,25	-1,56	-2,00	-2,64	-3,66	-4,42	-6,6	-6,9	+9,2	12,9	15,8	19,4	25,0	33,4	19
8	-0,19	0,35	0,54	0,82	1,23	1,91	2,31	2,86	3,63	4,76	6,55	7,89	9,7	12,3	16,3	22,6	27,5	34,1	43,8	58,4	20
9	0,23	0,44	0,71	1,07	1,59	2,44	2,94	3,62	4,56	5,92	8,09	9,69	11,9	15,0	19,7	27,2	32,9	40,8	52,1	69,2	21
10	0,19	0,43	0,74	1,13	1,68	2,54	3,05	3,72	4,64	5,98	8,02	9,54	11,8	14,9	18,8	25,7	30,9	38,0	48,1	63,5	22
11	-0,07	0,33	0,64	1,01	1,51	2,26	2,68	3,22	3,94	4,98	6,50	7,61	9,1	11,1	14,1	18,7	22,2	26,8	33,4	43,2	23
12	+0,09	-0,17	0,45	0,77	1,16	1,69	1,98	2,30	2,72	3,28	4,01	4,50	-5,1	5,9	-6,9	-8,4	-9,3	-10,5	-12,1	-14,1	0
13	0,26	+0,01	0,22	0,47	0,72	0,99	1,10	1,21	1,30	-1,33	-1,24	-1,09	-0,8	-0,3	+0,7	+2,3	+4,1	+8,5	+10,1	+16,0	1
14	0,37	0,17	-0,02	-0,18	-0,30	-0,35	-0,32	-0,23	-0,04	+0,34	+1,11	+1,76	+2,7	+4,3	6,8	11,2	14,7	19,7	27,2	39,1	2
15	0,43	0,26	+0,13	+0,04	+0,01	+0,11	+0,22	+0,42	+0,77	1,37	2,47	3,38	4,7	6,7	9,9	15,4	19,8	25,9	35,0	49,3	3
16	0,37	0,27	0,19	0,15	0,16	0,31	0,45	0,66	1,01	1,59	2,84	3,48	4,7	6,5	9,4	14,4	18,2	23,7	31,8	44,4	4
17	0,28	0,20	0,17	0,16	0,18	0,29	0,38	0,51	0,73	1,09	1,72	2,23	2,9	4,0	5,7	8,7	10,9	14,1	18,9	26,2	5
18	+0,09	+0,10	0,10	0,11	0,12	+0,13	+0,13	+0,14	+0,15	+0,16	+0,17	+0,18	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,3	+0,3	+0,3	+0,4	6
19	-0,07	-0,01	0,04	0,06	0,05	-0,04	-0,11	-0,24	-0,44	-0,78	-1,38	-1,87	-2,6	-3,6	-5,3	-8,2	-10,4	-13,6	-18,2	-25,5	7
20	0,19	0,07	0,02	0,06	0,06	-0,07	-0,19	0,39	0,73	1,29	2,31	3,14	4,3	6,1	9,0	13,9	17,7	23,2	31,2	43,7	8
21	0,23	-0,03	0,07	0,16	0,22	+0,13	+0,02	-0,17	-0,50	1,09	2,18	3,07	4,4	6,4	9,5	15,0	19,3	25,4	34,5	48,8	9
22	0,19	+0,02	0,21	0,38	0,51	0,57	0,55	+0,46	+0,28	-0,09	-0,84	-1,49	-2,5	-4,0	6,5	10,9	14,3	19,3	26,6	38,8	10
23	-0,07	0,18	0,42	0,66	0,92	1,20	1,31	1,42	1,51	+1,55	+1,49	+1,32	+1,[illegible]	+0,5	-0,4	-2,3	-3,9	-6,2	-9,8	-15,7	11
24	+0,09	+0,35	+0,64	+0,96	+1,35	+1,87	+2,15	+2,48	+2,90	+3,45	+4,20	+4,69	+6,3	+6,1	+7,1	+8,6	+9,5	+10,7	+12,3	+14,3	12

XXI. 赤纬岁差的第二项

$$d_2=\frac{1}{2}\frac{d^2\delta}{dt^2}\left(再乘以\left(\frac{t}{100}\right)^2\right)$$

赤纬为负时须改号

(1950,0)

正赤纬	0°	10°	20°	30°	40°	50°	54°	58°	62°	66°	70°	72°	74°	76°	78°	80°	81°	82°	83°	84°	负赤纬
0 h	0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	-0″,4	12 h
1	6,2	6,3	6,4	6,6	6,8	7,0	7,1	7,3	7,4	7,7	8,0	8,2	8,5	8,8	9,3	9,9	10,3	10,8	11,6	12,4	13
2	11,6	12,0	12,5	13,0	13,6	14,5	14,9	15,5	16,1	17,0	18,3	19,1	20,1	21,3	23,0	25,4	26,9	28,9	31,4	34,7	14
3	16,1	17,0	17,9	18,9	20,2	21,9	22,8	23,9	25,3	27,1	29,5	31,1	33,1	35,7	39,0	43,7	46,9	50,8	55,8	62,5	15
4	19,6	20,9	22,3	23,8	25,7	28,3	29,7	31,3	33,3	36,0	39,7	42,1	45,1	48,9	54,0	61,0	65,7	71,6	79,1	89,1	16
5	21,7	23,3	25,1	27,0	29,4	32,6	34,2	36,3	38,8	42,1	46,7	49,7	53,4	58,2	64,5	73,3	79,1	86,4	95,7	108,2	17
6	22,4	24,1	25,9	28,0	30,6	34,0	36,8	38,0	40,7	44,3	49,1	52,4	56,4	61,5	68,2	77,8	83,9	91,7	101,7	115,1	18
7	21,5	23,2	24,8	26,8	29,1	32,4	34,0	36,1	38,6	41,9	48,5	49,5	53,2	58,0	64,3	73,0	78,9	86,2	95,5	108,0	19
8	19,2	20,4	21,8	23,4	25,3	27,9	29,2	30,9	32,9	35,6	39,2	41,7	44,6	48,5	53,5	60,6	65,3	71,1	78,7	88,7	20
9	15,5	16,4	17,3	18,3	19,6	21,3	22,2	23,3	24,7	26,5	28,9	30,5	32,5	35,1	38,4	43,1	46,3	50,2	55,2	61,8	21
10	10,8	11,2	11,7	12,2	12,9	13,7	14,2	14,7	15,4	16,3	17,5	18,3	19,3	20,6	22,3	24,6	26,2	28,1	30,6	34,0	22
11	-5,4	-6,5	-5,6	-5,7	-5,9	-6,2	-6,3	-6,4	-6,6	-6,9	-7,2	-7,4	-7,7	-8,0	-8,5	-9,1	-9,5	-10,0	-10,7	-11,6	23
12	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4	0
13	6,2	6,1	6,0	5,9	5,7	5,4	5,3	5,2	5,0	4,7	4,4	4,2	3,9	3,6	3,1	+2,5	+2,1	+1,6	+0,9	0,0	1
14	11,6	11,1	10,7	10,2	9,5	8,7	8,2	7,7	7,0	6,1	4,9	4,1	+3,1	+1,8	+0,1	-2,2	-3,8	-5,7	-8,2	-11,6	2
15	16,1	15,3	14,4	13,3	12,1	10,3	9,4	8,3	7,0	5,2	+2,8	+1,2	-0,8	-3,4	-6,8	11,5	14,6	18,5	23,5	30,2	3
16	19,6	18,4	17,0	15,4	13,5	10,9	9,8	7,9	6,9	3,2	-0,5	-2,9	5,9	8,7	14,8	21,8	26,5	32,3	39,9	49,9	4
17	21,7	20,2	18,4	16,5	14,1	10,9	9,2	7,2	4,7	1,3	3,2	6,2	9,9	14,7	21,0	29,8	35,6	42,9	52,2	61,7	5
18	22,4	20,7	18,9	16,8	14,2	10,8	9,0	6,8	4,1	0,5	4,4	7,6	11,6	16,7	23,4	32,8	39,1	46,9	56,8	70,2	6
19	21,5	19,9	18,2	16,3	13,9	10,7	9,0	7,0	4,4	1,1	3,4	6,4	10,2	14,9	21,2	30,0	35,8	43,1	52,5	64,9	7
20	18,2	17,9	16,5	15,0	13,1	10,5	9,1	7,5	5,4	2,8	-0,9	-3,3	6,3	10,1	15,2	22,2	26,9	32,8	40,3	50,3	8
21	15,5	14,7	13,8	12,7	11,5	9,7	8,8	7,7	6,4	4,6	+2,2	+0,5	-1,4	-4,0	7,4	12,1	15,2	19,1	24,1	30,8	9
22	10,8	10,4	9,9	9,4	8,8	7,9	7,5	6,9	6,2	5,4	4,1	3,3	+2,3	+1,1	-0,6	-3,0	-4,5	-6,5	-9,0	12,3	10
23	+5,4	+5,3	+5,1	+5,0	+4,8	+4,6	+4,5	+4,3	+4,2	+3,9	+3,6	+3,4	+3,1	+2,8	+2,3	+1,7	+1,2	+0,7	+0,1	0,8	11
24	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4	12

XXII．赤经岁差的第三项

$$a_3=\frac{1}{6}\,\frac{d^3\alpha}{dt^3}\left(再乘以\left(\frac{t}{100}\right)^3\right)$$

(1950.0)

正赤纬	0°	40°	58°	62°	66°	70°	72°	74°	76°	78°	80°	81°	82°	83°	84°	负赤纬
0 h	+0ˢ.01	+0ˢ.02	+0ˢ.05	+0ˢ.06	+0ˢ.08	+0ˢ.12	+0ˢ.15	+0ˢ.19	+0ˢ.24	+0ˢ.33	+0ˢ.48	+0ˢ.59	+0ˢ.74	+0ˢ.97	+1ˢ.32	12 h
1	1	2	5	7	10	16	21	28	40	59	0.95	1.25	1.70	2.14	3.69	13
2	+1	+1	4	6	8	14	19	26	38	59	0.99	1.33	1.86	2.31	4.25	14
3	0	0	+1	+1	+2	+5	+7	+11	+17	+28	+0.51	+0.71	+1.02	+1.25	+2.49	15
4	0	-1	-3	-4	-6	-8	-10	-12	-16	-21	-0.29	-0.36	-0.44	-0.57	-0.76	16
5	0	2	7	9	13	19	25	33	45	65	1.02	1.33	1.80	2.25	3.83	17
6	0	3	8	11	16	24	31	41	56	83	1.31	1.73	2.35	2.93	5.07	18
7	0	2	7	9	13	19	24	32	44	64	1.01	1.32	1.79	2.23	3.80	19
8	0	-1	-3	-4	-6	-8	-9	-12	-15	-20	-0.28	-0.34	-0.42	-0.54	-0.72	20
9	0	0	+1	+1	+3	+5	+8	+12	+19	+30	+0.53	+0.73	+1.05	+1.29	+2.54	21
10	+1	+1	4	6	9	15	19	27	39	60	1.00	1.35	1.89	2.34	4.29	22
11	1	2	5	7	11	17	22	29	40	60	0.96	1.26	1.72	2.16	3.71	23
12	1	2	5	8	8	12	15	19	24	+33	+0.48	+0.59	+0.75	+0.97	+1.32	0
13	1	2	3	3	+4	+4	+4	+4	+2	-2	-0.13	-0.24	-0.43	-0.47	-1.42	1
14	+1	+1	+1	+1	0	-2	-4	-8	-14	27	0.52	0.76	1.14	1.37	2.97	2
15	0	0	0	-1	-2	5	7	11	17	29	0.52	0.72	1.05	1.28	2.53	3
16	0	0	-1	1	2	3	-5	-6	-9	-13	-0.19	-0.24	-0.32	-0.43	-0.60	4
17	0	0	-1	-1	-1	-1	0	+1	+3	+8	+0.20	+0.31	+0.51	+0.56	+1.52	5
18	0	0	0	0	0	+1	+2	4	9	17	0.37	0.56	0.87	0.99	2.43	6
19	0	0	0	+1	+1	0	0	+1	+4	+9	+0.21	+0.32	+0.52	+0.57	+1.54	7
20	0	0	-1	1	2	-3	-4	-6	-8	-12	-0.18	-0.23	-0.29	-0.40	-0.55	8
21	0	+1	0	-1	-2	4	7	10	17	28	0.50	0.70	1.02	1.25	2.48	9
22	+1	1	+1	+1	0	-2	-4	-7	-14	26	0.51	0.74	-1.12	1.33	2.92	10
23	+1	2	3	3	+4	+4	+4	+4	+2	-2	-0.12	-0.23	-0.42	-0.45	-1.40	11
24	+0.01	+0.02	+0.05	+0.06	+0.08	+0.12	+0.15	+0.19	+0.24	+0.33	+0.48	+0.59	+0.74	+0.97	+1.32	12

XXIII．赤纬岁差的第三项

$$d_3=\frac{1}{6}\,\frac{d^3\delta}{dt^3}\left(再乘以\left(\frac{t}{100}\right)^3\right)$$

赤纬为负时须改号

(1950.0)

正赤纬	0°	40°	58°	62°	66°	70°	72°	74°	76°	78°	80°	81°	82°	83°	84°	负赤纬
0 h	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	-0″.2	12 h
1	2	2	3	3	3	4	4	4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.9	1.0	1.2	13
2	2	2	4	4	5	6	6	7	0.9	1.0	1.3	1.6	1.9	2.3	2.9	14
3	1	2	4	4	5	7	8	9	1.1	1.4	1.8	2.1	2.6	3.2	4.2	15
4	-1	2	3	4	5	6	7	8	1.0	1.3	1.8	2.1	2.5	3.2	4.2	16
5	0	-1	-2	-2	-3	-4	-4	-5	-0.6	-0.8	-1.1	-1.3	-1.6	-2.0	-2.6	17
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	18
7	+1	+1	+2	+2	+3	+4	+4	+5	+0.7	+0.8	+1.1	+1.3	+1.6	+2.0	+2.7	19
8	1	2	3	4	5	6	7	9	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.2	4.2	20
9	1	2	4	5	5	7	8	9	1.1	1.4	1.8	2.2	2.6	3.2	4.2	21
10	2	2	4	4	5	6	6	7	0.9	1.1	1.4	1.6	1.9	2.3	2.9	22
11	2	2	3	3	3	4	4	4	0.5	[illegible]	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	23
12	2	2	3	2	2	2	2	+2	+0.2	+0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0
13	2	1	1	+1	+1	+1	1	0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	1
14	2	1	+1	0	0	0	1	+1	+0.1	+0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	1.1	2
15	1	+1	0	0	+1	+1	1	2	0.2	0.4	0.6	0.8	1.1	1.5	2.1	3
16	+1	0	0	0	1	1	2	2	0.3	0.5	0.7	0.9	1.2	1.7	2.4	4
17	0	0	0	0	+1	+1	+1	+2	+0.2	+0.3	+0.5	+0.6	+0.8	+1.2	+1.6	5
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	6
19	-1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-0.2	-0.3	-0.5	-0.6	-0.8	-1.1	-1.6	7
20	1	0	0	0	-1	1	1	2	0.3	0.4	0.7	0.9	1.2	1.7	2.4	8
21	1	-1	0	0	-1	-1	1	2	0.2	0.3	0.6	0.8	1.0	1.4	2.1	9
22	2	1	-1	-0	0	0	1	-1	-0.1	-0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1.1	10
23	2	1	1	-1	-1	-1	1	0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	11
24	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	12

*XXIV. 表 A 蒙气差

(在正常气压和气温 t 度下的蒙气差)

$tg\ z_0$ \ t	-20°	-15°	-10°	-5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°	+35°	+40°
0,0	65″04	63″77	62″56	61″39	60″27	59″18	58″13	57″12	56″15	55″21	54″29	53″41	52″56
1	65,04	63,77	62,56	61,39	60,27	59,18	58,13	57,12	56,15	55,20	54,29	53,41	52,56
2	65,03	63,77	62,56	61,39	60,26	59,18	58,13	57,12	56,15	55,20	54,29	53,41	52,55
3	65,03	63,77	62,55	61,39	60,26	59,18	58,13	57,12	56,14	55,20	54,29	53,40	52,55
4	65,03	63,76	62,55	61,38	60,26	59,17	58,12	57,11	56,14	55,19	54,28	53,40	52,55
5	65,02	63,76	62,54	61.38	60,25	59,16	58,12	57,11	56,13	55,19	54,28	53,39	52,54
6	65,01	63,75	62,54	61,37	60,24	59,16	58,11	57,10	56,12	55,18	54,27	53,39	52,53
7	65,00	63,74	62,53	61,36	60,23	59,15	58,10	57,09	56,12	55,17	54,26	53,38	52,52
8	64,99	63,73	62,52	61,35	60,22	59,14	58,09	57,08	56,11	55,16	54,25	53,37	52,51
9	64,98	63,72	62,51	61,34	60,21	59,13	58,08	57,07	56,09	55,15	54,24	53,36	52,50
1,0	64,97	63,71	62,49	61,33	60,20	59,11	58,07	57,06	56,08	55,14	54,22	53,34	52,49
1	64,96	63,69	62,49	61,31	60,19	59,10	58,05	57,04	56,07	55,12	54,21	53,33	52,47
2	64,94	63,68	62,47	61,30	60,17	59,09	58,04	57,03	56,05	55,11	54,20	53,31	52,46
3	64,93	63,66	62,45	61,28	60,15	59,07	58,02	57,01	56,03	55.09	54,18	53,30	52,44
4	64,91	63,64	62,43	61,26	60,14	59,05	58,00	56,99	56,02	55,07	54,16	53,28	52,42
5	64,89	63,63	62,41	61,24	60,12	59,03	57,98	56,97	56,00	55,05	54,14	53,26	52,40
6	64,87	63,61	62,39	61,22	60,10	59,01	57,96	56,95	55,98	55,03	54,12	53,24	52,38
7	64,85	63,58	62,37	61,20	60,08	58,99	57,94	56,93	55,95	55,01	54,10	53,21	52,36
8	64,83	63,56	62,35	61,18	60,05	58,97	57,92	56,91	55,93	54,99	54,07	53,19	52,34
9	64,80	63,54	62,32	61,15	60,03	58,94	57,89	56,88	55,91	54,96	54,05	53,17	52,31
2,0	64,78	63,51	62,30	61,13	60,00	58,92	57,87	56,86	55,88	54,94	54,02	53,14	52,28
1	64,75	63,49	62,27	61,10	59,98	58,89	57,84	56,83	55,85	54,91	54,00	53,11	52,26
2	64,72	63,46	62,25	61,08	59,95	58,86	57,81	56,80	55,82	54,88	53,97	53,08	52,23
3	64,70	63,43	62,22	61,05	59,92	58,83	57,78	56,77	55,80	54,85	53,94	53,05	52,20
4	64,67	63,40	62,19	61,02	59,89	58,80	57,75	56,74	55,76	54,82	53,91	53,02	52,17
5	64,63	63,37	62,16	60,98	59,86	58,77	57,72	56,71	55,73	54,79	53,87	52,99	52,14
6	64,60	63,34	62,12	60,95	59,82	58,74	57,69	56,68	55,70	54,76	53,84	52,96	52,10
7	64,57	63,30	62,09	60,92	59,79	58,70	57,66	56,64	55,67	54,72	53,81	52,92	52,07
8	64,54	63,27	62,05	60,88	59,76	58,67	57.62	56,61	55,63	54,68	53,77	52,89	52,03
9	64,50	63,23	62,02	60,85	59,72	58,63	57,58	56,57	55,59	54,65	53,73	52,85	51,99
3,0	64,46	63,20	61,98	60,81	59,68	58,59	57,55	56,53	55,56	54,61	53,70	52,81	51,96
1	64,43	63,16	61,94	60,77	59,64	58,56	57,51	56,49	55,52	54,57	53,66	52,77	51,92
2	64,39	63,12	61,90	60,73	59,60	58,52	57,47	56,45	55,48	54,53	53,62	52,73	51,88
3	64,35	63,08	61,86	60,69	59,56	58,48	57,43	56,41	55,44	54,49	53,58	52,69	51,84
4	64,31	63,04	61,82	60,65	59,52	58,43	57,38	56,37	55,39	54,45	53,53	52,65	51,79
5	64,26	63,00	61,78	60,61	59,48	58,39	57,34	56,33	55,35	54,40	53,49	52,60	51,75
6	64,22	62,95	61,74	60,56	59,44	58,35	57,30	56,28	55,31	54,36	53,45	52,56	51,70
7	64,18	62,91	61,69	60,52	59,39	58,30	57,25	56,24	55,26	54,31	53,40	52,52	51,66
8	64,13	62,86	61,65	60,47	59,34	58,26	57,21	56,19	55,21	54,27	53,35	52,47	51,61
9	64.08	62,82	61,60	60,43	59,30	58,21	57,16	56,15	55,17	54,22	53,31	52,42	51,57
4,0	64,04	62,77	61,55	60,38	59,25	58,16	57,11	56,10	55,12	54,17	53,26	52,37	51,52
1	63,99	62,72	61,50	60,33	59,20	58,11	57,06	56,05	55,07	54,12	53,21	52,32	51,47
2	63,94	62,67	61,45	60,28	59,15	58,06	57,01	56,00	55,02	54,07	53,16	52,27	51,42
3	63,89	62,62	61,40	60,23	59,10	58,01	56,96	55,95	54,97	54,02	53,11	52,22	51,36
4	63,84	62,57	61,35	60,18	59,05	57,96	56,91	55,89	54,92	53,97	53,05	52,17	51,31
5	63,79	62,52	61,30	60,13	59,00	57,91	56,86	55,84	54,86	53,92	53,00	52,12	51,26
6	63,73	62,46	61,25	60,07	58,94	57,85	56,80	56,79	54,81	53,86	52,95	52,06	51,20
7	62,68	62,41	61,19	60,02	58,89	57,80	56,75	55,73	54,75	53,81	52,89	52,01	51,15
8	63,62	62,35	61,14	59,96	58,83	57,74	56,69	55,68	54,70	53,75	52,84	51,95	51,09
9	63,57	62,30	61,08	59,91	58,78	57,69	56,63	55,62	54,64	53,69	52,78	51,89	51,04
5,0	63,51	62,24	61,02	59,85	58,72	57,63	56,58	55,56	54,58	53,64	52,72	51,84	50,98

XXV. 表 B 气压订正

P	$\frac{P}{760}$	P	$\frac{P}{760}$
690	0,9079	740	0,9737
1	9092	1	9750
2	9105	2	9763
3	9118	3	9776
4	9132	4	9789
5	9145	5	9803
6	9158	6	9816
7	9171	7	9829
8	9184	8	9842
699	0,9197	749	0,9855
700	0,9211	750	0,9868
1	9224	1	9882
2	9237	2	9895
3	9250	3	9908
4	9263	4	9921
5	9276	5	9934
6	9289	6	9947
7	9303	7	9961
8	9316	8	9974
709	0,9342	759	0,9987
710	0,9352	760	1,0000
1	9355	1	0013
2	9368	2	0026
3	9382	3	0039
4	9395	4	0053
5	9408	5	0066
6	9421	6	0079
7	9434	7	0092
8	9447	8	0105
719	0,9461	769	1,0118
720	0,9474	770	1,0132
1	9487	1	0145
2	9500	2	0158
3	9513	3	0171
4	9526	4	0184
5	9539	5	0197
6	9553	6	0211
7	9566	7	0224
8	9579	8	0237
729	0,9592	779	1,0250
730	0,9605	780	1,0263
1	9618	1	0276
2	9632	2	0289
3	9645	3	0303
4	9658	4	0316
5	9671	5	0329
6	9684	6	0342
7	9697	7	0355
8	9711	8	0368
739	9724	789	1,0382

XXVI. 表 C 将气压高度归算到 0°C

气压的高度

θ	66^{cm}	68^{cm}	70^{cm}	72^{cm}	74^{cm}	76^{cm}	78^{cm}	80^{cm}
0°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10°	1,08	1,11	1,14	1,17	1,21	1.24	1,27	1,31
20°	2,15	2,21	2,28	2,34	2,41	2,47	2,54	2,62
30°	3,22	3,32	3,41	3,51	3,61	3,71	3,80	3,94
40°	4,30	4,43	4,55	4,68	4,82	4.95	5,07	5,25

表内改正数的单位为毫米。当 $\tau>\theta°$ 时，须减去改正数；当 $\tau<0°$ 时，须加入改正数。

例

天顶距的观测值：$Z=67°13'22''.12$
气　　　温：$t=+18°.2$
气压计高度：$H=748.1$ 毫米
气压计温度：$\theta=17°.4$
纬　　　度：$\varphi=48°35'$
高　　　度：$h=146$ 米

计算气压的公式为：

$$P=H(1-0.00264\cos 2\varphi-0.000000196h-0.000163)$$

我们取高度和纬度的订正数的平均值，在本例为 +0.23 毫米。

至于温度订正，则从以上的表 C 取出为

$$P=748.1+0.23-2.12=746.2 \text{ 毫米}$$

蒙气差为以下三个生数的乘积：

1. $\tan z_0=2.3815$
2. 从表 A 取出的，根据 $\tan z_0$ 与气温 t 两引数取出之值为

$$56''.12$$

3. 从表 B 取出的气压因数为

$$0.9819$$

故得
$$R=131''.23=2'11''.23$$
$$z_1=z_0+R=67°15'33''.35$$

XXVII. 函数 $\Psi(x)=e^{x^2}\int_x^\infty e^{-x^2}dx$ 表

x	Ψ(x)		x +	Ψ(x)		x +	Ψ(x)		x +	Ψ(x)	
-0,50	1,7302	270	0,00	0,8862	99	0,50	0,5456	45	-1,00	0,3789	24
49	1,7032	264	01	8763	97	51	5411	44	01	3765	24
48	1,6768	258	02	8666	96	52	5367	44	02	3741	23
47	1,6510	252	03	8570	94	53	5323	43	03	3718	23
46	1,6258	247	04	8476	92	54	5280	43	04	3695	23
45	1,6011	241	05	8384	91	55	5237	42	05	3672	23
44	1,5770	236	06	8293	89	56	5195	42	06	3649	23
43	1,5534	231	07	8204	88	57	5153	41	07	3626	22
42	1,5308	227	08	8116	87	58	5112	40	08	3604	22
41	1,5076	221	09	8029	84	59	5072	40	09	3582	22
-0,40	1,4855	216	0.10	0,7945	84	0,60	0,5032	39	1,10	0,3560	21
39	1,4639	212	11	7861	82	61	4993	39	11	3539	22
38	1,4427	208	12	7779	80	62	4954	38	12	3517	21
37	1,4219	203	13	7699	80	63	4916	38	13	3496	21
36	1,4016	198	14	7619	78	64	4878	38	14	3475	20
35	1,3818	195	15	7541	77	65	4840	36	15	3455	21
34	1,3623	191	16	7464	75	66	4804	37	16	3434	20
33	1,3432	186	17	7389	74	67	4767	36	17	3414	20
32	1,3246	183	18	7315	73	68	4731	35	18	3394	20
31	1,3063	180	19	7242	72	69	4696	35	19	3374	19
-0,30	1,2883	175	0,20	0,7170	71	0,70	0,4661	35	1,20	0,3355	20
29	1,2708	172	21	7099	70	71	4626	34	21	3335	19
28	1,2536	168	22	7029	68	72	4592	33	22	3316	19
27	1,2368	166	23	6961	68	73	4559	34	23	3297	19
26	1,2202	161	24	6893	66	74	4525	32	24	3278	18
25	1,2041	159	25	6827	65	75	4493	33	25	3260	19
24	1,1882	155	26	6762	65	76	4460	32	26	3241	18
23	1,1727	153	27	6697	63	77	4428	31	27	3223	18
22	1,1574	149	28	6634	62	78	4397	32	28	3205	18
21	1,1425	147	29	6572	62	79	4265	30	29	3187	17
-0,20	1,1278	144	0,30	0,6510	60	0,80	0,4335	31	1,30	0,3170	18
19	1,1134	141	31	6450	60	81	4304	30	31	3152	17
18	1,0993	138	32	6390	58	82	4274	30	32	3135	17
17	1,0855	135	33	6332	58	83	4244	29	33	3118	17
16	1,0720	133	34	6274	57	84	4215	29	34	3101	17
15	1,0587	131	35	6217	56	85	4186	29	35	3084	17
14	1,0456	128	36	6161	55	86	4157	28	36	3067	16
13	1,0328	126	37	6106	55	87	4129	28	37	3051	17
12	1,0202	123	38	6051	53	88	4101	28	38	3034	16
11	1,0079	121	39	5998	53	89	4073	27	39	3018	16
-0,10	0,9958	119	0,40	0,5945	52	0,90	0,4046	27	1,40	0,3002	16
09	0,9839	116	41	5893	52	91	4019	27	41	2986	16
08	0,9723	115	42	5841	50	92	3992	26	42	2970	15
07	0.9608	112	43	5791	50	93	3966	26	43	2955	16
06	0,9496	111	44	5741	49	94	3940	26	44	2939	15
05	0,9385	108	45	5692	49	95	3914	26	45	2924	15
04	0,9277	107	46	5643	47	96	3888	25	46	2909	15
03	0.9170	104	47	5596	47	97	3863	25	47	2894	15
02	0,9066	103	48	5549	47	98	3838	24	48	2879	14
01	0,8963	101	49	5502	46	0,99	3814	25	49	2865	15
-0,00	0.8862		0,50	0,5456		1,00	0,3789		1,50	0,2850	

XXVIII. 函数 $\Phi(x)=2x\Psi(x)$ 表

x	Φ(x)	Δ
0,00	0,00000	1753
01	01753	1713
02	03466	1676
03	05142	1639
04	06781	1603
05	08384	1567
06	09951	1534
07	11485	1500
08	12985	1468
09	14453	1436
0,10	0,15889	1406
11	17295	1375
12	18670	1346
13	20016	1318
14	21334	1290
15	22624	1262
16	23886	1237
17	25123	1210
18	26333	1185
19	27518	1161
0,20	0,28679	1137
21	29816	1113
22	30929	1091
23	32020	1068
24	33088	1047
25	34135	1026
26	35161	1005
27	36166	984
28	37150	965
29	38115	946
0,30	0,39061	927
31	39988	909
32	40897	891
33	41788	874
34	42662	857
35	43518	840
36	44358	823
37	45181	808
38	45989	792
39	46781	777
0,40	0,47558	762
41	48320	747
42	49067	734
43	49801	719
44	50520	706
45	51226	693
46	51919	680
47	52599	667
48	53266	655
49	53921	643
0,50	0,54564	

x	Φ(x)	Δ
0,50	0,54564	631
51	55195	620
52	55815	608
53	56423	597
54	57020	587
55	57607	575
56	58182	566
57	58748	555
58	59303	546
59	59849	535
0,60	0,60384	527
61	60911	517
62	61428	508
63	61936	499
64	62435	490
65	62925	482
66	63407	474
67	63881	465
68	64346	458
69	64804	449
0,70	0,65253	442
71	65695	434
72	66129	428
73	66557	419
74	66976	413
75	67389	406
76	67795	399
77	68194	393
78	68587	386
79	68973	380
0,80	0,69353	373
81	69726	367
82	70093	362
83	70455	355
84	70810	350
85	71160	344
86	71504	339
87	71843	333
88	72176	328
89	72504	322
0,90	0,72826	318
91	73144	312
92	73456	308
93	73764	303
94	74067	298
95	74365	293
96	74658	289
97	74947	284
98	75231	280
0,99	75511	276
1,00	75787	

x	Φ(x)	Δ
1,00	0,75787	273
01	76060	266
02	76326	263
03	76589	260
04	76849	255
05	77104	252
06	77356	248
07	77604	244
08	77848	240
09	78088	237
1,10	0,78325	234
11	78559	230
12	78789	227
13	79016	223
14	79239	220
15	79459	217
16	79676	214
17	79890	210
18	80100	208
19	80308	205
1,20	0,80513	202
21	80715	199
22	80914	196
23	81110	193
24	81303	191
25	81494	188
26	81682	185
27	81867	183
28	82050	180
29	82230	178
1,30	0,82408	175
31	82583	173
32	82756	170
33	82926	169
34	83095	165
35	83260	164
36	83424	162
37	83586	159
38	83745	157
39	83902	155
1,40	0,84057	153
41	84210	151
42	84361	149
43	84510	147
44	84657	145
45	84802	143
46	84945	141
47	85086	140
48	85226	137
49	85363	136
1,50	0,85499	

x	Φ(x)	Δ
1,50	0,85499	654
1,55	86153	613
1,60	86766	576
1,65	87342	541
1,70	87883	510
1,75	88393	479
1,80	88872	453
1,85	89325	426
1,90	89751	403
1,95	90154	381
2,00	0,90535	361
2,05	90896	341
2,10	91237	323
2,15	91560	307
2,20	91867	291
2,25	92158	276
2,30	92434	265
2,35	92699	248
2,40	92947	238
2,45	93185	226
2,50	0,93411	422
2,6	93833	384
2,7	94217	350
2,8	94567	320
2,9	94887	294
3,0	0,95181	270
3,1	95451	249
3,2	95700	229
3,3	95929	212
3,4	96141	197
3,5	96338	182
3,6	96520	169
3,7	96689	157
3,8	96846	147
3,9	96993	137
4,0	97130	128
4,1	97258	120
4,2	97378	112
4,3	97490	105
4,4	97595	99
4,5	97694	93
4,6	97787	88
4,7	97875	83
4,8	97958	78
4,9	98036	73
5,0	98109	

x	Φ(x)	Δ
5,0	0,98109	70
5,1	98179	66
5,2	98245	63
5,3	98308	59
5,4	98367	56
5,5	98423	53
5,6	98476	51
5,7	98527	48
5,8	98575	46
5,9	98621	44
6,0	0,98665	191
6,5	98856	153
7,0	99009	125
7,5	99134	102
8,0	99236	86
8,5	99322	72
9,0	99394	61
9,5	99455	52
10,0	0,99507	85
11,0	0,99592	64
12,0	99656	51
13,0	99707	40
14,0	99747	32
15,0	99779	27
16,0	99806	22
17,0	99828	18
18,0	99846	16
19,0	99862	13
20,0	99875	12
21,0	99887	10
22,0	99897	9
23,0	99906	7
24,0	99913	7
25,0	99920	

XXIX．大行星轨道根数表

下表给出大行星的轨道根数与其长期变化．水星、金星与地球的根数取出纽康表；火星的根数取自罗斯(Ross)改进的纽康表；至于其他外行星的根数概取自加约(Gaillot)的表．

时间 t 以 36525 日，即儒略世纪为单位，从历书时 1900 年 1 月 0 日 12 时起计算．符号的意义如下：

- L 行星的平黄经
- ϖ 近日点黄经
- Ω 升交点黄经

（以上三项：对于历元 t 时的黄道与平春分点的分至根数）

- e 偏心率
- i 交 角
- η 恒星平均行度
- a 半长轴

水星 $L = 178^\circ 10' 44'' + 538106654'',80\,t + 1'',084\,t^2,$ $\varpi = 75^\circ 53' 58'',91 + 5599'',76\,t + 1'',061\,t^2,$ $\Omega = 47^\circ 8' 45'',40 + 4266'',75\,t + 0'',626\,t^2,$ $e = 0,20561421 + 0,00002046\,t - 0,000000030\,t^2,$ $i = 7^\circ 0' 10'',37 + 6'',699\,t - 0'',066\,t^2,$ $n = 14732'',4197$ $a = 0,38709850$	**木星** $L = 238^\circ 2' 57'',32 + 10930687'',148\,t + 1'',20486\,t^2 - 0'',005936\,t^3,$ $\varpi = 12^\circ 43' 15'',34 + 5795'',862\,t + 3'',80258\,t^2 - 0'',01236\,t^3,$ $\Omega = 99^\circ 26' 36'',19 + 3637'',908\,t + 1'',2680\,t^2 - 0'',03064\,t^3,$ $e = 0,04833475 + 0,000164180\,t - 0,0000004676\,t^2 - 0,0000000017\,t^3$ $i = 1^\circ 18' 31'',45 - 20'',506\,t + 0'',014\,t^2,$ $n = 299'',1283$ $a = 5,202561$
金星 $L = 342^\circ 46' 1'',39 + 210669162'',88\,t + 1'',1148\,t^2,$ $\varpi = 130^\circ 9' 49'',8 + 5068'',93\,t - 3'',515\,t^2,$ $\Omega = 75^\circ 46' 46'',73 + 3239'',46\,t + 1'',476\,t^2,$ $e = 0,00682069 - 0,00004774\,t + 0,000000091\,t^2,$ $i = 3^\circ 23' 37'',07 + 3'',621\,t - 0'',0035\,t^2,$ $n = 5767'',6697$ $a = 0,72333162$	**土星** $L = 266^\circ 33' 51'',76 + 4404635'',5810\,t + 1'',16835\,t^2 - 0'',021\,t^3,$ $\varpi = 91^\circ 5' 53'',38 + 7050'',297\,t + 2'',9749\,t^2 + 0'',0166\,t^3,$ $\Omega = 112^\circ 47' 25'',40 + 3143'',5025\,t - 0'',54785\,t^2 - 0'',0191\,t^3,$ $e = 0,05589232 - 0,00034550\,t - 0,000000728\,t^2 + 0,00000000074\,t^3,$ $i = 2^\circ 29' 33'',07 - 14'',108\,t - 0'',05576\,t^2 + 0'',00016\,t^3,$ $n = 120'',4547$ $a = 9,554747$
地球 $L = 99^\circ 41' 48'',04 + 129602768'',13\,t + 1'',089\,t^2,$ $\varpi = 101^\circ 13' 15'',0 + 6189'',03\,t + 1'',63\,t^2 + 0'',012\,t^3,$ $e = 0,01675104 - 0,00004180\,t - 0,000000126\,t^2,$ $n = 3548'',19281$ $a = 1,00000023$	**天王星** $L = 244^\circ 11' 50'',89 + 1547508'',785\,t + 1'',13774\,t^2 - 0'',002176\,t^3,$ $\varpi = 171^\circ 32' 55'',14 + 5343'',958\,t + 0'',8539\,t^2 - 0'',00218\,t^3,$ $\Omega = 73^\circ 28' 37'',55 + 1795'',204\,t + 4'',722\,t^2,$ $e = 0,0463444 - 0,00002658\,t + 0,000000077\,t^2,$ $i = 0^\circ 46' 20'',87 + 2'',251\,t + 0'',1422\,t^2,$ $n = 42'',2309$ $a = 19,21814$
火星 $L = 293^\circ 44' 51'',46 + 68910117'',33\,t + 1'',1184\,t^2,$ $\varpi = 334^\circ 13' 5'',53 + 6626'',73\,t + 0'',4675\,t^2 - 0'',0043\,t^3,$ $\Omega = 48^\circ 47' 11'',19 + 2775'',57\,t - 0'',005\,t^2 - 0'',0192\,t^3,$ $e = 0,09331290 + 0,000092064\,t - 0,000000077\,t^2,$ $i = 1^\circ 51' 1'',20 - 2'',430\,t + 0'',0454\,t^2,$ $n = 1886'',5182$ $a = 1,5236884$	**海王星** $L = 84^\circ 27' 28'',78 + 791589'',291\,t + 1'',15374\,t^2 - 0'',002176\,t^3,$ $\varpi = 46^\circ 43' 38'',37 + 5128'',468\,t + 1'',40694\,t^2 - 0'',002176\,t^3,$ $\Omega = 130^\circ 40' 52'',89 + 3956'',166\,t + 0'',89952\,t^2 - 0'',016984\,t^3,$ $e = 0,00899704 + 0,000006330\,t - 0,000000002\,t^2,$ $i = 1^\circ 46' 45'',27 - 34'',357\,t - 0'',0328\,t^2,$ $n = 21'',5349$ $a = 30,10957$

XXX. 1956 年 1 月 1 日前，出现两次经人观测过的周期彗星

符号的意义见 § 86 表内 q' 表远日距

序数	名称	P	e	q	q'	T	ω	Ω	i	春分点
1	Encke	3,30	0,847	0,34	4,09	1954 7 2	185°	335°	12°,4	1950
2	Grigg-Skjellerup	4,90	0,704	0,86	4,92	1952 3 11	356	215	17,6	1950
3	Honda-Mrkos-Pajdusakova	5,21	0,815	0,56	5,46	1954 2 6	184	233	13,2	1950
4	Tempel (2)	5,30	0,543	1,14	4,94	1951 10 25	191	119	12,4	1950
5	Neujmin (2)	5,43	0,567	1,34	4,84	1927 1 16	194	328	10,6	1950
6	Brorsen	5,46	0,810	0,59	5,61	1879 3 31	15	101	29,4	1880
7	Tuttle-Giacobini-Kresák	5,49	0,641	1,12	5,11	1951 5 9	38	166	13,8	1951
8	Temple-L. Swift	5,68	0,638	1,15	5,21	1908 10 1	114	290	5,4	1910
9	De Vico-E. Swift	5,86	0,572	1,39	5,11	1894 10 12	297	49	3,0	1900
10	Temple (1)	5,98	0,463	1,77	4,82	1879 5 7	159	79	9,8	1879
11	Pons - Winnecke	6,12	0,654	1,16	5,54	1951 9 9	170	94	21,7	1950
12	Kopff	6,18	0,556	1,49	5,24	1951 10 20	32	253	7,2	1950
13	Forbes	6,42	0,553	1,55	5,36	1948 9 16	260	25	4,6	1950
14	Perrine (1)-Mrkos	6,47	0,668	1,15	5,79	1955 9 27	168	243	15,9	1950
15	Wolf (2) - Harrington	6,51	0,541	1,60	5,37	1952 2 6	187	254	18,5	1951
16	Schwassmann-Wachmann (2)	6,53	0,385	2,15	4,84	1955 2 27	358	126	3,7	1950
17	Giacobini-Zinner	6,59	0,717	1,00	6,03	1946 9 18	172	196	30,7	1946
18	Reinmuth (2)	6,59	0,469	1,87	5,17	1954 3 27	44	297	7,1	1950
19	Biela (noyau 1)	6,62	0,756	0,86	6,19	1852 9 24	223	246	12,6	1852
	Biela (noyau 2)	6,62	0,756	0,86	6,19	1852 9 23	223	246	12,6	1852
20	Daniel	6,66	0,586	1,46	5,82	1950 8 24	7	70	19,7	1950
21	Wirtanen	6,68	0,542	1,63	5,47	1954 8 13	344	86	13,4	1950
22	d'Arrest	6,70	0,612	1,38	5,73	1950 6 6	174	144	18,0	1950
23	Finlay	6,81	0,708	1,05	6,14	1953 12 25	321	45	3,4	1950
24	Holmes	6,86	0,412	2,12	5,10	1906 3 14	14	332	20,8	1900
25	Brooks (2)	6,93	0,487	1,87	5,40	1953 8 7	196	178	5,6	1950
26	Borrelly (1)	7,01	0,605	1,45	5,88	1953 6 14	351	76	31,1	1950
27	Faye	7,41	0,565	1,65	5,95	1955 3 3	201	206	10,6	1950
28	Whipple	7,42	0,356	2,45	5,16	1955 11 29	190	189	10,2	1950
29	Ashbrook-Jakson	7,51	0,394	2,32	5,34	1956 4 5	349	2	12,5	1950
30	Reinmuth (1)	7,69	0,477	2,04	5,75	1950 7 23	13	124	8,4	1950
31	Oterma	7,92	0,143	3,41	4,54	1950 7 15	355	155	4,0	1950
32	Schaumasse	8,17	0,706	1,19	6,92	1952 2 10	52	86	12,0	1950
33	Wolf (1)	8,42	0,396	2,50	5,78	1950 10 23	161	204	27,3	1950
34	Comas Solá	8,55	0,578	1,77	6,60	1952 9 10	40	63	13,5	1950
35	Väisälä	10,53	0,635	1,75	7,85	1949 11 10	44	135	11,3	1950
36	Neujmin (3)	10,95	0,588	2,03	7,83	1951 5 28	145	156	3,8	1950
37	Gale	10,99	0,761	1,18	8,70	1938 6 18	209	67	11,7	1950
38	Tuttle	13,61	0,821	1,02	10,37	1939 11 10	207	270	54,7	1950
39	Schwassmann-Wachmann (1)	16,16	0,136	5,52	7,25	1941 6 9	356	322	9,5	1950
40	Neujmin (1)	17,93	0,774	1,55	12,16	1948 12 15	347	347	15,0	1948
41	Crommelin	27,90	0,919	0,74	17,65	1928 11 4	196	250	28,9	1928
42	Coggia-Stephan	38,96	0,861	1,60	21,39	1942 12 19	358	78	17,9	1943
43	Westphal	61,73	0,920	1,25	29,99	1913 11 26	57	347	40,9	1913
44	Brorsen-Metcalf	69,06	0,971	0,48	33,18	1919 10 17	130	311	19,2	1925
45	Pons-Brooks	70,88	0,955	0,77	33,48	1954 5 22	199	255	74,1	1950
46	Olbers	72,41	0,931	1,20	33,55	1887 10 8	65	85	44,6	1950
47	Halley	76,03	0,967	0,59	35,30	1910 4 20	112	57	162,2	1910
48	C. Herschel-Rigollet	156,04	0,974	0,75	57,22	1939 8 9	29	355	64,2	1939

XXXI. 开普勒运动表

表 A：偏近点角

M	e = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0°	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00	0°00
5	5,26	5,55	5,88	6,25	6,66	7,13	7,68	8,31	9,06	9,95	11,09	12,36	14,03	16,17	18,97	22,66	27,45	33,34	39,96	46,69
10	10,52	11,10	11,75	12,46	13,29	14,22	15,29	16,51	17,94	19,62	21,60	23,96	26,78	30,14	34,08	38,59	43,56	48,80	54,08	59,23
15	15,78	16,64	17,60	18,67	19,87	21,22	22,76	24,51	26,51	28,80	31,43	34,44	37,86	41,66	45,81	50,23	54,79	59,37	63,87	68,20
20	21,03	22,16	23,41	24,81	26,36	28,09	30,04	32,22	34,66	37,40	40,44	43,79	47,42	51,30	55,38	59,49	63,64	67,71	71,67	75,46
25	26,27	27,66	29,19	30,88	32,75	34,81	37,10	39,61	42,38	45,40	48,66	52,14	55,80	59,59	63,44	67,28	71,07	74,75	78,30	81,69
30	31,50	33,13	34,92	36,88	39,02	41,36	43,91	46,75	49,65	52,83	56,18	59,01	63,26	66,89	70,51	74,08	77,56	80,92	84,15	87,23
35	36,71	38,57	40,59	42,78	45,16	47,72	50,47	53,40	56,50	59,75	63,10	66,53	70,00	73,44	76,84	80,16	83,32	86,47	89,43	92,25
40	41,91	43,98	46,20	48,59	51,16	53,89	56,78	59,81	62,97	66,21	69,51	72,85	76,16	79,43	82,62	85,71	88,69	91,55	94,28	96,88
45	47,10	49,35	51,75	54,31	57,02	59,87	62,84	65,92	69,08	72,29	75,51	78,71	81,87	84,95	87,94	90,83	93,61	96,28	98,79	101,20
50	52,27	54,67	57,23	59,92	62,72	65,66	68,68	71,77	74,89	78,02	81,14	84,20	87,20	90,12	92,92	95,62	98,20	100,67	103,03	105,27
55	57,41	59,96	62,63	65,42	68,31	71,28	74,31	77,38	80,42	83,46	86,45	89,38	92,21	94,96	97,59	100,12	102,54	104,84	107,04	109,13
60	62,54	65,20	67,97	70,82	73,73	76,73	79,73	82,73	85,71	88,64	91,50	94,28	96,97	99,55	102,03	104,40	106,66	108,81	110,86	112,81
65	67,65	70,40	73,23	76,12	79,06	82,02	84,98	87,90	90,76	93,59	96,32	98,96	101,50	103,93	106,25	108,47	110,59	112,60	114,52	116,34
70	72,74	75,55	78,42	81,33	84,25	87,17	90,05	92,89	95,66	98,34	100,94	103,44	105,83	108,12	110,30	112,36	114,36	116,25	118,17	119,75
75	77,80	80,65	83,54	86,44	89,32	92,16	94,96	97,71	100,36	102,93	105,36	107,74	110,01	112,15	114,20	116,15	118,00	119,76	121,44	123,03
80	82,84	85,71	88,59	91,45	94,28	97,06	99,76	102,38	104,91	107,36	109,67	111,90	114,02	116,04	117,96	119,76	121,52	123,17	124,73	126,22
85	87,86	90,73	93,58	96,39	99,14	101,82	104,42	106,93	109,33	111,63	113,83	115,92	117,91	119,80	121,60	123,31	124,93	126,47	127,93	129,32
90	92,88	95,70	98,50	101,24	103,90	106,48	108,86	111,35	113,62	115,79	117,88	119,82	121,69	123,46	125,14	126,73	128,25	129,68	131,05	132,35
95	97,84	100,63	103,36	106,01	108,58	111,04	113,40	115,66	117,81	119,85	121,79	123,63	125,37	127,02	128,59	130,07	131,48	132,82	134,09	135,30
100	102,79	105,52	108,17	110,72	113,17	115,51	117,75	119,87	121,89	123,80	125,62	127,33	128,96	130,50	131,96	133,34	134,65	135,89	137,07	138,19
105	107,73	110,37	112,92	115,36	117,68	119,90	122,00	124,00	125,89	127,82	129,36	130,98	132,47	133,90	135,25	136,53	137,75	138,90	139,99	141,03
110	112,64	115,18	117,62	119,93	122,13	124,21	126,19	128,05	129,81	131,47	133,03	134,51	135,91	137,23	138,48	139,67	140,79	141,85	142,86	143,82
115	117,54	119,96	122,27	124,45	126,51	128,46	130,30	132,02	133,65	135,19	136,64	138,00	139,29	140,51	141,66	142,76	143,78	144,76	145,69	146,57
120	122,42	124,71	126,88	128,92	130,84	132,64	134,34	135,94	137,44	138,85	140,18	141,43	142,61	143,73	144,78	145,78	146,72	147,62	148,47	149,27
125	127,28	129,43	131,44	133,33	135,11	136,77	138,33	139,79	141,17	142,46	143,67	144,81	145,89	146,90	147,86	148,77	149,63	150,44	151,21	151,95
130	132,12	134,11	135,97	137,71	139,33	140,85	142,27	143,60	144,85	146,01	147,11	148,14	149,12	150,03	150,90	151,72	152,49	153,23	153,92	154,59
135	136,96	138,78	140,47	142,05	143,52	144,89	146,17	147,36	148,48	149,53	150,51	151,44	152,31	153,13	153,90	154,64	155,33	155,99	156,61	157,20
140	141,77	143,41	144,94	146,35	147,66	148,88	150,02	151,08	152,07	153,00	153,88	154,69	155,46	156,19	156,87	157,52	158,14	158,72	159,27	159,79
145	146,58	148,03	149,38	150,62	151,77	152,84	153,84	154,77	155,64	156,45	157,21	157,92	158,59	159,23	159,82	160,38	160,92	161,43	161,91	162,36
150	151,37	152,63	153,79	154,87	155,86	156,78	157,63	158,43	159,17	159,86	160,51	161,12	161,70	162,24	162,75	163,23	163,66	164,11	164,52	164,91
155	156,16	157,22	158,19	159,09	159,92	160,69	161,40	162,06	162,68	163,25	163,79	164,30	164,76	165,23	165,65	166,06	166,43	166,79	167,13	167,45
160	160,94	161,79	162,57	163,29	163,96	164,57	165,14	165,67	167,17	166,63	167,06	167,46	167,84	168,20	168,54	168,86	169,18	169,45	169,72	169,97
165	165,71	166,35	166,94	167,48	167,98	168,44	168,87	169,27	169,64	169,98	170,31	170,61	170,89	171,16	171,41	171,66	171,88	172,09	172,30	172,49
170	170,48	170,91	171,30	171,66	171,99	172,30	172,59	172,85	173,10	173,33	173,54	173,75	173,93	174,11	174,28	174,44	174,58	174,73	174,87	175,00
175	175,24	175,46	175,65	175,83	176,00	176,15	176,30	176,43	176,55	176,67	176,77	176,87	176,97	177,06	177,14	177,22	177,30	177,37	177,44	177,50
180	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00

XXXI. 开普勒运动表

表 B. 真近点角

M	e=0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00
5	6,14	7,65	9,71	12,67	17,15	24,43	37,36	62,01	105,09	180,00
10	12,27	15,25	19,30	25,00	33,34	45,99	65,31	92,81	126,34	180,00
15	18,37	22,76	28,64	36,71	47,95	63,59	84,33	109,17	136,16	180,00
20	24,43	30,15	37,66	47,61	60,76	77,58	97,64	119,49	142,24	180,00
25	30,45	37,38	46,27	57,63	71,85	88,76	107,47	126,76	146,57	180,00
30	36,41	44,42	54,44	66,77	81,41	97,84	115,08	132,34	149,89	180,00
35	42,30	51,56	62,16	75,07	89,71	105,38	121,23	136,78	152,57	180,00
40	48,11	57,88	69,42	82,60	96,96	111,76	126,34	140,47	154,82	180,00
45	53,85	64,27	76,24	89,46	103,35	117,28	130,71	143,63	156,76	180,00
50	59,50	70,44	82,65	95,72	109,05	122,09	134,50	146,37	158,46	180,00
55	65,06	76,38	88,67	101,45	114,17	126,37	137,86	148,81	159,98	180,90
60	70,53	82,10	94,34	106,75	118,82	130,22	140,88	151,01	161,35	180,00
65	75,90	87,60	99,68	111,64	123,06	133,72	143,62	153,00	162,60	180,00
70	81,18	92,91	104,74	116,20	126,98	136,93	146,12	154,83	163,76	180,00
75	86,36	98,03	109,52	120,46	130,61	139,90	148,44	156,53	164,84	180,00
80	91,46	102,96	114,07	124,47	133,99	142,66	150,60	158,12	165,85	180,00
85	96,47	107,73	118,40	128,25	137,17	145,25	152,63	159,61	166,80	180,00
90	101,39	112,34	122,54	131,83	140,18	147,69	154,54	161,02	167,70	180,00
95	106,22	116,81	126,51	135,24	143,03	150,00	156,36	162,36	168,56	180,00
100	110,98	121,14	130,32	138,49	145,74	152,20	158,08	163,64	169,38	180,00
105	115,66	125,36	134,00	141,62	148,33	154,30	159,73	164,86	170,17	180,00
110	120,27	129,46	137,55	144,62	150,82	156,32	161,32	166,04	170,93	180,00
115	124,82	133,46	140,96	147,52	153,22	158,27	162,85	167,18	171,68	180,00
120	129,30	137,37	144,33	150,33	155,54	160,15	164,33	168,26	172,38	180,00
125	133,72	141,20	147,58	153,05	157,79	161,98	165,77	169,35	173,07	180,00
130	138,10	144,95	150,75	155,71	159,99	163,76	167,17	170,40	173,75	180,00
135	142,42	148,63	153,86	158,30	162,13	165,49	168,54	171,42	174,41	180,00
140	146,71	152,26	156,91	160,84	164,22	167,19	169,88	172,42	175,06	180,00
145	150,95	155,84	159,90	163,33	166,27	168,86	171,19	173,41	175,70	180,00
150	155,16	159,37	162,85	165,78	168,29	170,50	172,49	174,37	176,33	180,00
155	159,34	162,86	165,76	168,20	170,29	172,11	173,77	175,33	176,96	180,00
160	163,50	166,33	168,65	170,59	172,26	173,71	175,03	176,28	177,57	180,00
165	167,64	169,77	171,51	172,96	174,21	175,30	176,28	177,21	178,18	180,00
170	171,77	173,19	174,35	175,32	176,14	176,87	177,53	178,15	178,79	180,00
175	175,89	176,60	177,18	177,66	178,07	178,44	178,76	179,07	179,40	180,00
180	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00	180,00

XXXII. 抛物线运动

表 A

$s = \tang \frac{v}{2}$

𝔐	s	Δ	𝔐	s	Δ	𝔐	s	Δ	𝔐	s	Δ
0,0	0,0000 000	66666	25,0	0,3221 854	60290	50,0	0,5960 716	49084	75,0	0,8177 317	39873
0,5	0066 666	66659	25,5	3282 144	60076	50,5	6009 800	48871	75,5	8217 190	39719
1,0	0133 325	66648	26,0	3342 220	59859	51,0	6058 671	48661	76,0	8256 909	39563
1,5	0199 973	66630	26,5	3402 079	59642	51,5	6107 332	48451	76,5	8296 472	39411
2,0	0266 603	66607	27,0	3461 721	59423	52,0	6155 783	48242	77,0	8335 883	39259
2,5	0333 210	66577	27,5	3521 144	59203	52,5	6204 025	48035	77,5	8375 142	39107
3,0	0399 787	66542	28,0	3580 347	58980	53,0	6252 060	47828	78,0	8414 249	38957
3,5	0466 329	66500	28,5	3639 327	58758	53,5	6299 888	47623	78,5	8453 206	38808
4,0	0532 829	66454	29,0	3698 085	58535	54,0	6347 511	47418	79,0	8492 014	38660
4,5	0599 283	66400	29,5	3756 620	58309	54,5	6394 929	47215	79,5	8530 674	38513
5,0	0665 683	66343	30,0	3814 929	58084	55,0	6442 144	47013	80,0	8569 187	38367
5,5	0732 026	66278	30,5	3873 013	57858	55,5	6489 157	46812	80,5	8607 554	38223
6,0	0798 304	66209	31,0	3930 871	57630	56,0	6535 969	46612	81,0	8645 777	38078
6,5	0864 513	66134	31,5	3988 501	57403	56,5	6582 581	46413	81,5	8683 855	37935
7,0	0930 647	66053	32,0	4045 904	57175	57,0	6628 994	46216	82,0	8721 790	37792
7,5	0996 700	65967	32,5	4103 079	56946	57,5	6675 210	46020	82,5	8759 582	37652
8,0	1062 667	65875	33,0	4160 025	56717	58,0	6721 230	45824	83,0	8797 234	37512
8,5	1128 542	65779	33,5	4216 742	56487	58,5	6767 054	45630	83,5	8834 746	37373
9,0	1194 321	65678	34,0	4273 229	56258	59,0	6812 684	45437	84,0	8872 119	37234
9,5	1259 999	65570	34,5	4329 487	56028	59,5	6858 121	45245	84,5	8909 353	37098
10,0	1325 569	65459	35,0	4385 515	55798	60,0	6893 366	45065	85,0	8946 451	36961
10,5	1391 028	65342	35,5	4441 313	55568	60,5	6948 421	44865	85,5	8983 412	36825
11,0	1456 370	65221	36,0	4496 881	55338	61,0	6993 286	44677	86,0	9020 237	36692
11,5	1521 591	65094	36,5	4552 219	55108	61,5	7037 963	44490	86,5	9056 929	36558
12,0	1586 685	64963	37,0	4607 327	54878	62,0	7082 453	44304	87,0	9093 487	36425
12,5	1651 648	64828	37,5	4662 205	54649	62,5	7126 757	44120	87,5	9129 912	36293
13,0	1716 476	64688	38,0	4716 854	54419	63,0	7170 877	43935	88,0	9166 205	36163
13,5	1781 164	64544	38,5	4771 273	54189	63,5	7214 812	43753	88,5	9202 368	36033
14,0	1845 708	64395	39,0	4825 462	53961	64,0	7258 565	43572	89,0	9238 401	35904
14,5	1910 103	64243	39,5	4879 423	53732	64,5	7302 137	43392	89,5	9274 305	35776
15,0	1974 346	64087	40,0	4933 155	53505	65,0	7345 529	43213	90,0	9310 081	35649
15,5	2038 433	63926	40,5	4986 660	53276	65,5	7388 742	43035	90,5	9345 730	35522
16,0	2102 359	63762	41,0	5039 936	53049	66,0	7431 777	42859	91,0	9381 252	35397
16,5	2166 121	63595	41,5	5092 985	52823	66,5	7474 636	42683	91,5	9416 649	35273
17,0	2229 716	63423	42,0	5145 808	52597	67,0	7517 319	42509	92,0	9451 922	35148
17,5	2293 139	63248	42,5	5198 405	52371	67,5	7559 828	42335	92,5	9487 070	35026
18,0	2356 387	63070	43,0	5250 776	52146	68,0	7602 163	42164	93,0	9522 096	34903
18,5	2419 457	62889	43,5	5302 922	51922	68,5	7644 327	41993	93,5	9556 999	34782
19,0	2482 346	62704	44,0	5354 844	51699	69,0	7686 320	41823	94,0	9591 781	34662
19,5	2545 050	62517	44,5	5406 543	51476	69,5	7728 143	41654	94,5	9626 443	34542
20,0	2607 567	62327	45,0	5458 019	51254	70,0	7769 797	41488	95,0	9660 985	34423
20,5	2669 894	62133	45,5	5509 273	51034	70,5	7811 285	41320	95,5	9695 408	34306
21,0	2732 027	61938	46,0	5560 307	50812	71,0	7852 605	41156	96,0	9729 714	34187
21,5	2793 965	61740	46,5	5611 119	50594	71,5	7893 761	40991	96,5	9763 901	34072
22,0	2855 705	61539	47,0	5661 713	50375	72,0	7934 752	40829	97,0	9797 973	33956
22,5	2917 244	61337	47,5	5712 088	50157	72,5	7975 581	40666	97,5	9831 929	33841
23,0	2978 581	61131	48,0	5762 245	49940	73,0	8016 247	40506	98,0	9865 770	33727
23,5	3039 712	60924	48,5	5812 185	49725	73,5	8056 753	40346	98,5	9899 497	33613
24,0	3100 636	60714	49,0	5861 910	49510	74,0	8097 099	40188	99,0	9933 110	33501
24,5	3161 350	60504	49,5	5911 420	49296	74,5	8137 287	40030	99,5	0,9966 611	33389
25,0	0,3221 854		50,0	0,5960 716		75,0	0,8177 317		100,0	1,0000 000	

XXXII. 抛物线运动

表 A （续）

$s = \mathrm{tang}\,\frac{v}{2}$

𝔐	s	
100,0	1,0000 000	33278
100,5	0033 278	33167
101,0	0066 445	33058
101,5	0099 503	32949
102,0	0132 452	32841
102,5	0165 293	32733
103,0	0198 026	32627
103,5	0230 653	32520
104,0	0263 173	32415
104,5	0295 588	32311
105,0	0327 899	32206
105,5	0360 105	32103
106,0	0392 208	32000
106,5	0424 208	31899
107,0	0456 107	31797
107,5	0487 904	31696
108,0	0519 600	31597
108,5	0551 197	31497
109,0	0582 694	31398
109,5	0614 092	31300
110,0	0645 392	31203
110,5	0676 595	31106
111,0	0707 701	31009
111,5	0738 710	30914
112,0	0769 624	30819
112,5	0800 443	30725
113,0	0831 168	30630
113,5	0861 798	30538
114,0	0892 336	30445
114,5	0922 781	30353
115,0	0953 134	30261
115,5	0983 395	30170
116,0	1013 565	30081
116,6	1043 646	29990
117,0	1073 636	29901
117,5	1103 537	29813
118,0	1133 350	29724
118,5	1163 074	29637
119,0	1192 711	29550
119,5	1222 261	29463
120,0	1251 724	29377
120,5	1281 101	29292
121,0	1310 393	29207
121,5	1339 600	29123
122,0	1368 723	29039
122,5	1397 762	28955
123,0	1426 717	28873
123,5	1455 590	28790
124,0	1484 380	28708
124,5	1513 088	28627
125,0	1,1541 715	

𝔐	s	
125,0	1,1541 715	28546
125,5	1570 261	28466
126,0	1598 727	28385
126,5	1627 112	28307
127,0	1655 419	28227
127,5	1683 646	28149
128,0	1711 795	28070
128,5	1739 865	27994
129,0	1767 859	27916
129,5	1795 775	27839
130,0	1823 614	27763
130,5	1851 377	27688
131,0	1879 065	27612
131,5	1906 677	27537
132,0	1934 214	27462
132,5	1961 676	27389
133.0	1989 065	27315
133,5	2016 380	27242
134,0	2043 622	27169
134,5	2070 791	27097
135,0	2097 888	27025
135,5	2124 913	26953
136,0	2151 866	26883
136,5	2178 749	26811
137,0	2205 560	26742
137,5	2232 302	26671
138,0	2258 973	26602
138,5	2285 575	26533
139,0	2312 108	26464
139,5	2338 572	26395
140,0	2364 967	26328
140,5	2391 295	26260
141,0	2417 555	26193
141,5	2443 748	26126
142.0	2469 874	26060
142.5	2495 934	25994
143,0	2521 928	25928
143,5	2547 856	25862
144,0	2573 718	25798
144,5	2599 516	25732
145,0	2625 248	25669
145,5	2650 917	25605
146,0	2676 522	25541
146,5	2702 063	25477
147,0	2727 540	25415
147,5	2752 955	25352
148,0	2778 307	25291
148,5	2803 598	25228
149,0	2828 826	25166
149,5	2853 992	25106
150,0	1,2879 098	

𝔐	s	
150,0	1,2879 098	25044
150,5	2904 142	24984
151,0	2929 126	24923
151,5	2954 049	24864
152,0	2978 913	24804
152,5	3003 717	24744
153,0	3028 461	24686
153,5	3053 147	24627
154,0	3077 774	24569
154,5	3102 343	24510
155,0	3126 853	24453
155,5	3151 306	24395
156,0	3175 701	24338
156,5	3200 039	24281
157,0	3224 320	24225
157,5	3248 545	24168
158,0	3272 713	24112
158,5	3296 825	24056
159,0	3320 881	24001
159,5	3344 882	23946
160,0	3368 828	23891
160,5	3392 719	23837
161,0	3416 556	23782
161,5	3440 338	23728
162,0	3464 066	23674
162,5	3487 740	23621
163,0	3511 361	23567
163,5	3534 928	23515
164,0	3558 443	23462
164,5	3581 905	23409
165,0	3605 314	23357
165,5	3628 671	23305
166,0	3651 976	23254
166,5	3675 230	23202
167,0	3698 432	23151
167,5	3721 583	23100
168,0	3744 683	23050
168,5	3767 733	22999
169,0	3790 732	22949
169,5	3813 681	22899
170,0	3836 580	22849
170,5	3859 429	22800
171,0	3882 229	22750
171,5	3904 979	22702
172,0	3927 681	22653
172,5	3950 334	22604
173,0	3972 938	22557
173,5	3995 495	22508
174,0	4018 003	22460
174,5	4040,463	22413
175,0	1.4062 876	

𝔐	s	
175.0	1.4062 876	22365
175,5	4085 241	22319
176,0	4107 560	22271
176,5	4129 831	22225
177.0	4152 056	22178
177,5	4174 234	22132
178,0	4196 366	22086
178,5	4218 452	22040
179,0	4240 492	21995
179,5	4262 487	21949
180,0	4284 436	21904
180,5	4306 340	21859
181,0	4328 199	21814
181.5	4350 013	21770
182,0	4371 783	21725
182.5	4393 508	21682
183,0	4415 190	21637
183.5	4436 827	21593
184,0	4458 420	21551
184,5	4479 971	21506
185,0	4501 477	21464
185,5	4522 941	21420
186,0	4544 361	21378
186,5	4565 739	21335
187,0	4587 074	21293
187.5	4608 367	21251
188.0	4629 618	21209
188.5	4650 827	21167
189,0	4671 994	21125
189,5	4693 119	21084
190,0	4714 203	21042
190.5	4735 245	21002
191,0	4756 247	20961
191,5	4777 208	20920
192.0	4798 128	20879
192.5	4819 007	20839
193.0	4839 846	20799
193,5	4860 645	20759
194.0	4881 404	20719
194,5	4902 123	20679
195,0	4922 802	20640
195,5	4943 442	20601
196,0	4964 043	20561
196,5	4984 604	20523
197,0	5005 127	20484
197,5	5025 611	20445
198,0	5046 056	20406
198,5	5066 462	20369
199,0	5086 831	20330
199,5	5107 161	20292
200,0	1,5127 453	

XXXIII. 抛物线运动

表 B($v>108°.55$)

$$\sigma=\cot\frac{V'}{2}$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}}}$	σ		$\frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}}}$	σ		$\frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}}}$	σ		$\frac{1}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}}}$	σ	
0,000	0,0000 000	29240	0,050	0,1493 936	31224	0,100	0,3196 601	37992	0,150	0,5411 976	52630
1	0029 240	29242	1	1525 160	31306	1	3234 593	38194	1	5464 606	53038
2	0058 482	29245	2	1556 466	31391	2	3272 787	38397	2	5517 644	53453
3	0087 727	29250	3	1587 857	31476	3	3311 184	38604	3	5571 097	53872
4	0116 977	29255	4	1619 333	31565	4	3349 788	38814	4	5624 969	54298
0,005	0146 232	29263	0,055	1650 898	31654	0,105	3388 602	39028	0,155	5679 267	54728
6	0175 495	29272	6	1682 552	31746	6	3427 630	39244	6	5733 995	55166
7	0204 767	29282	7	1714 298	31840	7	3466 874	39464	7	5789 161	55607
8	0234 049	29295	8	1746 138	31936	8	3506 338	39688	8	5844 768	56056
9	0263 344	29308	9	1778 074	32033	9	3546 026	39913	9	5900 824	56510
0,010	0292 652	29323	0,060	1810 107	32133	0,110	3585 939	40144	0,160	5957 334	56970
1	0321 975	29340	1	1842 240	32234	1	3626 083	40377	1	6014 304	57436
2	0351 315	29357	2	1874 474	32338	2	3666 460	40614	2	6071 740	57908
3	0380 672	29378	3	1906 812	32444	3	3707 074	40854	3	6129 648	58386
4	0410 050	29398	4	1939 256	32552	4	3747 928	41097	4	6188 034	58870
0,015	0439 448	29421	0,065	1971 808	32661	0.115	3789 025	41345	0.165	6246 904	59361
6	0468 869	29445	6	2004 469	32773	6	3830 370	41597	6	6306 265	59857
7	0498 314	29471	7	2037 242	32888	7	3871 967	41851	7	6366 122	60361
8	0527 785	29498	8	2070 130	33003	8	3913 818	42109	8	6426 483	60870
9	0557 283	29527	9	2103 133	33122	9	3955 927	42371	9	6487 353	61386
0,020	0586 810	29558	0,070	2136 255	33242	0.120	3998 298	42638	0.170	6548 739	61909
1	0616 368	29589	1	2169 497	33366	1	4040 936	42907	1	6610 648	62437
2	0645 957	29623	2	2202 863	33490	2	4083 843	43182	2	6673 085	62973
3	0675 580	29657	3	2236 353	33617	3	4127 025	43458	3	6736 058	63515
4	0705 237	29695	4	2269 970	33747	4	4170 483	43741	4	6799 573	64063
0,025	0734 932	29732	0,075	2303 717	33878	0,125	4214 224	44026	0.175	6863 636	64620
6	0764 664	29772	6	2337 595	34013	6	4258 250	44316	6	6928 256	65181
7	0794 436	29814	7	2371 608	34148	7	4302 566	44610	7	6993 437	65752
8	0824 250	29856	8	2405 756	34288	8	4347 176	44909	8	7059 189	66327
9	0854 106	29902	9	2440 044	34429	9	4392 085	45210	9	7125 516	66910
0,030	0884 008	29947	0,080	2474 473	34572	0.130	4437 295	45517	0.180	0.7192 426	
1	0913 955	29995	1	2509 045	34719	1	4482 812	45829			
2	0943 950	30044	2	2543 764	34866	2	4528 641	46143			
3	0973 994	30096	3	2578 630	35018	3	4574 784	46464			
4	1004 090	30148	4	2613 648	35171	4	4621 248	46787			
0,035	1034 238	30203	0.085	2648 819	35328	0.135	4668 035	47117			
6	1064 441	30258	6	2684 147	35485	6	4715 152	47450			
7	1094 699	30316	7	2719 632	35647	7	4762 602	47788			
8	1125 015	30377	8	2755 279	35811	8	4810 390	48130			
9	1155 392	30436	9	2791 090	35977	9	4858 520	48479			
0,040	1185 828	30500	0,090	2827 067	36147	0.140	4906 999	48830			
1	1216 328	30564	1	2863 214	36318	1	4955 829	49188			
2	1246 892	30630	2	2899 532	36493	2	5005 017	49550			
3	1277 522	30698	3	2936 025	36670	3	5054 567	49916			
4	1308 220	30768	4	2972 695	36850	4	5104 483	50289			
0,045	1338 988	30840	0,095	3009 545	37034	0.145	5154 772	50666			
6	1369 828	30912	6	3046 579	37219	6	5205 438	51048			
7	1400 740	30988	7	3083 798	37408	7	5256 486	51436			
8	1431 728	31065	8	3121 208	37600	8	5307 922	51828			
9	1462 793	31143	0,099	3158 806	37795	9	5359 750	52226			
0,050	0,1493 936		0,100	0,3196 601		0,150	0,5411 976				

XXXIV. 近似抛物线轨道

表 C

$s = S + a\lambda + b\lambda^2 + c\lambda^3$ (§ 85)

S	a		b		c
0,00	0,000000	1	0,00000		
1	001	4	0		
2	005	13	0		
3	018	25	0		
4	043	40	0		
5	083	61	0		
6	144	84	0		
7	228	112	0		
8	340	144	0		
9	484	180	0	1	
0,10	0,000664	219	0,00001	0	
1	0883	262	01	1	
2	1145	310	02	1	
3	1455	360	03	1	
4	1815	415	04	1	
5	2230	473	05	2	
6	2703	536	07	3	
7	3239	600	10	3	
8	3839	670	13	4	
9	4509	742	17	5	
0,20	0,005251	819	0,00022	7	
1	06070	898	029	7	
2	06968	980	036	9	
3	07948	1067	045	10	
4	09015	1157	055	12	
5	10172	1249	067	14	
6	11421	1344	081	17	
7	12765	1444	098	18	
8	14209	1546	116	22	
9	15755	1651	138	25	
0,30	0,017406	1758	0,00163	27	0,000
1	19164	1870	190	32	0
2	21034	1983	222	35	0
3	23017	2100	257	40	0
4	25117	2219	297	44	0
5	27336	2341	341	49	0
6	29677	2465	390	55	1
7	32142	2593	445	60	1
8	34735	2723	505	66	1
9	37458	2855	571	73	1
0,40	0,040313	2989	0,00644	79	0,001
1	43302	3127	0723	88	1
2	46429	3267	0811	94	2
3	49696	3409	0905	104	2
4	53105	3553	1009	112	2
5	56658	3700	1121	121	2
6	60358	3848	1242	131	3
7	64206	4000	1373	141	3
8	68206	4152	1514	153	4
9	72358	4309	1667	163	4
0,50	0,076667	4466	0,01830	176	0,005

S	a		b		c	
0,50	0,076667	4465	0,01830	176	0,005	1
1	081132	4626	2006	188	06	0
2	085758	4787	2194	202	06	1
3	090545	4951	2396	215	07	1
4	095496	5117	2611	229	08	1
5	100613	5284	2840	245	09	1
6	105897	5455	3085	260	10	1
7	111352	5626	3345	276	11	1
8	116978	5799	3621	294	12	2
9	122777	5976	3915	311	14	1
0,60	0,128753	6153	0,04226	330	0,015	2
1	134906	6333	4556	348	17	2
2	141239	6513	4904	369	19	2
3	147752	6698	5273	389	21	2
4	154450	6882	5662	410	23	2
5	161332	7070	6072	433	25	2
6	168402	7258	6505	455	27	3
7	175660	7449	6960	479	30	3
8	183109	7642	7439	504	33	3
9	190751	7836	7943	529	36	3
0,70	0,198587	8033	0,08472	555	0,039	4
1	206620	8230	09027	583	43	4
2	214850	8431	09610	610	47	4
3	223281	8633	10220	639	51	4
4	231914	8836	10859	669	55	5
5	240750	9042	11528	700	60	5
6	249792	9249	12228	732	65	5
7	259041	9459	12960	764	70	6
8	268500	9669	13724	798	76	6
9	278169	9883	14522	832	82	7
0,80	0,288052	10097	0,15354	869	0,089	6
1	298149	10315	16223	905	095	8
2	308464	10532	17128	943	103	8
3	318996	10754	18071	981	111	8
4	329750	10975	19052	1022	119	9
5	340725	11200	20074	1063	128	9
6	351925	11425	21137	1105	137	10
7	363350	11654	22242	1149	147	10
8	375004	11884	23391	1193	157	11
9	386888	12115	24584	1239	168	12
0,90	0,399003	12350	0,25823	1286	0,180	12
1	411353	12584	27109	1335	192	13
2	423937	12823	28444	1384	205	14
3	436760	13062	29828	1434	219	14
4	449822	13303	31262	1488	233	15
5	463125	13547	32750	1540	248	16
6	476672	13792	34290	1596	264	17
7	490464	14040	35886	1652	281	18
8	504504	14289	37538	1709	299	19
0,99	518793	14540	39247	1769	318	20
1,00	0,533333	14794	0,41016	1829	0,338	

S	a		b		c	
1,00	0,533333	14794	0,41016	1829	0,338	20
1	0,548127	15049	0,42845	1891	0,358	22
2	0,563176	15306	0,44736	1955	0,380	23
3	0,578482	15566	0,46691	2020	0,403	24
4	0,594048	15827	0,48711	2087	0,427	25
5	0,609875	16091	0,50798	2155	0,452	26
6	0,625966	16356	0,52953	2225	0,478	28
7	0,642322	16623	0,55178	2296	0,506	29
8	0,658945	16894	0,57474	2370	0,535	30
9	0,675839	17164	0,59844	2444	0,565	32
1,10	0,693003	17439	0,62288	2521	0,597	33
1	0,710442	17714	0,64809	2600	0,630	35
2	0,728156	17992	0,67409	2679	0,665	36
3	0,746148	18273	0,70088	2761	0,701	38
4	0,764421	18554	0,72849	2845	0,739	40
5	0,782975	18839	0,75694	2931	0,779	41
6	0,801814	19125	0,78625	3018	0,820	43
7	0,820939	19413	0,81643	3107	0,863	46
8	0,840352	19704	0,84750	3199	0,909	47
9	0,860056	19996	0,87949	3292	0,956	49
1,20	0,880052	20292	0,91241	3387	1,005	51
1	0,900344	20589	0,94628	3485	1,056	54
2	0,920933	20887	0,98113	3584	1,110	56
3	0,941820	21189	1,01697	3685	1,166	58
4	0,963009	21493	1,05382	3789	1,224	60
5	0,984502	21798	1,09171	3895	1,284	63
6	1,006300	22107	1,13066	4003	1,347	66
7	1,028407	22416	1,17069	4113	1,413	69
8	1,050823	22728	1,21182	4225	1,482	71
9	1,073551	23043	1,25407	4340	1,553	74
1,30	1,096594	23360	1,29747	4457	1,627	77
1	1,119954	23678	1,34204	4577	1,704	80
2	1,143632	24000	1,38781	4698	1,784	83
3	1,167632	24323	1,43479	4822	1,867	87
4	1,191955	24648	1,48301	4949	1,954	89
5	1,216603	24977	1,53250	5079	2,043	94
6	1,241580	25306	1,58329	5209	2,137	97
7	1,266886	25638	1,63538	5344	2,234	100
8	1,292524	25973	1,68882	5481	2,334	105
9	1,318497	26310	1,74363	5620	2,439	108
1,40	1,344807	26649	1,79983	5762	2,547	113
1	1,371456	26990	1,85745	5907	2,660	117
2	1,398446	27333	1,91652	6054	2,777	121
3	1,425779	27680	1,97706	6204	2,898	125
4	1,453459	28027	2,03910	6358	3,023	130
5	1,481486	28378	2,10268	6513	3,153	135
6	1,509864	28730	2,16781	6672	3,288	140
7	1,538594	29085	2,23453	6834	3,428	145
8	1,567679	29442	2,30287	6998	3,573	150
9	1,597121	29802	2,37285	7165	3,723	155
1,50	1,626923	30164	2,44450	7337	3,878	161
1	1,657087	30527	2,51787	7510	4,039	166
2	1,687614	30894	2,59297	7686	4,205	172
3	1,718508		2,66983		4,377	

XXXV. 近似抛物线轨道

表 D

$$\cot\frac{v}{2}=\sigma=\Sigma-\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\lambda^2}{\beta}-\frac{\lambda^3}{\gamma}-\ldots \quad (\S\ 85)$$

Σ	α	Δ	β	Δ	γ	Δ
		23283		1985		53
0,20	0,487500	23122	0,14493	2168	0,0245	64
1	0,510622	22956	16661	2359	0309	77
2	0,533578	22787	19020	2552	0386	90
3	0,556365	22613	21572	2750	0476	106
4	0,578978	22437	24322	2951	0582	123
5	0,601415	22258	27273	3155	0705	142
6	0,623673	22076	30428	3362	0847	162
7	0,645749	21893	33790	3572	1009	185
8	0,667642	21707	37362	3781	1194	209
9	0,689349	21521	41143	3995	1403	235
0,30	0.710870	21333	0,45138	4207	0,1638	26
1	0,732203	21146	49345	4421	190	30
2	0,753349	20957	53766	4635	220	32
3	0,774306	20769	58401	4850	252	36
4	0,795075	20582	63251	5063	288	40
5	0,815657	20396	68314	5277	328	44
6	0,836053	20209	73591	5490	372	47
7	0,856262	20025	79081	5702	419	52
8	0,876287	19842	84783	5912	471	57
9	0,896129	19660	90695	6122	528	61
0,40	0,915789	19482	0,96817	6329	0,589	66
1	0,935271	19304	1,03146	6536	0,655	71
2	0,954575	19129	1,09682	6740	0,726	76
3	0,973704	18957	1.16422	6943	0,802	82
4	0,992661	18788	1,23365	7144	0.884	87
5	1,011449	18620	1,30509	7343	0,971	94
6	1,030069	18456	1,37852	7539	1.065	99
7	1,048525	18296	1,45391	7735	1,164	106
8	1,066821	18137	1,53126	7927	1,270	112
9	1,084958	17983	1.61053	8118	1,382	119
0,50	1,102941	17832	1,69171	8307	1,501	125
1	1,120773	17683	1,77478	8494	1,626	133
2	1,138456	17538	1,85972	8679	1,759	139
3	1,155994	17398	1,94651	8862	1,898	147
4	1.173392	17259	2,03513	9043	2,045	154
5	1.190651	17125	2,12556	9222	2.199	162
6	1,207776	16994	2,21778	9400	2,361	170
7	1,224770	16866	2,31178	9576	2.531	177
8	1,241636	16742	2.40754	9751	2,708	186
9	1,258378	16622	2.50505	9923	2.894	194
0,60	1,275000	16504	2,60428	10096	3,088	202
1	1,291504	16391	2,70524	10266	3,290	210
2	1,307895	16280	2,80790	10435	3,500	220
3	1,324175	16174	2,91225	10604	3,720	228
4	1,340349	16069	3,01829	10771	3,948	237
5	1,356418	15969	3,12600	10938	4,185	246
6	1,372387	15872	3,23538	11104	4,431	256
7	1,388259	15777	3,34642	11269	4,686	265
8	1,404036	15687	3,45911	11434	4,951	274
9	1,419723	15598	3,57345	11599	5,225	283
0,70	1,435321	15614	3,68944	11762	5,508	294

XXXVI. 椭圆轨道(高斯方程的解)

$$\gamma^3-\gamma^2-h\gamma-\frac{h}{9}=0$$

h	γ	Δ	h	γ	Δ	h	γ	Δ	ρ	1+3ξ	Δ
0,000	1,000 0000	11098	0,050	1,052 5200	9950	0,100	1,100 0835	9097	0,000	1,000 0000	2
1	1 1098	11070	1	53 5150	9930	1	100 9932	9082	1	002	5
2	2 2168	11044	2	54 5080	9911	2	101 9014	9067	2	007	8
3	3 3212	11017	3	55 4991	9892	3	102 8081	9052	3	015	12
4	4 4229	10991	4	56 4883	9872	4	103 7133	9037	4	027	16
5	5 5220	10965	5	57 4755	9854	5	104 6170	9023	5	043	19
6	6 6185	10938	6	58 4609	9834	6	105 5193	9008	6	062	22
7	7 7123	10913	7	59 4443	9816	7	106 4201	8994	7	084	26
8	8 8036	10887	8	60 4259	9797	8	107 3195	8979	8	110	30
9	9 8923	10862	9	61 4056	9779	9	108 2174	8966	9	140	33
0,010	1,010 9785	10837	0,060	1,062 3835	9760	0,110	1,109 1140	8950	0,010	1,000 0172	37
1	12 0622	10811	1	63 3595	9742	1	110 0090	8937	1	209	40
2	13 1433	10786	2	64 3337	9723	2	110 9027	8922	2	249	43
3	14 2219	10762	3	65 3060	9705	3	111 7949	8909	3	292	47
4	15 2981	10737	4	66 2765	9687	4	112 6858	8894	4	339	50
5	16 3718	10712	5	67 2452	9670	5	113 5752	8881	5	389	54
6	17 4430	10689	6	68 2122	9651	6	114 4633	8866	6	443	57
7	18 5119	10664	7	69 1773	9633	7	115 3499	8853	7	500	61
8	19 5783	10640	8	70 1406	9616	8	116 2352	8839	8	561	65
9	20 6423	10617	9	71 1022	9598	9	117 1191	8826	9	696	68
0,020	1,021 7040	10592	0,070	1,072 0620	9581	0,120	1,118 0017	8811	0,020	1,000 0694	71
1	22 7632	10570	1	73 0201	9563	1	118 8828	8798	1	0765	75
2	23 8202	10546	2	73 9764	9546	2	119 7626	8785	2	0840	79
3	24 8748	10523	3	74 9310	9529	3	120 6411	8771	3	0919	82
4	25 9271	10499	4	75 8839	9512	4	121 5182	8758	4	1001	86
5	26 9770	10477	5	76 8351	9495	5	122 3940	8745	5	1087	90
6	28 0247	10455	6	77 7846	9477	6	123 2685	8731	6	1177	93
7	29 0702	10432	7	78 7323	9461	7	124 1416	8719	7	1270	96
8	30 1134	10409	8	79 6784	9444	8	125 0135	8705	8	1366	100
9	31 1543	10387	9	80 6228	9428	9	125 8840	8692	9	1466	104
0,030	1,032 1930	10365	0,080	1,081 5656	9411	0,130	1,126 7532	8679	0,030	1,000 1570	108
1	33 2295	10343	1	82 5067	9394	1	127 6211	8666	1	1678	111
2	34 2638	10321	2	83 4461	9378	2	128 4877	8653	2	1789	114
3	35 2959	10299	3	84 3839	9362	3	129 3530	8640	3	1903	118
4	36 3258	10278	4	85 3201	9345	4	130 2170	8628	4	2021	122
5	37 3536	10256	5	86 2546	9330	5	131 0798	8614	5	2143	126
6	38 3792	10235	6	87 1876	9313	6	131 9412	8603	6	2269	129
7	39 4027	10214	7	88 1189	9297	7	132 8015	8589	7	2398	133
8	40 4241	10192	8	89 0486	9282	8	133 6604	8577	8	2531	137
9	41 4433	10172	9	89 9768	9265	9	134 5181	8564	9	2668	140
0,040	1,042 4605	10151	0,090	1,090 9033	9250	0,140	1,135 3745	8552	0,040	1,000 2808	144
1	43 4756	10131	1	91 8283	9234	1	136 2297	8540	1	2952	147
2	44 4887	10109	2	92 7517	9218	2	137 0837	8527	2	3099	152
3	45 4996	10090	3	93 6735	9203	3	137 9364	8515	3	3251	155
4	46 5086	10069	4	94 5938	9188	4	138 7879	8503	4	3406	158
5	47 5155	10049	5	95 5128	9172	5	139 6382	8491	5	3564	163
6	48 5204	10029	6	96 4298	9157	6	140 4873	8478	6	3727	166
7	49 5233	10008	7	97 3455	9142	7	141 3351	8466	7	3893	170
8	50 5241	9990	8	98 2597	9127	8	142 1817	8455	8	4063	173
9	51 5231	9969	9	1,099 1724	9111	9	143 0272	8442	9	4236	178
0,050	1,052 5200		0,100	1,100 0835		0,150	1,143 8714		0,050	1,000 4414	

XXXVII．抛物线轨道–奥耳伯斯方法–弦长计算表

φ	f (φ)		φ	f (φ)	
0,00	1,000 0000		0,40	1,007 0291	
1	0042	42	1	07 4060	3769
2	0167	125	2	07 7946	3886
3	0375	208	3	08 1950	4004
4	0667	292	4	08 6075	4125
5	1042	375	5	09 0322	4247
6	1502	460	6	09 4695	4373
7	2045	543	7	09 9195	4500
8	2672	627	8	10 3826	4631
9	3384	712	9	10 8590	4764
0,10	1,000 4180	796	0,50	1,011 3489	4899
1	0 5061	881	1	11 8528	5039
2	0 6027	966	2	12 3710	5182
3	0 7079	1052	3	12 9037	5327
4	0 8217	1138	4	13 4513	5476
5	0 9442	1225	5	14 0143	5630
6	1 0753	1311	6	14 5930	5787
7	1 2152	1399	7	15 1878	5948
8	1 3639	1487	8	15 7993	6115
9	1 5214	1575	9	16 4278	6285
0,20	1,001 6879	1665	0,60	1,017 0739	6461
1	1 8634	1755	1	17 7382	6643
2	2 0479	1845	2	18 4211	6829
3	2 2416	1937	3	19 1235	7014
4	2 4445	2029	4	19 8457	7222
5	2 6567	2122	5	20 5887	7430
6	2 8782	2215	6	21 3531	7644
7	3 1093	2311	7	22 1398	7867
8	3 3499	2406	8	22 9496	8098
9	3 6003	2504	9	23 7834	8338
0,30	1,003 8604	2601	0,70	1,024 6424	8590
1	4 1305	2701	1	25 5275	8851
2	4 4105	2800	2	26 4399	9124
3	4 7008	2903	3	27 3810	9411
4	5 0013	3005	4	28 3522	9712
5	5 3123	3110	5	29 3551	10029
6	5 6338	3215	6	30 3913	10362
7	5 9661	3323	7	31 4629	10716
8	6 3093	3432	8	32 5718	11089
9	6 6636	3543	9	33 7204	11486
0,40	1,007 0291	3655	0,80	1,034 9115	11911